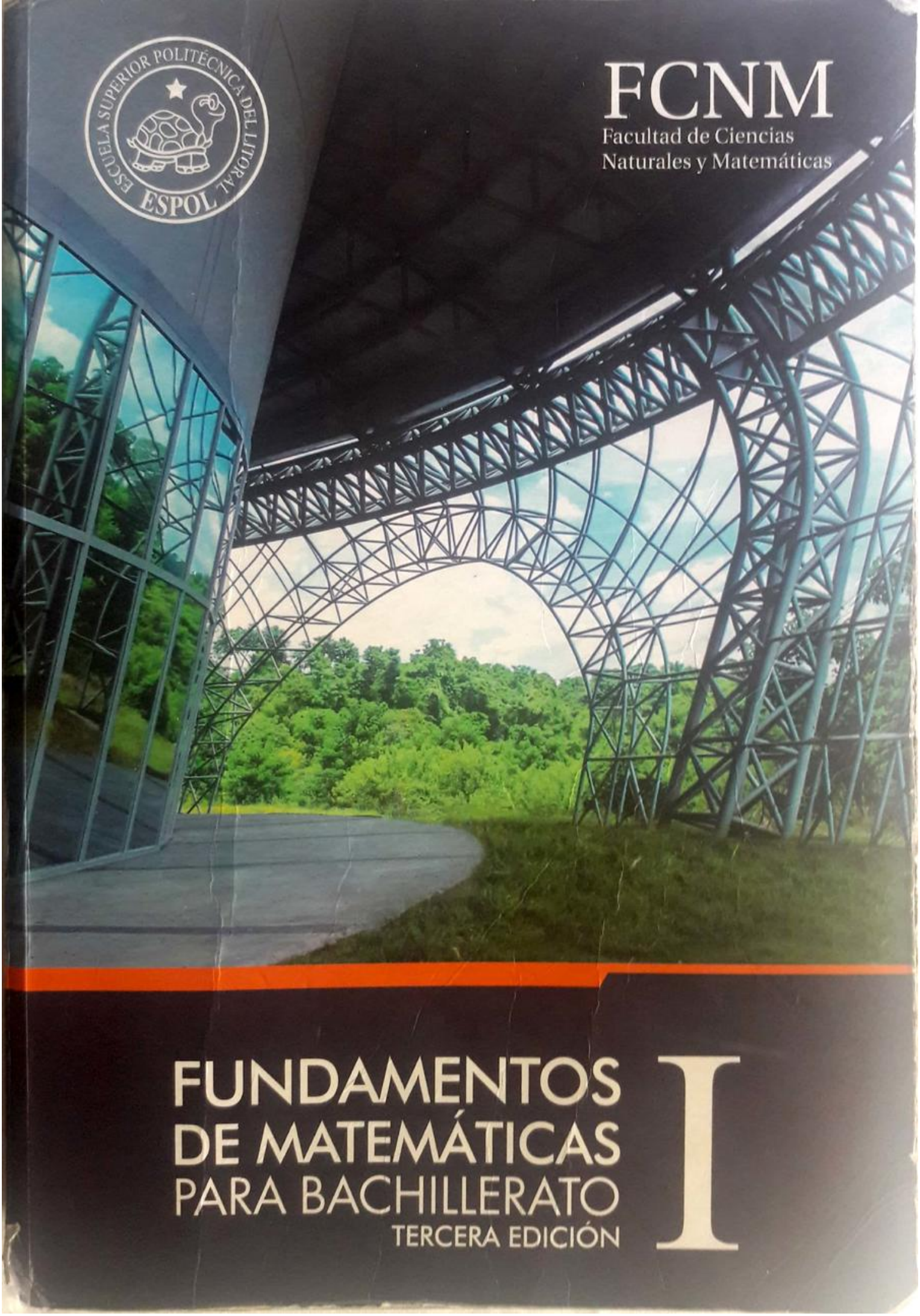


Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS PARA BACHILLERATO I

TERCERA EDICIÓN

FCNM
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Rector	M.Sc. Sergio Flores Macías	Decano	M.Sc. Oswaldo Valle Sánchez
Vicerrectora	Ph.D. Cecilia Paredes Verduga	Subdecana	Ing. Janet Patricia Valdiviezo

COMITÉ EDITORIAL

PROFESORES AUTORES

Mgtr. Miriam Ramos Barberán
Mgtr. Guillermo Baquerizo Palma
Ing. Alejandro Carrión Torres

PROFESORES COLABORADORES

Mgtr. Pablo Álvarez Zamora
Mgtr. Carlos Salazar López
M.Sc. Luis Rodríguez Ojeda

ASISTENTES ACADÉMICOS

Biol. Vanessa Hinojosa Ramos
Ing. Kevin Lucón Rivas
Sr. José Ascencio Moreno
Ing. Miguel Ordóñez Mera

DISEÑADORES GRÁFICOS

Lcdo. Juan Gómez González
Lcda. Martha Ortega Romero
Lcdo. Christian Cascante Cherres

REVISIÓN TÉCNICA

UNIVERSIDAD SANTA MARÍA, CHILE
Profesores del Área de Matemáticas
Campus Guayaquil

Eladio Oliveros Saúco
Licenciado en Educación Especialidad: Matemática

Moisés Villena Muñoz
Magíster en Docencia e Investigación Educativa

UNIVERSIDAD CENTROCCIDENTAL LISANDRO ALVARADO, VENEZUELA
Profesores del Área de Matemáticas

Jorge Vielma Barrios
Ph.D. Especialización: Matemáticas

Miguel Vivas Cortez
Doctor en Ciencias Mención: Matemáticas

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

PREFACIO

La Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, FCNM, de la Escuela Superior Politécnica del Litoral, generadora de conocimientos en Matemáticas, una de las ciencias básicas del conocimiento humano, tiene como parte de su misión, alineada a los principios de ESPOL: *"Formar profesionales de excelencia que contribuyan al desarrollo científico, tecnológico, social, económico, ambiental y político del país"*. Consecuentes con esta declaración, se ha considerado oportuno diseñar y desarrollar la presente obra *"Fundamentos de Matemáticas para Bachillerato"* que en su Tercera Edición, misma que incluye dos tomos, constituye un apoyo dirigido a estudiantes de Bachillerato, Nivel Preuniversitario y Universitario, revisando temas fundamentales de precálculo como base esencial para su futuro estudio matemático en niveles superiores, convirtiéndose en un recurso de consulta a lo largo de la vida.

Con el afán de difundir el conocimiento y potenciar el saber conocer, saber hacer y saber ser, los profesores podrán hacer uso de los recursos de esta obra como ayuda didáctica en la organización y contenido de sus clases, logrando homogeneidad en simbología y lenguaje matemático utilizados. Los desafíos, autoevaluaciones, ejemplos resueltos, ejercicios propuestos, así como los FundaRETOS tienen como objetivo esencial que el lector profundice sus conocimientos conforme va avanzando en el estudio de los capítulos. En particular, los ejercicios propuestos que forman parte del trabajo autónomo del estudiante, han sido diseñados cuidando la aplicación progresiva de dichos conocimientos, empezando por lo más elemental para llegar a niveles mayores de dificultad. Consecuentemente, la orientación de la obra promueve la aplicación de los temas tratados en diferentes ramas del quehacer científico, fomentando la investigación, lo cual en el siglo XXI, representa un pilar clave en la preparación académica del niño, joven o adulto en general.

La cristalización de esta obra, no hubiera sido posible, sin la calidad y aporte académicos de un equipo de profesores, integrado por los Magíster Miriam Ramos Barberán y Guillermo Baquerizo Palma; y por el Ingeniero Luis Carrión Torres; contando además con el invaluable aporte de profesores, profesionales y estudiantes que siempre estuvieron conscientes de la necesidad de renovar esta obra, dedicando largas horas de trabajo, motivados esencialmente por la responsabilidad histórica de poner a disposición de las partes interesadas, una obra actualizada, capaz de responder a las exigencias pedagógicas y académicas del mundo moderno.

Definitivamente, cuando los estudiantes culminen sus estudios de Bachillerato, la etapa universitaria les deparará nuevos retos en el estudio de las Matemáticas; en este sentido, un mundo sorprendente de aplicaciones les permitirán modelar y analizar procesos técnicos, económicos, productivos y científicos, empleando de manera eficiente diferentes recursos informáticos, todo lo cual resultará mucho más fácil asimilar si las bases del Precálculo están bien afianzadas, generándose así la seguridad necesaria para continuar enfrentándose a un futuro cada vez más competitivo en el mundo de la ciencia y la tecnología.

Ahora, once años desde que se adquirió el compromiso intelectual, social y ético de actualizar la edición anterior, la Facultad deja constancia del cumplimiento con este compromiso en concordancia con la trascendencia de la obra, misma que fue declarada como *"...obra de consulta de alto valor científico y pedagógico para el primero, segundo y tercer años de bachillerato..."*, en el Acuerdo No. 443 del 12 de septiembre de 2006, suscrito por el Dr. Raúl Vallejo Corral, Ministro de Educación y Cultura; recomendando que *"...todas las instituciones educativas de segunda enseñanza del país, incorporen en sus bibliotecas el libro..."*, anhelando que la obra siga mereciendo el reconocimiento de todos quienes impulsan el avance académico del país.

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

SOBRE LOS AUTORES

Miriam Ramos Barberán

Su título de maestría fue otorgado por la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la ESPOL en 2009. Actualmente, cursa el Doctorado en Estadística Multivariante Aplicada ofrecido por la Universidad de Salamanca, España. Dentro de su alma mater, se desempeña como profesora desde 1988 hasta la presente fecha, en el área de Matemáticas. Su experiencia en la enseñanza abarca cursos preuniversitarios a nivel de Precálculo; así como cursos universitarios a nivel de Cálculo Diferencial e Integral, Métodos Cuantitativos I y II, Álgebra Lineal e Ingeniería de la Calidad. Ha participado como autora en una exitosa serie de libros desde 2006 hasta 2009*.En el 2008 y 2010, elaboró fascículos coleccionables de circulación nacional para Diario El Comercio asociados al libro Fundamentos de Matemáticas para Bachillerato.

Guillermo Baquerizo Palma

Finalizó su maestría en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas en 2011. En la ESPOL, se desenvuelve como Coordinador en el Área de Matemáticas de los cursos de Nivelación desde 2014. Se dedicó a la docencia a partir de 1996 y su experiencia involucra cátedra de Precálculo, Cálculo Diferencial, Optimización Combinatoria y Grafos, Fundamentos de Computación, Base de Datos, Desarrollo de Aplicaciones Computacionales y Sistemas Administrativos Financieros. Ha participado en calidad de autor en una exitosa serie de libros desde 2006 hasta 2009*. En el 2007, colaboró en "Módulo y propuestas para el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje en Ciencias Naturales y Matemática" como parte de un proyecto de cooperación con la Universidad de Viña del Mar de Chile y el Oberstufen Kolleg de Alemania.

Alejandro Carrión Torres

La Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación le otorgó su título de Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones en 2012. En la actualidad, es docente de Matemáticas en los cursos de Nivelación desde 2013 y se encuentra cursando la Maestría de Ciencias Matemáticas de la Universidad de La Habana, Cuba. Como estudiante politécnico, se desenvolvió en forma destacada cumpliendo el rol de ayudante académico de Precálculo, Cálculo Diferencial e Integral desde 2003 hasta 2009. Adicionalmente, participó como colaborador en el proyecto del libro Fundamentos de Matemáticas para Bachillerato desde 2006 hasta 2008. En el 2007, dio apoyo como asistente de cátedra en el Programa de Capacitación a profesores de Secundaria ofertado por la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas.

*Miriam Ramos y Guillermo Baquerizo han publicado: Matemáticas Básicas Versión Preuniversitaria (2006); Fundamentos de Matemáticas para Bachillerato: Primera Edición (Abril - 2006), Segunda Edición (Mayo - 2006), Reimpresión (Septiembre - 2007); Fundamentos de Matemáticas para: Octavo año de Educación Básica (2009) y Noveno año de Educación Básica (2009).

Guillermo Baquerizo participó junto con otros colegas de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas en la elaboración del libro Fundamentos de Matemáticas para Décimo año de Educación Básica (2009). Mientras que Alejandro Carrión participó en calidad de estudiante colaborador durante la elaboración de los libros de Fundamentos de Matemáticas para Bachillerato: Segunda Edición y Reimpresión.

Scanned by CamScanner

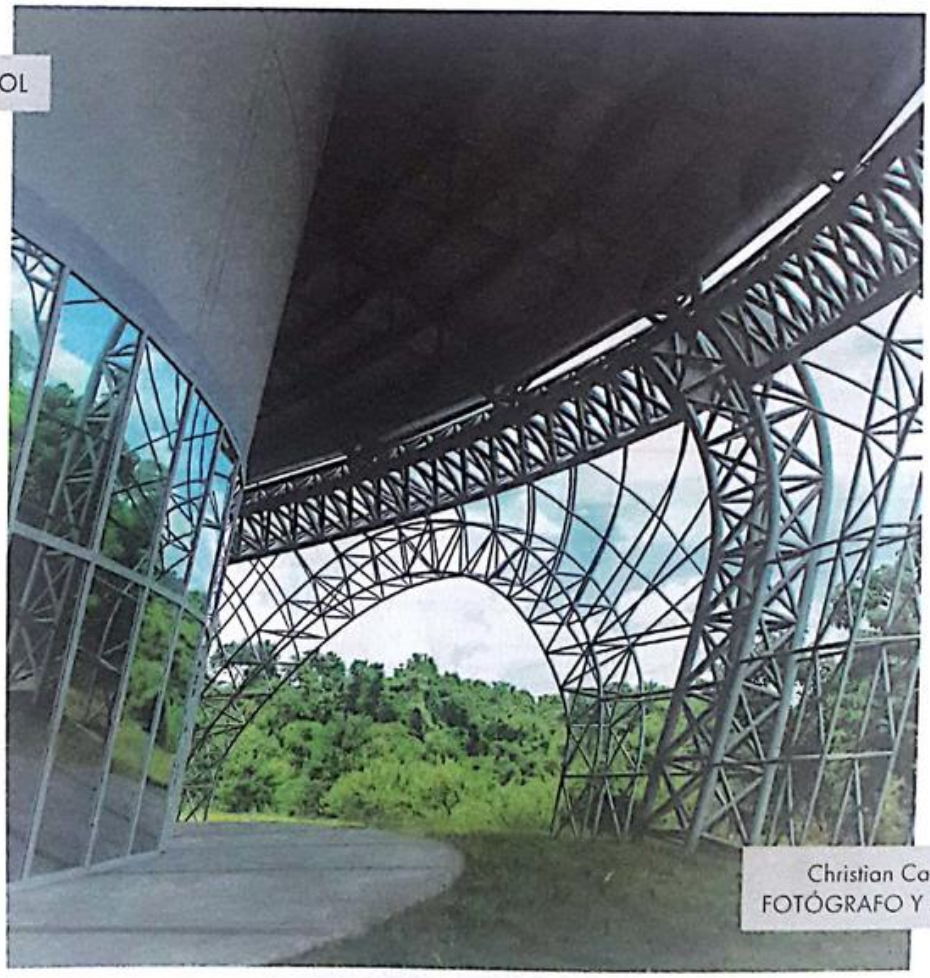
SOBRE LA PORTADA

La fotografía de la portada muestra una vista exterior del primer centro construido como parte del Parque del Conocimiento, más conocido como PARCON. Se ubica en los predios del Campus Gustavo Galindo Velasco de la ESPOL, al norte de Guayaquil. 165 hectáreas fueron destinadas para el parque tecnológico, el cual empezó su fase de construcción a partir del año 2008. El primer centro antes referido, Centro de Tecnologías de Información (CTI), fue inaugurado el 17 de noviembre de 2011, mismo que posee características de un edificio inteligente porque su estructura civil, organización de oficinas, laboratorios, sistemas de comunicación, climatización y control de acceso fueron diseñados teniendo como premisa la flexibilidad y el uso eficiente de energía.

El diseño y construcción del PARCON constituye una viva evidencia de la contribución de las Matemáticas en la materialización de edificios como el del CTI, presentando la armónica combinación de estructuras geométricas en tres dimensiones, soportada con un gran despliegue de cálculos numéricos.

Para la ESPOL, PARCON es uno de sus más importantes proyectos a través del cual se pretende promover la cultura de innovación, integrando a la producción, investigación y educación como factores clave para el desarrollo de la sociedad ecuatoriana, contribuyendo a la transformación de la estructura productiva extractivista en una economía de alto valor agregado, alineándose a la estrategia endógena en el Plan Nacional para el Buen Vivir.

PARCON, ESPOL



Christian Cascante Cherres
FOTÓGRAFO Y ARTISTA C. G.

Scanned by CamScanner

TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN AL LECTOR I
GLOSARIO DE TÉRMINOS IX

CAPÍTULO 1 LÓGICA 1
Desafío 1
Introducción 2
1.1 Proposiciones 3
Autoevaluación 6
1.2 Operadores Lógicos 7
Autoevaluación 15
1.3 Clases de proposiciones 17
Autoevaluación 20
1.4 Estructuras con variables proposicionales 22
Autoevaluación 26
1.5 Propiedades de los operadores lógicos 28
Autoevaluación 31
1.6 Razonamientos 33
Autoevaluación 37
1.7 Demostraciones 39
1.7.1 Demostraciones directas 39
1.7.2 Demostraciones por contraposición (o contrarrecíproca) 40
1.7.3 Demostraciones por contraejemplo 40
1.7.4 Demostraciones por reducción al absurdo 41
Autoevaluación 43
Respuesta al desafío 45
Ejercicios Propuestos 46
FundaRETOS 61

CAPÍTULO 2 CONJUNTOS 63
Desafío 63
Introducción 64
2.1 Tipos y cardinalidad 65
2.1.1 Conjuntos relevantes 66
Autoevaluación 67
2.2 Cuantificadores 69
2.2.1 Relaciones entre conjuntos 71
Autoevaluación 72
2.3 Operaciones entre conjuntos 74
Autoevaluación 76
2.4 Propiedades de las operaciones entre conjuntos 78
Autoevaluación 83

Scanned by CamScanner

2.5 Predicados de una variable 85
2.5.1 Leyes de cuantificadores 88
Autoevaluación 90
2.6 Razonamientos con predicados y cuantificadores 92
Autoevaluación 96
2.7 Pares Ordenados y Producto Cartesiano 98
Autoevaluación 101
2.8 Predicados de dos variables 103
Autoevaluación 109
2.9 Relaciones 111
Autoevaluación 116
2.10 Funciones 118
2.10.1 Tipos de funciones 120
Autoevaluación 128
Respuesta al desafío 130
Ejercicios Propuestos 131
FundaRETOS 151

CAPÍTULO 3 NÚMEROS REALES 153

Desafío 153
Introducción 154
3.1 Conjuntos Numéricos 155
Autoevaluación 158
3.2 Representación Decimal 160
Autoevaluación 164
3.3 Operaciones Binarias 166
3.3.1 Propiedades de las operaciones binarias internas 166
Autoevaluación 169
3.4 Operaciones entre Números Reales 171
Autoevaluación 173
3.5 Relación de Orden 175
3.5.1 Relación de Orden de Números Enteros 175
3.5.2 Relación de Orden de Números Reales 175
Autoevaluación 178
3.6 Conceptos asociados a los Números Enteros 180
Autoevaluación 185
3.7 Expresiones Algebraicas 187
3.7.1 Propiedades de las fracciones 188
3.7.2 Propiedades de los exponentes 190
3.7.3 Productos notables 191
3.7.4 Descomposición en factores 194
3.7.5 Racionalización 201

Scanned by CamScanner

Autoevaluación 204
3.8 Razones y Proporciones 206
3.8.1 Razones 206
3.8.2 Proporciones 206
3.8.3 Proporcionalidad directa entre dos cantidades 207
3.8.4 Regla de tres directa 208
3.8.5 Porcentajes 208
3.8.6 Proporcionalidad inversa entre dos cantidades 208
3.8.7 Regla de tres inversa 209
3.8.8 Regla de tres compuesta 209
Autoevaluación 212
3.9 Valor Absoluto 214
Autoevaluación 222
3.10 Ecuaciones 224
3.10.1 Ecuaciones lineales 226
3.10.2 Ecuaciones cuadráticas 228
3.10.3 Ecuaciones con valor absoluto 235
3.10.4 Ecuaciones con radicales 236
3.10.5 Planteo de ecuaciones 238
Autoevaluación 246
3.11 Inecuaciones 248
3.11.1 Inecuaciones lineales 249
3.11.2 Inecuaciones cuadráticas 250
3.11.3 Inecuaciones con valor absoluto 252
3.11.4 Planteo de inecuaciones 257
Autoevaluación 259
3.12 Inducción Matemática 261
3.12.1 Axiomas de Peano 261
3.12.2 Teorema de inducción 262
Autoevaluación 266
3.13 Técnicas de Conteo 268
3.13.1 Principio de la Suma (Aditivo) 269
3.13.2 Principio de la Multiplicación (Multiplicativo) 270
3.13.3 Permutaciones y combinaciones 271
Autoevaluación 277
3.14 Binomio de Newton 279
Autoevaluación 282
3.15 Sucesiones 284
Autoevaluación 298
Respuesta al desafío 300
Ejercicios Propuestos 301
FundaRETOS 334

Scanned by CamScanner

CAPÍTULO 4 FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

Desafío 335
Introducción 336
4.1 Definición, dominio y rango 337
Autoevaluación 342
4.2 Representación gráfica de funciones 344
Autoevaluación 347
4.3 Tipos de Funciones 349
4.3.1 Funciones Inyectivas 349
4.3.2 Funciones Sobreyectivas 350
4.3.3 Funciones Crecientes 351
4.3.4 Funciones Decrecientes 353
4.3.5 Funciones Pares o Impares 355
4.3.6 Funciones Periódicas 356
4.3.7 Funciones Acotadas 357
Autoevaluación 360
4.4 Funciones Lineales 362
Autoevaluación 368
4.5 Funciones Cuadráticas 370
4.5.1 Forma canónica de la función cuadrática 370
4.5.2 Rango de la función cuadrática 371
4.5.3 Forma factorizada de la función cuadrática 372
4.5.4 Gráfica de la función cuadrática 372
Autoevaluación 377
4.6 Funciones definidas por tramos 379
Autoevaluación 382
4.7 Funciones Especiales 384
Autoevaluación 388
4.8 Técnicas de Graficación de Funciones 390
Autoevaluación 400
4.9 Operaciones con Funciones de Variable Real 402
Autoevaluación 413
4.10 Función Inversa de una Función Biyectiva 415
Autoevaluación 418
4.11 Funciones Polinomiales 420
4.11.1 Gráficas de funciones polinomiales 421
4.11.2 Operaciones con funciones polinomiales 425
4.11.3 Raíces de una ecuación polinómica 432
Autoevaluación 436
4.12 Funciones Racionales 438
4.12.1 Asíntotas de la gráfica de una función racional 438
Autoevaluación 448

Scanned by CamScanner

4.13 Funciones Exponenciales 450
4.13.1 Función Exponencial Natural 455
Autoevaluación 460
4.14 Funciones Logarítmicas 462
4.14.1 Función Logaritmo Natural 466
4.14.2 Función Logaritmo Común 466
4.14.3 Propiedades de los logaritmos 470
4.14.4 Ecuaciones e inecuaciones exponenciales 478
4.14.5 Ecuaciones e inecuaciones logarítmicas 483
Autoevaluación 490
Respuesta al desafío 492
Ejercicios Propuestos 493
FundaRETOS 535

CAPÍTULO 5 TRIGONOMETRÍA 537
Desafío 537
Introducción 538
5.1 Ángulos y sus medidas 539
5.1.1 Unidades angulares 541
5.1.2 Clases de ángulos 543
5.1.3 Relación entre grados sexagesimales y radianes 545
Autoevaluación 549
5.2 Funciones trigonométricas elementales 551
Autoevaluación 564
5.3 Gráficas de funciones trigonométricas 566
Autoevaluación 593
5.4 Funciones trigonométricas inversas 595
Autoevaluación 606
5.5 Identidades trigonométricas 608
Autoevaluación 628
5.6 Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas 630
Autoevaluación 649
Respuesta al desafío 651
Ejercicios Propuestos 652
FundaRETOS 671

CAPÍTULO 6 MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES 673
Desafío 673
Introducción 674
6.1 Definición y Clases 675
6.1.1 Clases de matrices 679
Autoevaluación 683

Scanned by CamScanner

6.2 Operaciones con matrices 685
6.2.1 Suma entre matrices 685
6.2.2 Multiplicación de una matriz por un número real 687
6.2.3 Multiplicación entre matrices 690
6.2.4 Transposición de una matriz 693
6.2.5 Inversa de una matriz 696
Autoevaluación 701
6.3 Matrices Relevantes 703
Autoevaluación 707
6.4 Determinantes 709
Autoevaluación 722
6.5 Sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L.) 724
Autoevaluación 744
6.6 Sistemas de ecuaciones no lineales (S.E.N.L.) 746
Autoevaluación 753
6.7 Sistemas de inecuaciones lineales (S.I.L.) 755
Autoevaluación 762
6.8 Sistemas de inecuaciones no lineales (S.I.N.L.) 764
Autoevaluación 767
Respuesta al desafío 769
Ejercicios Propuestos 770
FundaRETOS 795

Apéndice A 797
Signos de las funciones trigonométricas

Respuestas a Ejercicios 799

Bibliografía 813

Scanned by CamScanner

PRESENTACIÓN AL LECTOR

La estructura de esta obra enmarcada en el diseño de cada una de sus páginas, facilita la visualización de su contenido, captando la atención del lector y motivando el proceso de aprendizaje.

Para tener una idea global de esta obra en su Tomo I, a continuación se presenta un enfoque panorámico de sus componentes.

Tabla de Contenido

Refleja la estructura general del libro y en forma específica los contenidos al interior de los capítulos, incluyendo desafío, introducción, secciones, subsecciones, autoevaluaciones, ejercicios propuestos y fundaRETOS.

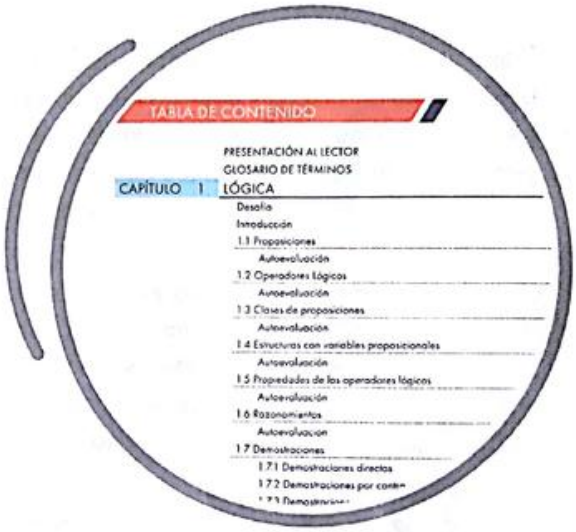


TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN AL LECTOR
GLOSARIO DE TÉRMINOS
CAPÍTULO 1 LÓGICA
Desafío
Introducción
1.1 Proposiciones
Autoevaluación
1.2 Operadores lógicos
Autoevaluación
1.3 Clases de proposiciones
Autoevaluación
1.4 Estructuras con variables proposicionales
Autoevaluación
1.5 Propiedades de los operadores lógicos
Autoevaluación
1.6 Razonamientos
Autoevaluación
1.7 Demostraciones
1.7.1 Demostraciones directas
1.7.2 Demostraciones por contra

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Álgebra: Rama de las matemáticas que tiene por objeto de estudio la generalización del c
mediante expresiones compuestas de constantes (números) y variables (letras).
Ambigüedad: Comportamiento, hecho, palabra o expresión que puede entenderse o interpretar
maneras.
Analogía: Relación de semejanza entre cosas distintas.
Arreglo: Orden y colocación correctos de una cosa.
Axioma: Proposición o enunciado que se considera evidente y no requiere demostración.
Azar: Tratamiento adecuado de la aleatoriedad, que a su vez es dependiente de algún suceso fortui
Biela: Elemento del motor encargado de transmitir la presión de los gases que actúa sobre el pistón a
a la que es la misma, es un eslabón de la cadena de transformación del movimiento alternativo
rotativo (cigüeñal).
Bosquejo: Trazo primero y no definitivo de una obra pictórica, y, en general, de cualquier gén
ingenio.
Bungee: Tipo de deporte extremo el cual tiene como finalidad lanzarse desde un sitio con ve
altura, con cuerda elástica amarrada a nivel de sus tobillos la cual estará sujetada por el otro
en donde comenzó la caída, provocando que el individuo ascienda y descienda hasta que el
salto desaparezca por completo.
Características: Todos aquellos aspectos o variables que configuran el estado o identid
peculiar, que puede ser una persona, animal, vegetal, objeto o incluso una condición
... Lado que junto con otro forma el ángulo recto de un triángulo rectángulo
...ioridad en el conocimiento; adhesión firme del sujeto al conteni
...el motor del automóvil y otras máquinas que con
...na biela, y está destinada a trans

Glosario de términos

Contiene el significado de palabras que se utilizan en esta obra, con el propósito de aclarar dudas o imprecisiones.

Scanned by CamScanner

Capítulos

Esta obra contiene doce capítulos, los cuales han sido seleccionados con base en las exigencias actuales del conocimiento que debe adquirir un estudiante durante la etapa del bachillerato y reforzar en la etapa preuniversitaria y universitaria.

El Tomo I hace referencia a los siguientes seis capítulos:

Lógica

Con el uso de la Lógica, se sientan las bases para el análisis de proposiciones, a partir del cual es posible construir razonamientos y determinar su validez, así como utilizar implicaciones y equivalencias lógicas para realizar demostraciones. En este sentido, la lógica simbólica se constituye en el lenguaje indispensable al momento de definir y desarrollar formalmente diversos conceptos matemáticos.

Conjuntos

La Teoría de Conjuntos resulta fundamental en la comprensión de temas de gran importancia en el aprendizaje matemático. Su enlace con la formalidad que proporciona la lógica simbólica permite componer estructuras más elaboradas que incluyen cuantificadores, predicados, pares ordenados, estableciéndose relaciones y operaciones entre los elementos de diferentes agrupaciones para llegar al concepto general de función.

Números Reales

El conocimiento de los conjuntos numéricos, junto con sus operaciones fundamentales y propiedades, es clave para la transición de la aritmética al álgebra culminando con la manipulación de expresiones. Se trata de adquirir destrezas en el planteo y resolución de problemas de la vida cotidiana a partir de conceptos relacionados con ecuaciones, inecuaciones, técnicas de conteo, binomio de Newton y sucesiones; utilizando además, el componente inductivo como un apoyo para el desarrollo demostrativo.

Funciones de una Variable Real

La correspondencia matemática establecida entre conjuntos de números reales, bajo las condiciones de existencia y unicidad, lleva a la definición medular de función de variable real. Conocer sus diferentes modelos, desde lineales hasta logarítmicos, así como sus características y representación gráfica, constituyen requisitos indispensables para cursos de nivel superior. Las aplicaciones de este tema merecen especial atención, pues se evidencia su utilidad universal en los diferentes campos de la ciencia.

Trigonometría

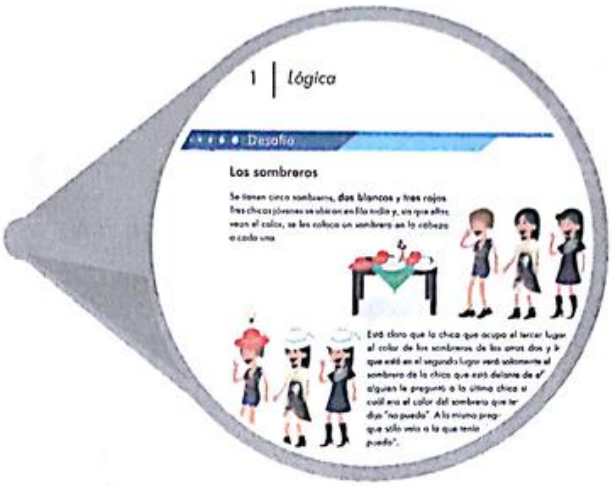
El estudio de los ángulos y sus medidas es el cimiento sobre el cual se han desarrollado las funciones trigonométricas, cuyas propiedades, relaciones y gráficas son vitales en numerosas aplicaciones del mundo moderno. De la mano de las denominadas identidades trigonométricas, la resolución de ecuaciones e inecuaciones es un componente transversal para el desarrollo de temas que se estudian en esta obra.

Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones

Conocer los arreglos matriciales, sus clases, características, operaciones y determinantes, es primordial para la óptima representación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Adicionalmente, el recurso gráfico juega un papel muy importante al momento de resolver sistemas de ecuaciones no lineales, inecuaciones lineales, e inecuaciones no lineales; todos ellos, temas de amplio espectro aplicativo.

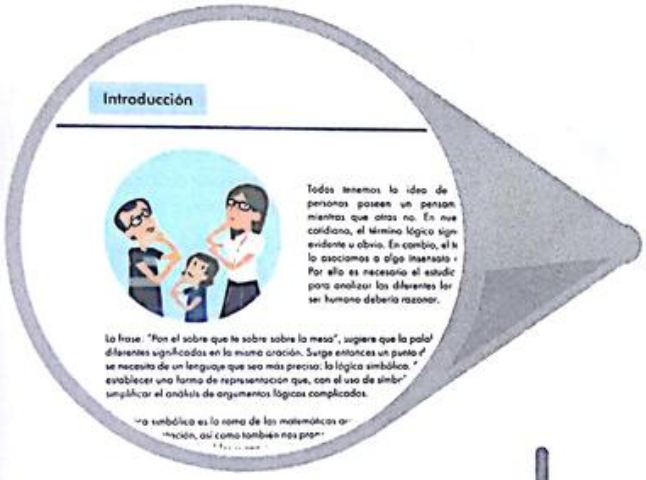
Scanned by CamScanner

El esquema detallado de la intraestructura correspondiente a cada capítulo se describe a continuación:



Desafío

Se plantea al inicio de cada capítulo con el propósito de captar la atención del lector e intuitivamente despertar su curiosidad por resolverlo, usando únicamente sus conocimientos previos. De tal manera, se evita el pensamiento mecanizado en la resolución de problemas, además de crear interés por la lectura del capítulo en su totalidad.



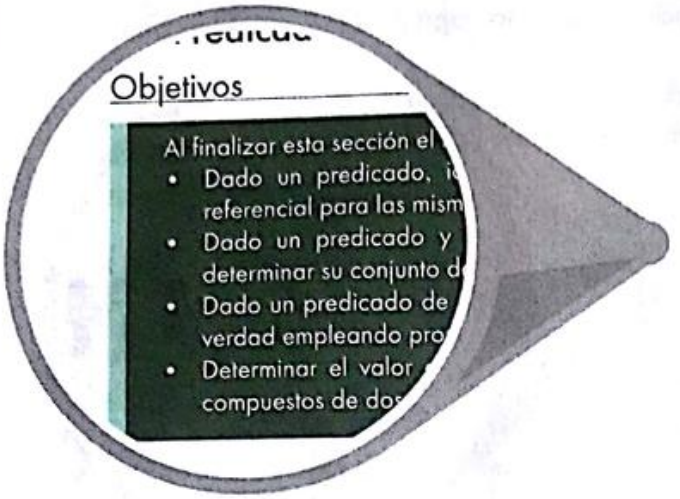
Introducción

Se proporciona al lector una referencia apropiada de cada capítulo mediante antecedentes históricos y biográficos, así como de su importancia y trascendencia en las matemáticas.

Secciones

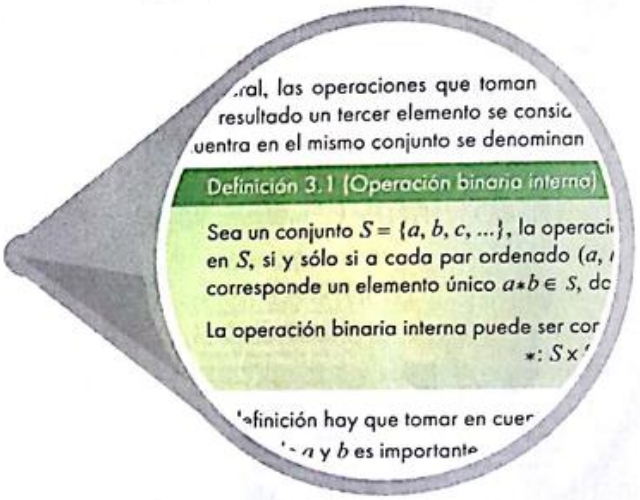
Cada capítulo ha sido dividido en temas, de acuerdo a los conceptos que se pretenden analizar. Estas agrupaciones, denominadas secciones, muestran de manera detallada cada tópico con la profundidad y aplicaciones que el caso amerita. Cada sección se encuentra numerada según corresponda al capítulo que se está analizando.

Scanned by CamScanner



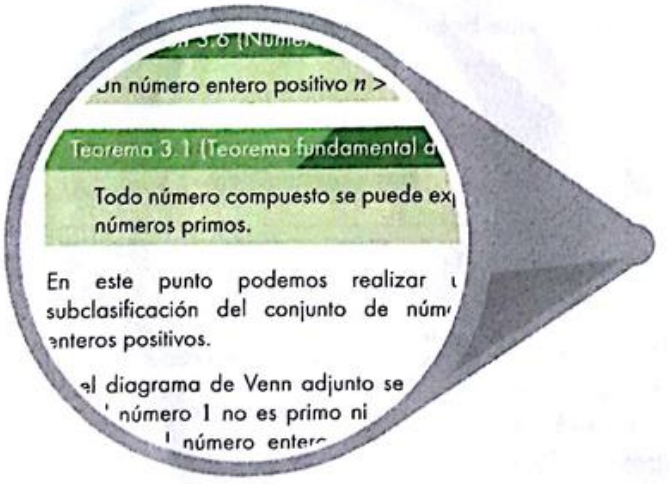
Objetivos

Al inicio de cada sección, se plantea de manera específica lo que se pretende lograr luego de su respectiva revisión y estudio. El cumplimiento de los objetivos confirmará la comprensión de los diferentes contenidos.



Definiciones

Estas declaraciones representan los conceptos más relevantes que el lector no debe olvidar. En la medida que el lector comprenda con absoluta claridad cada una de las definiciones, podrá garantizar la asimilación de los contenidos por capítulo.



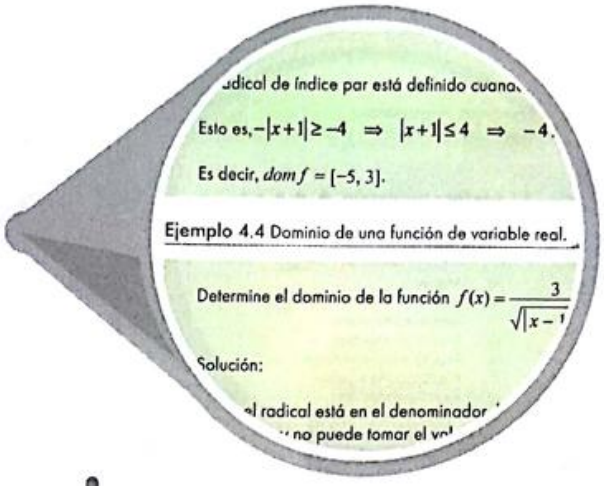
Teoremas

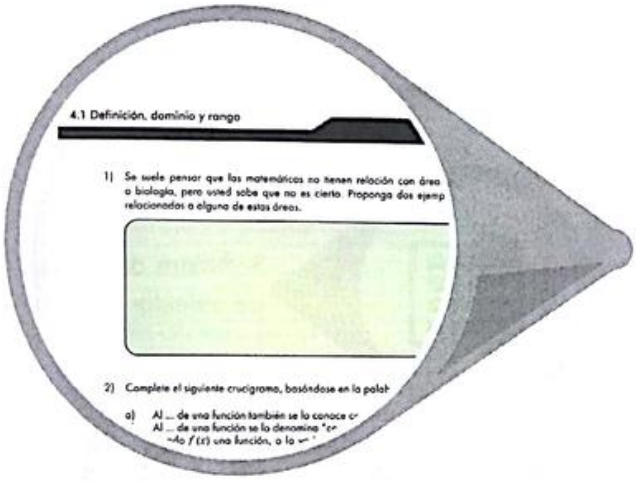
Constituyen enunciados que proporcionan el recurso necesario para complementar la importancia del marco teórico de definiciones y demostraciones.

Scanned by CamScanner

Ejemplos resueltos

Representan aplicaciones concretas y directas a partir del análisis de cada tema. La complejidad de los mismos guarda un orden creciente en cada sección. Algunos de los ejemplos seleccionados tienen relación con otras ramas de las ciencias y con la vida cotidiana.



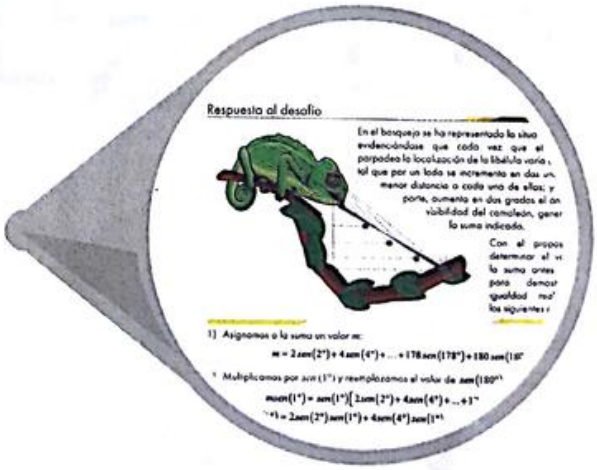


Autoevaluaciones

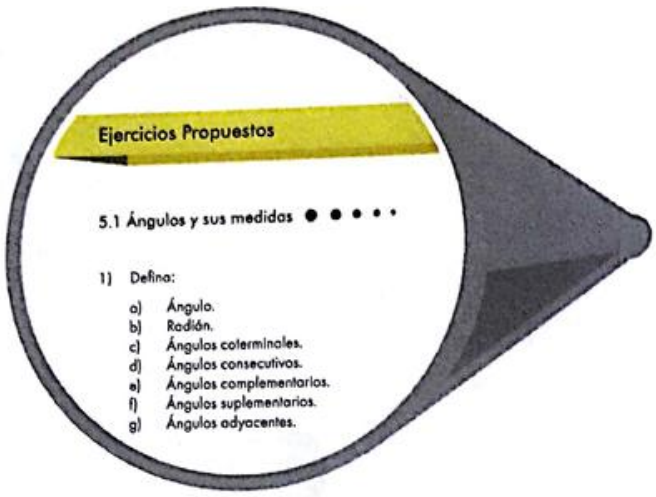
Se incluyen al final de cada sección con la intención de que el lector evalúe los conocimientos básicos adquiridos. Cada autoevaluación consta de preguntas a ser desarrolladas en los espacios indicados, contando en los casos pertinentes, con las respuestas al final del libro.

Respuesta al desafío

El desafío propuesto al inicio del capítulo presenta su solución para que el lector despeje sus inquietudes y dificultades. De esta forma, el usuario puede reflexionar sobre sus debilidades o fortalecer, si fuera el caso, sus estrategias de planteamiento y resolución del problema.



Scanned by CamScanner



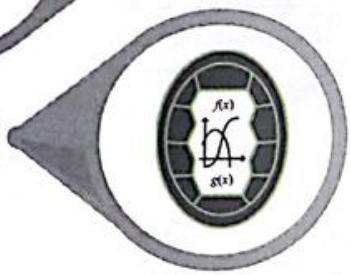
Ejercicios Propuestos

Hacia la culminación del capítulo, se plantean ejercicios organizados por sección, los mismos que tienen grados de dificultad ascendente y se presentan en forma de preguntas de tipo Verdadero/Falso, Opción Múltiple y de Desarrollo. El propósito de estos ejercicios es promover el trabajo independiente y la autocrítica por parte del estudiante. Al final del libro se muestran las respuestas a estos ejercicios.

Íconos complementarios

Estos íconos aparecen adjuntos a ejercicios seleccionados que requieren la utilización de un software adicional como apoyo para la resolución y verificación de los mismos.

Software de hojas de cálculo



Software de graficación

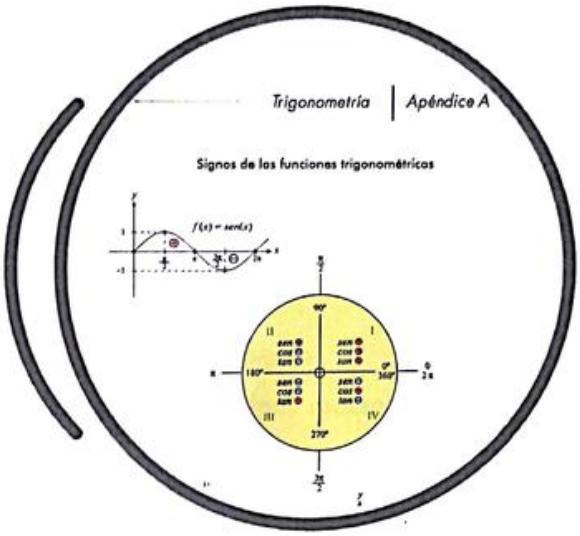
FundaRETOS

Al finalizar cada capítulo se plantean dos ejercicios de un grado de dificultad superior a los ejemplos resueltos, de autoevaluación y propuestos. El lector podrá resolverlos una vez que domine en forma absoluta todo el contenido del capítulo, a la vez que haya madurado en su raciocinio para la resolución de problemas.

Scanned by CamScanner

Apéndice

Incluye información complementaria que contribuye a la comprensión de contenidos asociados al capítulo de Trigonometría.



Respuestas

Contienen los resultados de los problemas planteados, tanto a nivel de Autoevaluaciones como de Ejercicios Propuestos. Estos resultados se presentan por capítulos, de acuerdo al orden establecido en este libro, exceptuando aquellos que requieren demostraciones o construcción de tablas y gráficas.

Bibliografía

Refleja el catálogo del material de consutla y de soporte documental utilizado para la elaboración de esta obra, ya sean textos o páginas web.

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Álgebra: Rama de las matemáticas que tiene por objeto de estudio la generalización del cálculo aritmético mediante expresiones compuestas de constantes (números) y variables (letras).

Ambigüedad: Comportamiento, hecho, palabra o expresión que puede entenderse o interpretarse de diversas maneras.

Analogía: Relación de semejanza entre cosas distintas.

Arreglo: Orden y colocación correctos de una cosa.

Axioma: Proposición o enunciado que se considera evidente y no requiere demostración.

Azar: Tratamiento adecuado de la aleatoriedad, que a su vez es dependiente de algún suceso fortuito.

Biela: Elemento del motor encargado de transmitir la presión de los gases que actúa sobre el pistón al cigüeñal, o lo que es lo mismo, es un eslabón de la cadena de transformación del movimiento alternativo (pistón) en rotativo (cigüeñal).

Bosquejo: Traza primera y no definitiva de una obra pictórica, y, en general, de cualquier producción del ingenio.

Bungee: Tipo de deporte extremo el cual tiene como finalidad lanzarse desde un sitio con varios metros de altura, con una cuerda elástica amarrada a nivel de sus tobillos, la cual estará sujetada por el otro extremo al sitio en donde comenzó la caída, provocando que el individuo ascienda y descienda hasta que el impulso inicial del salto desaparezca por completo.

Características: Todos aquellos aspectos o variables que configuran el estado e identidad de una entidad en particular, que puede ser una persona, animal, vegetal, objeto o incluso una condición o escenario.

Cateto: Lado que junto con otro forma el ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Certeza: Seguridad en el conocimiento; adhesión firme del sujeto al contenido de un enunciado.

Cigüeñal: Pieza del motor del automóvil y otras máquinas que consiste en un eje con varios codos, en cada uno de los cuales se ajusta una biela, y está destinada a transformar el movimiento rectilíneo de los pistones en rotativo, o viceversa.

Concepto: Elemento básico del pensamiento. Puede expresarse mediante palabras y otorgarle o no algún tipo de valor. Será un concepto real conforme ese valor que se le ha otorgado demuestre potencial para afectar a algo o alguien. Su estudio promueve el conocimiento humano.

Conceptualización: Acción o proceso mediante el cual se desarrollan ideas abstractas o conceptos a partir de la experiencia o comprensión consciente, que no es necesariamente verdadera, sobre algún tema.

Contexto: Término que deriva del vocablo latino *contextus* y que se refiere a todo aquello que rodea, ya sea física o simbólicamente, a un acontecimiento. A partir del contexto, por lo tanto, se puede interpretar o entender un hecho.

Corolario: Una afirmación que sigue inmediatamente a un teorema. Una proposición B es un corolario de una proposición o teorema A si B puede ser deducida sencillamente de A.

Cota: Entidad que limita los elementos matemáticos acotados.

Curva: En matemáticas, es una línea continua de una dimensión, que varía de dirección paulatinamente.

Criterio: Norma para conocer la verdad, juicio o discernimiento.

Dado legal: Objeto de forma poliédrica preparado para mostrar un resultado aleatorio cuando es lanzado sobre una superficie horizontal, en cuyo caso los resultados ocurren con una probabilidad que sigue una distribución uniforme discreta.

Scanned by CamScanner

Dato: Representación simbólica (numérica, alfabética, etc.) de un atributo o característica de una entidad. El dato no tiene valor semántico (sentido) en sí mismo, pero, convenientemente tratado (procesado), se puede utilizar en la realización de cálculos o toma de decisiones.

Dimensión: Número relacionado con las propiedades métricas o topológicas de un objeto matemático.

Enunciado: Expresión lingüística de una proposición. Se trata de una oración que afirma o niega algo, y que, en lógica sólo puede ser verdadera o falsa. Los argumentos lógicos se estructuran a partir de enunciados: premisas y conclusión.

Equidistar: Dicho de un punto, de una línea, de un plano o de un sólido, cuando se halla a igual distancia de otro determinado.

Espacio: Conjunto, usualmente con alguna estructura adicional. Por ejemplo: espacio euclídeo, espacio vectorial, espacio topológico, espacio uniforme, espacio métrico.

Espacio Euclidiano: Tipo de espacio geométrico donde se satisfacen los axiomas de Euclides de la geometría. La recta real, el plano euclídeo y el sistema tridimensional de la geometría euclidiana son casos especiales de espacios euclidianos de dimensiones 1, 2 y 3 respectivamente.

Estada: Estancia, permanencia en un lugar.

Estadística: Rama de las matemáticas que se utiliza para describir, analizar e interpretar fenómenos donde interviene el azar y que permite a otras ciencias generar modelos matemáticos empíricos donde se considera el componente aleatorio.

Fórmula: Expresión breve y precisa del modo de hacer, resolver o conseguir algo.

Fracción: Número racional escrito como un entero (el numerador) dividido por un entero no nulo (el denominador).

Fresa: Herramienta rotativa de corte utilizada para extraer material de una pieza cuando se quiere llevar a cabo un proceso de mecanizado.

Grado: En trigonometría, se considera como la unidad de medida angular y se representa con el símbolo °. En este libro se considera la escala sexagesimal. En las funciones polinomiales, se denomina así al mayor exponente que tiene alguna de sus incógnitas.

Gráfica de una función: Esquema de representación de una función de variable real, de tal manera que se facilite el análisis de sus características.

Hipótesis: Afirmación matemática que se cree verdadera, pero no ha sido demostrada. También se denomina conjetura. Por ejemplo: la conjetura de Goldbach o la hipótesis de Riemann.

Hipotenusa: Lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo.

Inferencia: Acción y efecto de deducir algo como conclusión de otra cosa, es decir, conducir a un resultado.

LaTeX: Sistema de composición de textos, orientado a la creación de documentos escritos que presenten una alta calidad tipográfica. Por sus características, es usado en la generación de artículos y libros científicos que incluyen, entre otros elementos, expresiones matemáticas.

Lema: Afirmación que forma parte de un teorema más elaborado. Por supuesto, la distinción entre teoremas y lemas es arbitraria. El lema de Gauss y el lema de Zorn, por ejemplo, son considerados demasiado importantes para algunos autores.

Lenguaje de programación: En informática, es cualquier forma de escritura que posee determinadas instrucciones que, combinadas y modificadas correctamente, podrán ser interpretadas y así resultar en un programa, página web, etc.

Longitud: Del latín *longitudo*, constituye la distancia existente entre dos puntos. En el Sistema Internacional de Unidades se mide en metros.

Scanned by CamScanner

Lugar geométrico: Conjunto de puntos, en el plano o en el espacio, que poseen una propiedad común y suelen formar figuras.

Matemáticas: Del griego μάθημα (máthēma): ciencia, conocimiento, aprendizaje; μαθηματικός (mathēmatikós): amante del conocimiento. Es el estudio de patrones en las estructuras de entes abstractos y en las relaciones entre ellas. Algunos matemáticos se refieren a ella como la <<Reina de las Ciencias>>.

Multimedia: Se aplica a la tecnología o sistema que utiliza distintos medios de comunicación combinados, físicos o digitales, como textos, fotografías, imágenes de vídeo o sonido, para presentar información.

Nexo: Cualquier elemento que sirve para unir a otros dos.

Notación: Sistema de signos convencionales que se utiliza en una disciplina determinada para representar ciertos conceptos.

Número: Símbolo que representa de manera abstracta una cantidad. Noción fundamental de las matemáticas que permite contar, clasificar o medir magnitudes, pero que no puede ser objeto de definición rigurosa.

Paralelismo: Igualdad de distancia entre todos los puntos de dos o más líneas o planos.

Patrón: Conjunto de elementos que forman una unidad diferenciada y que se repiten a lo largo del tiempo, por lo que pueden tomarse como modelo o punto de referencia.

Pistón: Pieza de una bomba o del cilindro de un motor que se mueve hacia arriba o hacia abajo impulsando un fluido o bien recibiendo el impulso de él.

Plano cristalográfico: Tipo de plano que contiene a los centros de tres átomos en una red cristalina, uniendo tres nudos de una celdilla, determinados por los índices de Miller.

Probabilidad: Teoría desarrollada para describir los sucesos aleatorios. Es la característica de un suceso del que existen razones para creer que se realizará.

Postulado: Proposición que, sin ser evidente, se admite como cierta sin demostración.

Recursivo: Proceso, función o rutina que se ejecuta repetidas veces, basados en su propia definición, hasta que se satisface una condición específica.

Recta Numérica: Representación del ordenamiento de los números reales. Usualmente, marcamos 0 en el medio, los números negativos en la izquierda, y los números positivos en la derecha. Las flechas indican que la recta se extiende infinitamente en ambas direcciones.

Restricción: Limitación o reducción que se produce en alguna cosa.

Similitud: Similaridad en apariencia, carácter o naturaleza entre personas y cosas.

Sistema de numeración: Conjunto de símbolos y reglas de generación que permiten construir todos los números válidos en él.

Subíndice: Letra o número de pequeño tamaño que se coloca en el lado derecho y en la parte inferior de un signo gráfico para indicar algo.

Superficie: Parte más externa de un cuerpo que lo limita o separa de lo que lo rodea.

Superíndice: Letra o número de pequeño tamaño que se coloca en el lado derecho y en la parte superior de un signo gráfico para indicar algo.

Teorema: Afirmación que puede ser demostrada como verdadera dentro de un marco lógico. En matemáticas, una afirmación debe ser interesante o importante para ser considerada un teorema.

Transportador: Instrumento que mide ángulos en grados sexagesimales.

Variable: Elemento de una fórmula, proposición o algoritmo que puede adquirir o ser sustituido por un valor cualquiera. Los valores que una variable es capaz de recibir pueden estar definidos dentro de un rango. En muchos usos, lo contrario de una variable es una constante.

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

1 | Lógica

Desafío

Los sombreros

Se tienen cinco sombreros, **dos blancos** y **tres rojos**. Tres chicas jóvenes se ubican en fila india y, sin que ellas vean el color, se les coloca un sombrero en la cabeza a cada una.

Está claro que la chica que ocupa el tercer lugar sí ve el color de los sombreros de las otras dos y la chica que está en el segundo lugar verá solamente el color del sombrero de la chica que está delante de ella. Cuando alguien le preguntó a la última chica si podía deducir cuál era el color del sombrero que tenía en la cabeza, dijo "no puedo". A la misma pregunta, la segunda chica, que sólo veía a la que tenía delante, dijo "yo tampoco puedo".

En cambio, cuando se le preguntó a la primera chica, que escuchó las respuestas de las otras dos, dijo "mi sombrero es rojo", a pesar de que no veía el color de alguno de los sombreros. ¿Cómo lo dedujo?

Si no puede resolver este desafío, busque la solución en la página correspondiente del presente capítulo.

Scanned by CamScanner

Introducción

Todos tenemos la idea de que algunas personas poseen un pensamiento lógico, mientras que otras no. En nuestro lenguaje cotidiano, el término lógico significa racional, evidente u obvio. En cambio, el término ilógico lo asociamos a algo insensato o inadmisible. Por ello es necesario el estudio de la lógica para analizar las diferentes formas en que el ser humano debería razonar.

La frase: "Pon el sobre que te sobre sobre la mesa", sugiere que la palabra **sobre** tiene tres diferentes significados en la misma oración. Surge entonces un punto de partida importante, se necesita de un lenguaje que sea más preciso: la lógica simbólica. Su propósito consiste en establecer una forma de representación que, con el uso de símbolos, se pueda utilizar para simplificar el análisis de argumentos lógicos complicados.

La lógica simbólica es la rama de las matemáticas que nos permite reconocer la validez de una argumentación, así como también nos proporciona los criterios necesarios para elaborar demostraciones irrefutables y convincentes. En este sentido, más importante que responder a preguntas del tipo ¿qué es?, resulta hacerlo con preguntas del tipo ¿qué características tiene? De esta forma, las definiciones están constituidas por una parte conceptual (¿qué significa?) y una parte operativa (¿cómo se trabaja?).

Gottfried Leibniz fue el primero en concebir este planteamiento, cuando a los 14 años de edad intentó reformar la lógica clásica. El sueño de Leibniz no se hizo realidad hasta que George Boole separó los símbolos presentes en las operaciones matemáticas de los conceptos sobre los cuales operaban. Actualmente, el álgebra booleana constituye un área de las matemáticas que ha pasado a ocupar un lugar prominente con el advenimiento de la computadora, ya que es usada ampliamente en el diseño de su circuitería interna; y, sus aplicaciones van en aumento en muchas áreas del conocimiento.

En este capítulo pretendemos mejorar el arte de razonar correctamente y cuando logremos dicho objetivo habremos adquirido los conceptos elementales de lógica, permitiéndonos así ampliar nuestro recorrido en caminos adecuados de reflexión, deducción y toma de decisiones para un variado campo de acción en las ciencias.

Scanned by CamScanner

1 | *Lógica*

1.1 Proposiciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dadas varias oraciones, identificar cuáles son proposiciones y cuáles no lo son.
- Construir tablas de verdad con base en los valores de verdad que pueden tomar las variables proposicionales.

La lógica es un método de razonamiento que no acepta conclusiones erróneas. Esto se puede lograr definiendo en forma estricta cada uno de los conceptos. Todo debe determinarse de tal forma que no dé lugar a dudas o imprecisiones en la veracidad de su significado. Nada puede darse por sobreentendido y las definiciones de diccionario no son normalmente suficientes.

Por ejemplo, en el lenguaje ordinario, un enunciado u oración se puede definir como "una palabra o grupo de palabras que declara, pregunta, ordena, solicita o exclama algo; unidad convencional del habla o escritura coherente, que normalmente contiene un sujeto y un predicado, que empieza con letra mayúscula y termina con un punto".

Sin embargo, en lógica simbólica una oración tiene un significado mucho más específico y se denomina proposición.

Definición 1.1 (Proposición)

Una proposición es una unidad semántica que, o sólo es verdadera o sólo es falsa.

Sin duda alguna, uno de los elementos fundamentales de la lógica es la proposición. Por ello, las oraciones que no son falsas ni verdaderas, las que presentan algún tipo de imprecisión o aquellas que carecen de sentido, no son objeto de estudio de la lógica.

Ejemplo 1.1 Oraciones que son proposiciones.

5 es un número primo.
$-17 + 38 = 21$
Todos los números enteros son positivos.
Vicente Rocafuerte fue Presidente del Ecuador.

Las oraciones anteriormente expuestas son proposiciones, ya que son verdaderas o falsas. Todas ellas pueden ser calificadas por el lector con precisión y sin ambigüedades o subjetivismo.

Usualmente, las primeras letras del alfabeto español en minúscula se usan para representar proposiciones.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 1.2 Representación simbólica de proposiciones.

5 es un número primo puede ser representada por la letra a, de la forma:
a: 5 es un número primo.

Ejemplo 1.3 Oraciones que no son proposiciones.

Lava el auto, por favor.
Hola, ¿cómo estás?
¡Apúrate!
¿Qué hora es?
$x + 5 = 9$

Las primeras cuatro oraciones no son proposiciones porque no se puede establecer su valor de verdad. Generalmente las oraciones imperativas, exclamativas e interrogativas no son proposiciones. El quinto enunciado no es una proposición, ya que el valor de x no es preciso, pudiendo obtenerse una proposición falsa o verdadera dependiendo del número que reemplace a x.

Definición 1.2 (Valor de verdad)

El valor de verdad de una proposición es la cualidad de veracidad que describe adecuadamente la proposición. Éste puede ser verdadero o falso.

Frecuentemente al valor verdadero se lo asocia con: 1, V, T, True; mientras que el valor falso se lo asocia con: 0, F, False. Se podría utilizar cualquiera de ellas, pero la convención a seguir en esta obra será el uso de 0 y 1, símbolos que representan a las proposiciones falsas y verdaderas, respectivamente.

En el ejemplo 1.1 podemos observar que el valor de verdad de la segunda proposición es 1 (verdadero), mientras que el valor de verdad de la tercera proposición es 0 (falso).

Verdad y falsedad pueden considerarse simplemente como los valores lógicos de la unidad semántica descriptiva con sentido completo. Ese valor es lo que más nos interesa sobre una proposición.

En ciertas ocasiones, se analizarán estructuras lógicas que sirven para representar a proposiciones a través de variables y relaciones entre ellas. Estos bloques de construcción son básicos en la lógica formal y se denominan variables proposicionales.

Definición 1.3 (Variable proposicional)

p constituye una variable proposicional cuando representa a proposiciones. El valor de verdad de esta variable puede ser verdadero o falso.

Por lo general, las últimas letras en minúscula del alfabeto español p, q, r, etc., se usan para denotar variables proposicionales.

Scanned by CamScanner

Así por ejemplo, p: Hoy es lunes, es una variable proposicional que representa a una proposición, pudiendo ser verdadera o falsa dependiendo del valor de verdad de dicha proposición; es decir, del día de la semana.

Más adelante será necesario el enlace entre las diferentes variables proposicionales, por lo cual se requiere el concepto de tabla de verdad.

Definición 1.4 (Tabla de verdad)

Una tabla de verdad es una representación de los posibles valores de verdad que podrían tomar una o más variables proposicionales.

Ejemplo 1.4 Construcción de tablas de verdad.

p
0
1

p	q
0	0
0	1
1	0
1	1

p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

p	q	r	s
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Se puede notar en la parte resaltada de la segunda tabla de verdad que la variable proposicional p ha sido reemplazada por una proposición verdadera y la variable proposicional q por una proposición falsa.

Además, en la parte resaltada de la cuarta tabla de verdad, note que las variables proposicionales p y s han sido reemplazadas por proposiciones verdaderas y las variables proposicionales q y r por proposiciones falsas.

La cantidad de combinaciones (filas de la tabla de verdad) depende de la cantidad de variables proposicionales presentes en la expresión lógica.

Las tablas de verdad son esenciales al momento de mostrar los valores de verdad de las relaciones entre las variables proposicionales y los resultados posibles al realizar operaciones lógicas, lo cual será analizado posteriormente.

Scanned by CamScanner

Autoevaluación

1) Considere los siguientes enunciados. Indique con un ✓ si es una proposición y con una **X** si no lo es.

a) ¡Qué lindo el perrito que adoptaste!
b) Matilde Hidalgo fue la primera mujer que sufragó en Ecuador.
c) ¿Deseas un helado de vainilla o de chocolate?
d) $123 + 321 = 444$
e) El mes de febrero siempre tiene 28 días.

2) Escriba 1 en el recuadro si el valor de verdad de la proposición es verdadero o 0 si es falso.

a) $7 + 7 + 7 + 7 + (7)(0) + 7 = 35$
b) Quito es la capital de la provincia de Pichincha.
c) Los perros son ovíparos.
d) Algunos duraznos se venden en latas.
e) $4 + (2)(5) - 1 = 13$

3) Considere los siguientes enunciados. Indique con un ✓ si es una proposición y con una **X** si no lo es. De las proposiciones que tienen un ✓, encierre en un círculo el literal que corresponda a una proposición verdadera.

a) $\dfrac{3 + 75 + 8}{1 + 75} = \dfrac{3 + 8}{1} = 11$
b) Los fideos con salsa de tomate son lo mejor.
c) $(10)^2 = 7 + 100 - \sqrt{49}$
d) Los días frescos son confortables.
e) La fórmula molecular del agua es $H_{10}O$.

4) La frase "Dormir en el suelo es más cómodo que en el sillón", ¿es una proposición?, ¿sí o no?, ¿por qué?

5) Considere la frase "mañana es tarde" y los números asignados para cada letra del abecedario. Complete la fila 2 con los números que corresponden a cada letra en la frase.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Frase:

Fila 1	m	a	ñ	a	n	a		e	s		t	a	r	d	e
Fila 2			15												

Luego, considerando la fila 2, una con líneas cada proposición con su respectivo valor de verdad.

a) La suma de todos los valores es 101.
b) La suma de todos los valores no es 120.
c) La suma de los 5 primeros valores no es 45.
d) La suma de los 5 últimos valores no es 50.

1. VERDADERO
0. FALSO

Scanned by CamScanner

1 | *Lógica*

1.2 Operadores Lógicos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada la definición de los operadores lógicos, interpretar el comportamiento de estos operadores mediante su tabla de verdad.
- Dado un texto, traducirlo al lenguaje simbólico, identificando operadores lógicos y variables proposicionales presentes.
- Dada una variable proposicional en el lenguaje simbólico, interpretar su traducción al lenguaje natural.
- Dada una condicional de variables proposicionales, realizar parafraseos con las diferentes expresiones gramaticales existentes.
- Dada una condicional, determinar su recíproca, inversa y contrarrecíproca.
- Dada una implicación verdadera, analizar sus condiciones necesarias y suficientes.

En nuestro lenguaje común encontramos frecuentemente variables proposicionales, como las mostradas a continuación, que representan a proposiciones.

Ejemplo 1.5 Variables proposicionales en lenguaje común.

- **No** te encontré en tu casa.
- Fui al banco **y** estaba cerrado.
- Tengo una moneda de cinco centavos **o** una de diez centavos.
- El carro de Juan **o** es azul **o** es negro.
- **Si** me gano la lotería, **entonces** me compro una casa.
- Estudio en la ESPOL **si y sólo si** me esfuerzo.

Estas variables proposicionales suelen relacionarse con los denominados operadores lógicos, que gramaticalmente en su mayoría, son partes invariables de la oración. A continuación, se describirán los diferentes operadores lógicos.

Definición 1.5 (Negación)

Sea p una variable proposicional, la negación de p, expresada simbólicamente por $\neg p$, es una nueva variable proposicional, representada por la siguiente tabla de verdad:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Si p es reemplazada por una proposición falsa, $\neg p$ corresponde a una proposición verdadera. Si p es reemplazada por una proposición verdadera, $\neg p$ corresponde a una proposición falsa. Por lo tanto, este operador lógico **cambia el valor de verdad de la proposición**.

Scanned by CamScanner

La negación se presenta con los términos gramaticales: "no", "ni", "no es verdad que", "no es cierto que", "es falso que" y "no se da que".

Ejemplo 1.6 Negación.

Si se tiene la variable proposicional:
p: Tengo un billete de cinco dólares.

La negación de p es:
$\neg p$: No tengo un billete de cinco dólares.

Ejemplo 1.7 Negación.

Si se tiene la variable proposicional:
p: No quiero hacer el viaje.

La negación de p es:
$\neg p$: Quiero hacer el viaje.

Definición 1.6 (Conjunción)

Sean p y q variables proposicionales, la conjunción entre ellas, expresada simbólicamente por $p \wedge q$, es una nueva variable proposicional, representada por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Si las variables proposicionales p y q son reemplazadas por proposiciones verdaderas, la proposición resultante será verdadera.

En español, la conjunción se presenta con los términos gramaticales: "y", "pero", "mas", "también", "sin embargo", "además", "tal como", "no obstante", "aunque", "a la vez", "a pesar que" y signos de puntuación como: la coma, el punto, y, el punto y coma.

Ejemplo 1.8 Conjunción.

Si se tienen las variables proposicionales:
p: Obtengo buenas notas.
q: Gano una beca.

La conjunción entre p y q es:
$p \wedge q$: Obtengo buenas notas y gano una beca.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 1.9 Conjunción.

Si se tienen las variables proposicionales:
p: Trabajo mucho.
q: Recibo un bajo sueldo.

La conjunción entre p y q se puede expresar como:
$p \wedge q$: Trabajo mucho pero recibo un bajo sueldo.

Definición 1.7 (Disyunción)

Sean p y q variables proposicionales, la disyunción entre ellas, expresada simbólicamente por $p \vee q$, es una nueva variable proposicional, representada por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Si las variables proposicionales p y q son reemplazadas por proposiciones falsas, la proposición resultante será falsa.

En español, la disyunción se presenta con el término gramatical "o".

Ejemplo 1.10 Disyunción.

Si se tienen las variables proposicionales:
p: Tengo un libro de Trigonometría.
q: Tengo un libro de Álgebra.

La disyunción entre p y q es:
$p \vee q$: Tengo un libro de Trigonometría o uno de Álgebra.

Como se podrá notar en este ejemplo, existe la posibilidad de poseer ambos libros, razón por la cual esta disyunción recibe el nombre de **disyunción inclusiva.**

En el lenguaje español se presentan situaciones que son mutuamente excluyentes entre sí. La expresión "o soy alto o soy bajo" denota la imposibilidad de ser alto y bajo al mismo tiempo.

Definición 1.8 (Disyunción exclusiva)

Sean p y q variables proposicionales, la disyunción exclusiva entre ellas, expresada simbólicamente por $p \veebar q$, es una nueva variable proposicional, representada por la siguiente tabla de verdad:

Scanned by CamScanner

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Si sólo una de las variables proposicionales p o q es reemplazada por una proposición verdadera, la proposición resultante será verdadera.

En español, la disyunción exclusiva se presenta con el término gramatical "o", "o sólo", "o solamente", "o... , o...". Es importante que el lector distinga cuándo el término gramatical "o" hace referencia a una disyunción inclusiva o exclusiva, según el contexto.

La disyunción exclusiva $p \veebar q$ puede expresarse como:

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

Ejemplo 1.11 Disyunción exclusiva.

Si se tienen las variables proposicionales:

p: Estoy en Quito.

q: Estoy en Guayaquil.

La disyunción exclusiva entre p y q es:

$p \veebar q$: O estoy en Quito o estoy en Guayaquil.

Definición 1.9 (Condicional)

Sean p y q variables proposicionales, la condicional entre p y q, expresada simbólicamente por $p \rightarrow q$, es una nueva variable proposicional, representada por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Si la variable proposicional p es reemplazada por una proposición verdadera y q por una proposición falsa, la proposición resultante será falsa.

Este operador lógico también se denomina **enunciación hipotética** o **implicación**. En la expresión $p \rightarrow q$, p es el antecedente, hipótesis o premisa y q es el consecuente, conclusión o tesis.

En español, la condicional $p \rightarrow q$ se puede encontrar con los siguientes términos gramaticales: "si p, entonces q", "p sólo si q", "p solamente si q", "q si p", "si p, q", "q con la condición de que p", "q cuando p", "q siempre que p", "q cada vez que p", "q ya que p", "q debido a que p", "q dado que p", "q puesto que p", "q porque p", "se tiene q si se tiene p", "sólo si q, p", "q, pues p", "cuando p, q", "los p son q", "p implica q", o cualquier expresión que denote causa y efecto.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 1.12 Condicional.

Si se tienen las variables proposicionales:
p: Juan gana el concurso.
q: Juan dona \$ 10 000.

La condicional entre p y q es:
$p \rightarrow q$: Si Juan gana el concurso, dona \$ 10 000.

Parafraseando la condicional, tenemos:

- Juan gana el concurso sólo si dona \$ 10 000.
- Juan dona \$ 10 000 si gana el concurso.
- Si Juan gana el concurso, entonces dona \$ 10 000.
- Juan dona \$ 10 000 puesto que gana el concurso.
- Juan dona \$ 10 000 debido a que gana el concurso.
- Juan dona \$ 10 000 siempre que gane el concurso.
- Cuando Juan gane el concurso, dona \$ 10 000.
- Juan dona \$ 10 000 porque gana el concurso.

A partir de este ejemplo, nos podemos preguntar: ¿cuándo se quebrantará la promesa de Juan? Esto será únicamente cuando Juan gane el concurso y no done el dinero.

Existen otras expresiones lógicas relacionadas con la condicional $p \rightarrow q$, las cuales se denominan variaciones de la condicional y son: recíproca, inversa y contrarrecíproca (o contrapositiva).

La **Recíproca**, es representada simbólicamente por: $q \rightarrow p$.
La **Inversa**, es representada simbólicamente por: $\neg p \rightarrow \neg q$.
La **Contrarrecíproca**, es representada simbólicamente por: $\neg q \rightarrow \neg p$.

A continuación se muestra la tabla de verdad con las variaciones de la condicional:

				Condicional	Recíproca	Inversa	Contrarrecíproca
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Observe que la condicional y su contrarrecíproca coinciden en sus valores de verdad. Así mismo, existe coincidencia en las columnas de la recíproca y la inversa.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 1.13 Variaciones de la condicional.

A partir de la variable proposicional $p \rightarrow q$:
"Si es un automóvil, entonces es un medio de transporte".

La Recíproca sería:
"Si es un medio de transporte, entonces es un automóvil".

La Inversa sería:
"Si no es un automóvil, entonces no es un medio de transporte".

La Contrarrecíproca sería:
"Si no es un medio de transporte, entonces no es un automóvil".

Note que una condicional puede ser reemplazada por su contrarrecíproca sin que se afecte su valor de verdad, lo cual no se cumple con la recíproca o la inversa. A continuación se verifica este hecho en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.14 Variaciones de la condicional.

A partir de la variable proposicional $p \rightarrow q$:
"Si un número es divisible para 6, entonces es divisible para 3".

La Recíproca sería:
"Si un número es divisible para 3, entonces es divisible para 6".

La Inversa sería:
"Si un número no es divisible para 6, entonces no es divisible para 3".

La Contrarrecíproca sería:
"Si un número no es divisible para 3, entonces no es divisible para 6".

Relacionadas a la enunciación hipotética, surgen las nociones de **condición necesaria** y **condición suficiente**, y puede afirmarse con propiedad que mucha gente tiene integrada estas nociones a su lenguaje cotidiano, tal como se muestra en el siguiente caso.

Ejemplo 1.15 Introducción a las condiciones necesarias y suficientes.

Considere esta variable proposicional verdadera:
"Alimentarse es suficiente para que un ser humano se mantenga vivo".

Si p es **suficiente** para q, quiere decir que p no puede ocurrir sin que deje de ocurrir q; y, se traduce como la condicional $p \rightarrow q$.

Considere la nueva variable proposicional verdadera:
"Alimentarse es necesario para que un ser humano se mantenga vivo".

Si decimos que p es **necesaria** para q, quiere decir que q no puede ocurrir a menos que p ocurra; y, se traduce como la condicional $q \rightarrow p$.

Se concluye que cuando $p \rightarrow q$ es verdadera, se dice que p es **condición suficiente** para q y que q es **condición necesaria** para p.

Scanned by CamScanner

Por otra parte, cuando $q \rightarrow p$ es verdadera, se dice que q es **condición suficiente** para p y que p es **condición necesaria** para q.

Ejemplo 1.16 Condiciones necesarias y suficientes.

Si la siguiente condicional es verdadera:
"Para reservar en el hotel es suficiente entregar los datos del pasaporte".

Se puede parafrasear así:
"Si entregas los datos del pasaporte, entonces te reservan en el hotel".
"Es necesario reservar el hotel como consecuencia de haber entregado los datos del pasaporte".

Si la siguiente condicional es verdadera:
"Llenar el formulario de inscripción es necesario para estar en el curso de capacitación".

Se puede parafrasear así:
"Si estás en el curso de capacitación, llenaste el formulario de inscripción".
"Que estés en el curso de capacitación es suficiente para saber que llenaste el formulario".

Observaciones

- Si la condicional de variables proposicionales es verdadera y su recíproca es falsa, entonces la condición contenida en la hipótesis es suficiente pero no es necesaria para que se cumpla la tesis.
- Si la condicional de variables proposicionales es falsa y su recíproca es verdadera, entonces la condición contenida en la hipótesis es necesaria pero no es suficiente para que se cumpla la tesis.
- Si la condicional de variables proposicionales es verdadera y su recíproca también lo es, entonces la condición contenida en la hipótesis es suficiente y necesaria para que se cumpla la tesis.
- Si la condicional de variables proposicionales y su recíproca son simultáneamente falsas, la condición contenida en la hipótesis no es suficiente ni necesaria para que se cumpla la tesis.

El lector podrá concluir, cuando vaya avanzando en los próximos capítulos, que las siguientes variables proposicionales representan a proposiciones verdaderas:

"Es suficiente que un número sea divisible para 4, para que este número sea divisible para 2".
"Es necesario que un número sea divisible para 3, para que este número sea divisible para 6".
"Para que la norma de un vector sea cero, es necesario que el vector sea nulo".
"Que una matriz sea inversible es suficiente para concluir que esta matriz sea cuadrada".

También tenga presente que para comprender estructuras formales de cursos superiores, será clave identificar las condiciones necesarias y suficientes involucradas.

Scanned by CamScanner

Por otra parte, cuando $q \rightarrow p$ es verdadera, se dice que q es **condición suficiente** para p y que p es **condición necesaria** para q.

Ejemplo 1.16 Condiciones necesarias y suficientes.

Si la siguiente condicional es verdadera:

"Para reservar en el hotel es suficiente entregar los datos del pasaporte".

Se puede parafrasear así:

"Si entregas los datos del pasaporte, entonces te reservan en el hotel".

"Es necesario reservar el hotel como consecuencia de haber entregado los datos del pasaporte".

Si la siguiente condicional es verdadera:

"Llenar el formulario de inscripción es necesario para estar en el curso de capacitación".

Se puede parafrasear así:

"Si estás en el curso de capacitación, llenaste el formulario de inscripción".

"Que estés en el curso de capacitación es suficiente para saber que llenaste el formulario".

Observaciones

- Si la condicional de variables proposicionales es verdadera y su recíproca es falsa, entonces la condición contenida en la hipótesis es suficiente pero no es necesaria para que se cumpla la tesis.
- Si la condicional de variables proposicionales es falsa y su recíproca es verdadera, entonces la condición contenida en la hipótesis es necesaria pero no es suficiente para que se cumpla la tesis.
- Si la condicional de variables proposicionales es verdadera y su recíproca también lo es, entonces la condición contenida en la hipótesis es suficiente y necesaria para que se cumpla la tesis.
- Si la condicional de variables proposicionales y su recíproca son simultáneamente falsas, la condición contenida en la hipótesis no es suficiente ni necesaria para que se cumpla la tesis.

El lector podrá concluir, cuando vaya avanzando en los próximos capítulos, que las siguientes variables proposicionales representan a proposiciones verdaderas:

"Es suficiente que un número sea divisible para 4, para que este número sea divisible para 2".
"Es necesario que un número sea divisible para 3, para que este número sea divisible para 6".
"Para que la norma de un vector sea cero, es necesario que el vector sea nulo".
"Que una matriz sea inversible es suficiente para concluir que esta matriz sea cuadrada".

También tenga presente que para comprender estructuras formales de cursos superiores, será clave identificar las condiciones necesarias y suficientes involucradas.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 1.17 Identificación de condiciones necesarias y suficientes.

Si consideramos que la siguiente variable proposicional es verdadera:

"Si estudias, aprobarás el curso".

Podemos afirmar que es suficiente estudiar para aprobar el curso. Así mismo, es necesario aprobar el curso como consecuencia de haber estudiado.

Ejemplo 1.18 Identificación de condiciones necesarias y suficientes.

Si ahora suponemos que la siguiente variable proposicional es verdadera:

"Aceptaré el trabajo con la condición de que me traten bien".

Podemos afirmar que es suficiente que me traten bien para aceptar el trabajo. Por otra parte, es necesario aceptar el trabajo como consecuencia de que me traten bien.

Definición 1.10 (Bicondicional)

Sean p y q variables proposicionales, la bicondicional entre ellas, expresada simbólicamente por $p \leftrightarrow q$, es una nueva variable proposicional, representada por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Si las variables proposicionales p y q son reemplazadas por proposiciones con el mismo valor de verdad, la proposición resultante será verdadera. Si las variables proposicionales p y q son reemplazadas por proposiciones que tienen diferente valor de verdad, la proposición resultante será falsa.

Este operador lógico también se denomina **doble implicación**.

En español, la bicondicional $p \leftrightarrow q$ se puede encontrar con los siguientes términos gramaticales: "p si y sólo si q", "p si y solamente si q", "p implica q y q implica p", "p cuando y sólo cuando q".

Ejemplo 1.19 Bicondicional.

Dadas las variables proposicionales:

p: Un triángulo es equilátero.

q: Un triángulo es equiángulo.

La bicondicional entre p y q es:

$p \leftrightarrow q$: Un triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo.

Scanned by CamScanner

1.2 Operadores Lógicos

Autoevaluación

1) Sean las variables proposicionales:

p: Vicente tiene hambre.
q: Vicente come un pastel.

Identifique una posible traducción al lenguaje formal para la nueva variable proposicional:

"Vicente come un pastel, dado que tiene hambre".

a) $p \rightarrow q$
b) $q \rightarrow p$
c) $p \wedge q$
d) $q \vee p$
e) $p \leftrightarrow q$

2) Sean las variables proposicionales:

p: Nerea quiere a su hermano Danny.
q: Nerea le compra un helado a su hermano Danny.

a) Traduzca al lenguaje formal la nueva variable proposicional y su contrarrecíproca.

"Nerea quiere a su hermano Danny, por tanto le compra un helado".

,

b) Parafrasee en español alguna de las posibles formas de la contrarrecíproca del literal a).

3) Considere las siguientes variables proposicionales como verdaderas. Identifique y escriba la condición necesaria y la condición suficiente en cada caso:

a) El medicamento es efectivo puesto que las pruebas sugieren mejoría en el 97% de los casos.

Condición Suficiente:

Condición Necesaria:

Scanned by CamScanner

b) Juan y Marcelo aprobarán el curso sólo si estudian la materia lo suficiente.

Condición Suficiente:

Condición Necesaria:

4) Sean:

p: Luis es condescendiente.
q: Luis siembra árboles.
r: Luis fuma en cualquier parte.

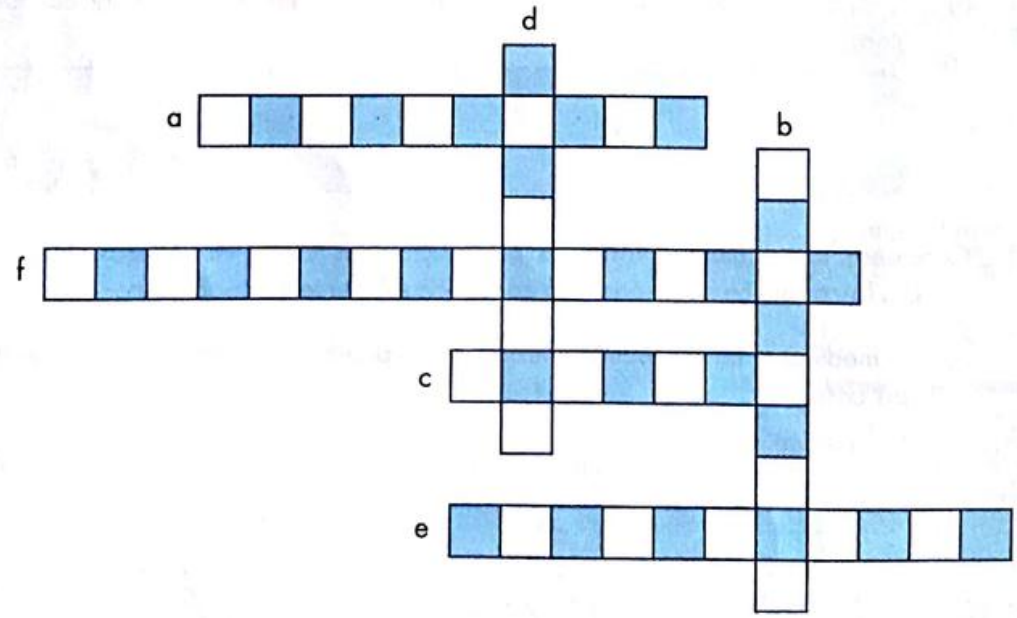
Complete las siguientes variables proposicionales usando una sola vez cada expresión del recuadro:

si	ya que	entonces	pero

$p \rightarrow \neg r$: _____ Luis es condescendiente, _____ no fuma en cualquier parte.
$p \rightarrow q$: Luis siembra árboles _____ es condescendiente.
$q \wedge r$: Luis siembra árboles, _____ fuma en cualquier parte.

5) Resuelva el crucigrama:

a) En una implicación verdadera, al antecedente se lo denomina condición ...
b) En una implicación verdadera, al consecuente se lo denomina condición ...
c) Los operadores ... sirven para conectar variables proposicionales.
d) La ... cambia los valores de verdad de una variable proposicional.
e) La ... establece una relación de causa y efecto entre dos variables proposicionales.
f) $\neg p \rightarrow \neg q$ es la ... de la variable proposicional $q \rightarrow p$.



Scanned by CamScanner

1.3 Clases de proposiciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dado un texto que contenga proposiciones simples y operadores lógicos, representar simbólicamente la proposición compuesta correspondiente.
- Dada una proposición compuesta, determinar su valor de verdad conociendo el valor de verdad de las proposiciones simples que la conforman.
- Dado el valor de verdad de una proposición compuesta, determinar el valor de verdad de las proposiciones simples que la conforman.

Tal como se ha referido, una variable proposicional p puede representar a una sola proposición sin presencia de operador lógico alguno, por ejemplo a; así como a varias proposiciones relacionadas con operadores lógicos, por ejemplo $a \wedge b$, lo cual da paso a la siguiente definición.

Definición 1.11 (Proposiciones simples y compuestas)

Proposiciones simples son aquellas que no poseen operador lógico alguno. Las proposiciones compuestas están formadas por proposiciones simples y operadores lógicos.

Ejemplo 1.20 Traducción al lenguaje simbólico.

Traduzca al lenguaje simbólico la proposición compuesta:

"**Si** Juan José Flores fue el primer presidente del Ecuador, **entonces** Simón Bolívar nació en Guayaquil **y** Quito es conocida como la Sultana de los Andes. Simón Bolívar **no** nació en Guayaquil, **pero** Juan José Flores fue el primer presidente del Ecuador. **Luego**, Quito **no** es conocida como la Sultana de los Andes".

Solución:

Se pueden identificar las siguientes proposiciones simples:

a: Juan José Flores fue el primer presidente del Ecuador.

b: Simón Bolívar nació en Guayaquil.

c: Quito es conocida como la Sultana de los Andes.

Los operadores lógicos que se encuentran presentes en esta proposición compuesta son la condicional, la conjunción y la negación.

La traducción es:

$$[(a \rightarrow (b \wedge c)) \wedge (\neg b \wedge a)] \rightarrow (\neg c)$$

Scanned by CamScanner

Nótese la importancia del uso de los signos de agrupación para preservar la idea original del enunciado.

Ejemplo 1.21 Determinación de valores de verdad.

Bajo la suposición de que los valores de verdad de las proposiciones simples a, b, c y d son respectivamente 0, 0, 1, 1, indique el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $\neg(a \vee b) \rightarrow (c \wedge \neg d)$

b) $\neg(c \leftrightarrow a) \veebar (b \wedge d)$

Solución:

a) $\neg(0 \vee 0) \rightarrow (1 \wedge 0)$
$\neg(0) \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 0$
0

El valor de verdad de esta proposición es falso.

b) $\neg(1 \leftrightarrow 0) \veebar (0 \wedge 1)$
$\neg(0) \veebar 0$
$1 \veebar 0$
1

El valor de verdad de esta proposición es verdadero.

Ejemplo 1.22 Determinación de valores de verdad.

Determine el valor de verdad de las proposiciones simples a, b y c si la proposición compuesta $[(a \wedge \neg b) \rightarrow c]$ es FALSA.

Solución:

El operador principal de esta proposición compuesta es la condicional. Dado que esta implicación tiene un valor de verdad falso únicamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, se obtiene que: $(a \wedge \neg b)$ debe ser verdadero; y, c debe ser falso.

Estos valores lógicos se obtienen si y sólo si a es una proposición verdadera, b es una proposición falsa y c es una proposición falsa, con lo cual quedan determinados los valores de verdad.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 1.23 Determinación de valores de verdad.

Si la proposición compuesta $[(a \wedge b) \wedge (\neg b \rightarrow c)] \rightarrow [(\neg c \vee \neg d) \vee (a \rightarrow \neg d)]$ es FALSA, determine el valor de verdad de cada proposición simple.

Solución:

Para que la condicional de proposiciones planteada sea falsa, el antecedente debe ser una proposición verdadera y el consecuente una proposición falsa.

Se comenzará analizando el consecuente. Para que la disyunción de proposiciones sea falsa, ambas proposiciones deben ser falsas. Por lo tanto, $(\neg c \vee \neg d)$ debe ser falsa y $(a \rightarrow \neg d)$ también.

Como $(\neg c \vee \neg d)$ es falsa, debe cumplirse que $\neg c$ y $\neg d$ sean falsas. Entonces, tanto c como d deben ser verdaderas.

Y como $(a \rightarrow \neg d)$ es falsa, debe cumplirse que a sea verdadera y que $\neg d$ sea falsa. Lo cual verifica que d tiene que ser verdadera.

Ahora se analizará el antecedente. Para que la conjunción de proposiciones sea verdadera, ambas proposiciones deben ser verdaderas.

Como $(a \wedge b)$ es verdadera y ya se había determinado que a era verdadera, entonces b también debe ser verdadera.

Con base en los valores de verdad de b y c, se verifica que $(\neg b \rightarrow c)$ es verdadera.

Se concluye entonces que las cuatro proposiciones a, b, c y d son verdaderas.

Scanned by CamScanner

1) Dadas las siguientes proposiciones verdaderas:

a: David tiene síntomas de dengue.
b: David tiene síntomas de chikungunya.
c: David tiene chikungunya.
d: David tiene dengue.

La traducción al lenguaje formal de la nueva proposición compuesta: "Si David tiene síntomas de dengue, pero tiene síntomas de chikungunya, entonces no tiene dengue ya que tiene chikungunya, o tiene dengue y chikungunya a la vez", es:

$$(a \wedge b) \rightarrow ((c \rightarrow d) \vee (c \wedge d))$$

a) Verdadero
b) Falso

2) Dadas las siguientes proposiciones verdaderas:

a: Emma escucha rock latino.
b: Emma baila salsa.
c: Emma es alegre.

Traduzca literalmente las siguientes proposiciones compuestas:

a) $b \wedge c \wedge a$

b) $(b \wedge a) \rightarrow c$

c) $a \rightarrow (\neg c \wedge \neg b)$

Scanned by CamScanner

3) Considerando que los valores de verdad de las proposiciones simples a, b, c, d corresponden a 0, 0, 1, 0, respectivamente, determine el valor de verdad de las proposiciones compuestas:

a) $\neg(b \veebar (c \rightarrow d))$

b) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c)$

c) $((a \wedge b) \vee c) \leftrightarrow (a \wedge (b \vee c))$

d) $[(d \veebar b) \wedge (b \wedge (a \rightarrow c))] \rightarrow c$

4) Determine los valores de verdad de las proposiciones simples a, b, c, d sabiendo que la siguiente proposición compuesta es falsa.

$$[(d \veebar b) \wedge (b \wedge (a \rightarrow c))] \rightarrow c$$

5) Si se conoce que $(\neg b \wedge a) \vee (b \rightarrow c)$ es una proposición falsa, ¿se puede definir con certeza el valor de verdad de la proposición a? Explique.

Scanned by CamScanner

1.4 Estructuras con variables proposicionales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una forma proposicional, construir la tabla de verdad que la describe.
- Reconocer los diferentes tipos de formas proposicionales.
- Identificar implicaciones y equivalencias lógicas.

Con frecuencia, en el lenguaje formal existen expresiones lógicas que contienen dos o más variables proposicionales, las cuales se analizarán a continuación.

Definición 1.12 (Formas proposicionales)

Se denominan formas proposicionales a las estructuras constituidas por variables proposicionales y los operadores lógicos que las relacionan.

Estas formas proposicionales se suelen representar con las letras mayúsculas del alfabeto español A, B, C, ...

Observaciones

- Si cada variable proposicional incluida en la forma proposicional es reemplazada por una proposición simple o compuesta, entonces dicha forma proposicional se convierte en una proposición. De esta manera, la forma proposicional puede representar a proposiciones verdaderas o falsas.

- Si reemplazamos a las variables proposicionales por proposiciones verdaderas o falsas, el número de proposiciones que se generan es 2^n, siendo n el número de variables proposicionales.

- Las formas proposicionales pueden ser relacionadas con operadores lógicos para estructurar nuevas formas proposicionales. Dadas A y B, los símbolos $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \veebar B$, $A \rightarrow B$ y $A \leftrightarrow B$ representan nuevas formas proposicionales.

Ejemplo 1.24 Tabla de verdad de una forma proposicional.

Dada la siguiente forma proposicional:

$$A: [(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg p)] \wedge r$$

Debido a la presencia de las 3 variables proposicionales p, q y r, existirán 2^3, es decir, 8 proposiciones posibles en la tabla de verdad de A.

Scanned by CamScanner

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg p$	$r \vee \neg p$	$[(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg p)]$	A
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1

Cuando las variables proposicionales p, q y r son remplazadas por proposiciones con los valores de verdad 1, 0 y 1, respectivamente, se puede apreciar que la proposición resultante es verdadera.

Definición 1.13 (Tautología, Contradicción, Contingencia)

Dada la estructura lógica de una forma proposicional:

- Si se tienen solamente proposiciones verdaderas para todos los valores de verdad de las variables proposicionales, se dice que es una TAUTOLOGÍA.
- Si se tienen solamente proposiciones falsas para todos los valores de verdad de las variables proposicionales, se dice que es una CONTRADICCIÓN.
- Si se tiene al menos una proposición con un valor de verdad que difiere del resto para todos los valores de verdad de las variables proposicionales, se dice que es una CONTINGENCIA.

Partiendo de estas definiciones, la forma proposicional A del ejemplo anterior constituye una contingencia. Adicionalmente, el lector puede apreciar en la siguiente tabla que la forma proposicional B: $p \vee \neg p$ es una tautología; y, la forma proposicional C: $p \wedge \neg p$ es una contradicción:

p	$\neg p$	B: $p \vee \neg p$	C: $p \wedge \neg p$
0	1	1	0
1	0	1	0

Para las siguientes secciones, cuando nos propongamos realizar demostraciones y análisis de estructuras lógicas, será conveniente saber distinguir entre los diferentes tipos de formas proposicionales.

Scanned by CamScanner

Definición 1.14 (Implicación Lógica)

Sean A y B dos formas proposicionales, se dice que A implica lógicamente a B, denotado por $A \Rightarrow B$, si y sólo si $A \rightarrow B$ es una tautología.

Ejemplo 1.25 Implicación Lógica.

La forma proposicional tautológica A: $p \Rightarrow (q \rightarrow p)$, se puede traducir al lenguaje común como: "si se tiene p, entonces se seguirá teniendo p ya que se tiene q".

p	q	$q \rightarrow p$	A
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Ejemplo 1.26 Implicación Lógica.

La forma proposicional tautológica B: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$, se puede traducir al lenguaje común como "si cada vez que se tiene p se tiene q y cada vez que se tiene q se tiene r, entonces cada vez que se tiene p se tiene r".

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	B
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Definición 1.15 (Equivalencia Lógica)

Sean A y B dos formas proposicionales, se dice que A es equivalente lógicamente a B, denotado por $A \Leftrightarrow B$, si y sólo si $A \leftrightarrow B$ es una tautología.

Cuando se requiere sustituir una estructura por otra que sea equivalente, alternativamente el símbolo $\Leftrightarrow$ se lo reemplaza por $\equiv$.

Ejemplo 1.27 Equivalencia Lógica.

La forma proposicional C: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$, se puede traducir al lenguaje común como "cada vez que se tiene p, se tiene q, si y sólo si cuando no se tiene q, entonces no se tiene p".

Scanned by CamScanner

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	C
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Ejemplo 1.28 Equivalencia Lógica.

La forma proposicional D: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, se puede traducir al lenguaje común como "no es cierto que se tiene p o q es lógicamente equivalente a ni se tiene p, ni se tiene q".

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	D
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

Ejemplo 1.29 Equivalencia Lógica.

Si la forma proposicional $f(p, q, r, s)$ es una contradicción, entonces es VERDAD que:

a) $f(1, 1, 0, 0) \leftrightarrow f(0, 0, 1, 1) \equiv 1$
b) $f(1, 1, 1, 1) \rightarrow f(0, 0, 0, 0) \equiv 0$
c) $f(0, 1, 0, 1) \veebar f(1, 0, 1, 0) \equiv 1$
d) $f(1, 1, 1, 0) \wedge f(0, 0, 0, 1) \equiv 1$
e) $f(0, 0, 0, 0) \vee f(1, 1, 1, 1) \equiv 1$

Solución:

Si $f(p, q, r, s)$ es una contradicción, entonces $f(p, q, r, s) \equiv 0$

a) Es verdadero, porque $0 \leftrightarrow 0 \equiv 1$
b) Es falso, porque $0 \rightarrow 0 \equiv 1$
c) Es falso, porque $0 \veebar 0 \equiv 0$
d) Es falso, porque $0 \wedge 0 \equiv 0$
e) Es falso, porque $0 \vee 0 \equiv 0$

Por lo tanto, la respuesta correcta es el literal a).

Scanned by CamScanner

1) Mediante una tabla de verdad, verifique que la siguiente forma proposicional es una contingencia.

$$(\neg p \rightarrow q) \vee (q \wedge p)$$

p	q	$\neg p$	A: $\neg p \rightarrow q$	B: $q \wedge p$	A∨B

2) Tomando en cuenta las formas proposicionales A y B, definidas anteriormente, construya la tabla de verdad para: ¬A∨B y A∨¬B. Luego de esto, escriba en términos de las variables p y q la forma proposicional tautológica.

A	B	¬A	¬B	C: ¬A∨B	D: A∨¬B

Forma proposicional tautológica:

3) Considere las proposiciones a, b, c con sus respectivos valores de verdad 1, 0, 1. Complete con los operadores del recuadro para que se cumpla la equivalencia lógica usando cada uno, una sola vez.

¬	∧	⊻	→

a) $\square\ a \equiv 0$

b) $\neg (a \square c) \equiv 1$

c) $a \square (b \wedge c) \equiv 0$

d) $[\neg (a \vee b)] \square c \equiv 0$

Scanned by CamScanner

4) Considere la variable proposicional p y la forma proposicional A: $f(p, q)$. Verifique que la nueva forma proposicional B: $[(p \wedge A) \rightarrow p]$ es una tautología. Adicionalmente, asigne una proposición simple a la variable proposicional p y una proposición compuesta a la forma proposicional A. Luego, parafrasee la proposición compuesta resultante.

p	A	$p \wedge A$	$(p \wedge A) \rightarrow p$

Complete:

p:

A:

B:

5) Considere que $f(p, q, r, s)$ es una forma proposicional de cuatro variables. Analice cada proposición e indique cuál es verdadera.

a) Si $f(p, q, r, s)$ es tautológica, entonces $f(0, 0, 0, 1)$ es una proposición falsa.

b) Si $f(1, 1, 1, 0)$ es una proposición falsa, la forma proposicional $f(p, q, r, s)$ es una contradicción.

c) Si la forma proposicional $f(p, q, r, s)$ es una contingencia y la proposición a es falsa, entonces la proposición compuesta $(f(0, 1, 0, 1) \vee \neg a)$ es verdadera.

Scanned by CamScanner

1.5 Propiedades de los operadores lógicos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Emplear propiedades de los operadores lógicos para modificar estructuras lógicas.
- Dada una propiedad de los operadores lógicos, demostrarla empleando tablas de verdad y otras propiedades.

Las operaciones lógicas definidas entre las formas proposicionales y algunas de sus más importantes propiedades se incluyen en las denominadas Leyes del Álgebra Proposicional o Leyes Lógicas. A continuación se presentan las de uso más frecuente:

CONJUNCIÓN		DISYUNCIÓN
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$	Conmutativa	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
$[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$	Asociativa	$[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
$(p \wedge p) \equiv p$	Idempotencia	$(p \vee p) \equiv p$
$(p \wedge 1) \equiv p$	Identidad	$(p \vee 0) \equiv p$
$(p \wedge 0) \equiv 0$	Absorción	$(p \vee 1) \equiv 1$

Cuadro 1.1: Leyes de los Operadores Fundamentales Conjunción y Disyunción.

$\neg 0 \equiv 1$ $\neg 1 \equiv 0$	Negación
$\neg(\neg p) \equiv p$	Doble Negación o Involutiva
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$ $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$	De Morgan
$(p \vee \neg p) \equiv 1$	Tercero Excluido
$(p \wedge \neg p) \equiv 0$	Contradicción
$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$	Contrapositiva o Contrarrecíproca
$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ $(\neg p \rightarrow q) \equiv (p \vee q)$ $\neg(p \rightarrow \neg q) \equiv (p \wedge q)$	Implicación
$[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$	Exportación
$(p \rightarrow q) \equiv [(p \wedge \neg q) \rightarrow 0]$	Reducción al Absurdo
$(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$	Equivalencia

Cuadro 1.2: Leyes de los Operadores Negación, Condicional y Bicondicional.

Scanned by CamScanner

FORMA SIMBÓLICA	TAUTOLOGÍA
$p \Rightarrow p$	Trivial
$p \Rightarrow (p \vee q)$	Adición
$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Simplificación
$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$	Modus Ponendo Ponens Suposición del Antecedente
$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$	Modus Tolendo Tollens Negación del Consecuente
$[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \Rightarrow q$	Silogismo Disyuntivo
$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$ $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$	Dilemas Constructivos
$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$ $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$	Transitividad o Silogismo Hipotético

Cuadro 1.3: Leyes de las Implicaciones Lógicas.

Para demostrar estas propiedades u otras, se pueden emplear tablas de verdad o utilizar algunas de las propiedades más elementales, como se verá a continuación en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.30 Demostración de propiedades de los operadores lógicos.

Si se requiere demostrar la equivalencia lógica: $[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ se puede emplear tablas de verdad o propiedades de los operadores lógicos.

Solución:

Empleando **tablas de verdad**, se construyen las respectivas combinaciones para las variables proposicionales involucradas en la forma proposicional. Para el efecto se denominará A: $[(p \wedge q) \rightarrow r]$, B: $[p \rightarrow (q \rightarrow r)]$, tal como se muestra en la siguiente tabla:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	A↔B
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Puesto que $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ es una tautología, se concluye que existe una equivalencia lógica entre estas dos formas proposicionales, con lo cual se obtiene la demostración requerida.

Scanned by CamScanner

Empleando **propiedades de los operadores lógicos**, se debe transformar la estructura de una de las formas proposicionales (o de ambas) hasta establecer la equivalencia lógica requerida. En este ejemplo se trabajará sobre la forma proposicional A, hasta obtener la estructura de la segunda.

$[(p\wedge q)\rightarrow r] \equiv [\neg(p\wedge q)\vee r]$	Ley de la Implicación
$\equiv [(\neg p\vee\neg q)\vee r]$	Ley de De Morgan de la Conjunción
$\equiv [\neg p\vee(\neg q\vee r)]$	Ley Asociativa de la Disyunción
$\equiv [\neg p\vee(q\rightarrow r)]$	Ley de la Implicación
$[(p\wedge q)\rightarrow r] \equiv [p\rightarrow(q\rightarrow r)]$	Ley de la Implicación

Con esto se concluye que las dos formas proposicionales son equivalentes entre sí.

Las propiedades de los operadores lógicos también son útiles cuando se requiere expresar ideas o enunciados de una forma inequívoca y precisa.

Ejemplo 1.31 Aplicación de propiedades de los operadores lógicos.

Considere las siguientes variables proposicionales:

p: El clima es propicio.
q: La tierra es fértil.
r: La flor crecerá.

Se quiere negar la forma proposicional:

"Si el clima es propicio y la tierra es fértil, la flor crecerá".

Solución:

La traducción del enunciado original es: $(p\wedge q)\rightarrow r$

La negación de la forma proposicional anterior es: $\neg[(p\wedge q)\rightarrow r]$

$\neg[\neg(p\wedge q)\vee r]$	Ley de la Implicación
$\neg[\neg(p\wedge q)]\wedge\neg r$	Ley de De Morgan de la Disyunción
$(p\wedge q)\wedge\neg r$	Ley de la Doble Negación
$q\wedge\neg r\wedge p$	Ley Conmutativa de la Conjunción

Por lo tanto, la negación de la forma proposicional podrá expresarse con cualquiera de las siguientes frases equivalentes:

"El clima es propicio y la tierra es fértil, pero la flor no crecerá".
"La tierra es fértil, la flor no crecerá y el clima es propicio".

Aunque al lector le agrade una de ellas más que la otra, desde el punto de vista lógico, las dos representan la negación del enunciado original.

Scanned by CamScanner

1.5 Propiedades de los operadores lógicos

Autoevaluación

1) Haciendo uso de las propiedades de los operadores lógicos, determine cuál de las siguientes formas proposicionales no es tautológica:

a) $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \vee q)$

b) $(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

c) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$

2) Usando álgebra proposicional, determine cuál de las siguientes formas proposicionales representa una tautología:

a) $(p \vee q) \rightarrow p$

b) $p \rightarrow [p \vee (q \vee \neg p)]$

c) $(\neg q \vee q) \rightarrow (\neg (p \rightarrow p))$

Scanned by CamScanner

3) En la siguiente demostración, escriba el nombre de la propiedad usada en cada fila de la tabla presentada:

	$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$	
F_1	$\neg q \wedge (\neg p \vee q)$	
F_2	$(\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)$	
F_3	$(\neg q \wedge \neg p) \vee 0$	
F_4	$(\neg q \wedge \neg p)$	
F_5	$(\neg p \wedge \neg q)$	
F_6	$(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$	

4) La forma proposicional $(p \wedge q) \vee [(\neg q \vee p) \rightarrow q]$ es:

a) Una contradicción.

b) Una tautología.

c) Lógicamente equivalente a q.

d) Lógicamente equivalente a p.

e) Lógicamente equivalente a $(p \vee q)$.

5) Dada la siguiente forma proposicional:

"Cocino en 30 minutos, cada vez que estoy de buen humor o tengo apuro".

Identifique entre las siguientes, aquella que sea equivalente:

a) Cocino en 30 minutos, entonces tengo apuro o estoy de buen humor.

b) Es falso que estoy de buen humor o tengo apuro, debido a que cocino en 30 minutos.

c) No tengo apuro y no estoy de buen humor, o cocino en 30 minutos.

Scanned by CamScanner

1 | *Lógica*

1.6 Razonamientos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Reconocer la estructura de un razonamiento.
- Dado un razonamiento, establecer su validez empleando tablas de verdad, Leyes del Álgebra de Proposiciones o supuestos en su estructura lógica.

Definición 1.16 (Razonamiento)

Es una forma proposicional cuya estructura consta de la conjunción de premisas o hipótesis, la condicional como operador lógico principal; y, una conclusión.

Así, la conjunción de las premisas o hipótesis corresponde al antecedente de la implicación, mientras que la conclusión es su consecuente.

$$\underbrace{[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \ldots \wedge H_n]}_{\text{Conjunción de hipótesis}} \quad \underbrace{\rightarrow}_{\text{Condicional}} \quad \underbrace{C}_{\text{Conclusión}}$$

ANTECEDENTE — OPERADOR LÓGICO — CONSECUENTE

La lógica simbólica se ocupa de analizar la validez de los razonamientos; no nos puede decir si la información contenida en una hipótesis es verdadera o falsa. Los términos válido y no válido se refieren a la estructura del razonamiento, no a la veracidad o falsedad asociada a las variables proposicionales.

El punto importante a recordar es que la veracidad o falsedad de las premisas y la conclusión, no determinan la validez del razonamiento.

Definición 1.17 (Validez de un razonamiento)

Un razonamiento es válido cuando su forma proposicional es tautológica. Si dicha forma proposicional es una contradicción o contingencia, entonces el razonamiento no es válido, en cuyo caso se denomina falacia.

Ejemplo 1.32 Determinación de la validez de un razonamiento.

Determine si el siguiente razonamiento es válido:

"Si Pablo recibió el e-mail, entonces tomó el avión y estará aquí al mediodía. Pablo no tomó el avión. Luego, Pablo no recibió el e-mail".

Scanned by CamScanner

Si R es la forma proposicional de un razonamiento, ésta puede representarse como $R: A \rightarrow C$, la cual incluye a la forma proposicional A como antecedente y a C como consecuente de la implicación.

Siendo así, una alternativa interesante para analizar la validez de cualquier razonamiento podría fundamentarse en el caso particular de que C sea una contradicción y a partir de este supuesto, verificar que A es tautológica, lo cual permitiría concluir que se trata de una falacia. Si por el contrario, siendo C una contradicción, A no es una tautología, el razonamiento será definitivamente válido. Esta alternativa se aplica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.34 Determinación de la validez de un razonamiento.

"Si un virus es pandémico, causa la muerte de muchas personas en el mundo. Cuando un virus causa la muerte de muchas personas en el mundo, se adoptan medidas estrictas de control. Por lo tanto, un virus es pandémico sólo si se adoptan medidas estrictas de control".

Solución:

Identificando las variables proposicionales, que representan a proposiciones simples, se tiene:

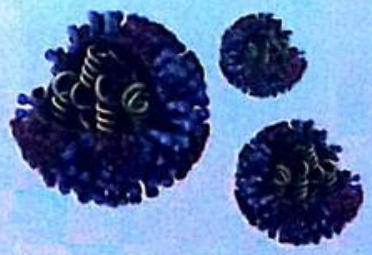
p: Un virus es pandémico.
q: Un virus causa la muerte de muchas personas en el mundo.
r: Se adoptan medidas estrictas de control.

Luego, se identifican las hipótesis y la conclusión:

$H_1 : p \rightarrow q$
$H_2 : q \rightarrow r$
$C : p \rightarrow r$

Siendo así, la estructura lógica del razonamiento sería:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$



Utilizando la alternativa propuesta, se tendría que:

$$(p \rightarrow r) \equiv 0$$

Con lo cual $p \equiv 1$ y $r \equiv 0$

A partir de estos resultados, el antecedente sería:

$$[(1 \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow 0)]$$

Si $q \equiv 0$ o $q \equiv 1$, la forma proposicional anterior constituye una contradicción, generándose en la estructura del razonamiento una implicación del tipo:

$$0 \rightarrow 0$$

Concluyéndose que la forma proposicional es tautológica, es decir, que el razonamiento es válido.

Scanned by CamScanner

1 | Lógica

1.6 Razonamientos

Autoevaluación

1) Coloque 1 si la proposición es verdadera y 0 si es falsa.

a) Un razonamiento puede conformarse de una sola proposición simple. ☐

b) Un razonamiento siempre tiene implícita una relación condicional. ☐

c) La forma proposicional $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ representa un razonamiento. ☐

d) Un razonamiento es válido cuando la forma proposicional que lo representa es una tautología. ☐

e) Considérese la forma proposicional R: $f(p, q, r)$ que representa un razonamiento. Suponga que existe un único caso tal que $R \equiv 0$, entonces puede obviarse ese único caso y decir que el razonamiento es válido. ☐

2) Para el razonamiento $(H_1 \wedge H_2) \rightarrow C$, en el cual:

H_1: Acepto este trabajo o no estudio. H_2: Si realizo mis sueños, entonces estudio.

Una conclusión C que hace válido este razonamiento es:

a) No estudio o no acepto este trabajo.

b) Si estudio, entonces acepto este trabajo.

c) Estudio si no acepto este trabajo.

d) Acepto este trabajo solamente si realizo mis sueños.

Scanned by CamScanner

3) Determine qué hipótesis (H_1 o H_2) debe colocarse en el paréntesis para que la forma proposicional R corresponda a un razonamiento válido. Justifique su respuesta.

H_1: Mario cierra la llave de la tubería si no se daña.

H_2: Mario no cierra la llave de la tubería si se daña.

H_3: La tubería no se daña.

C: Mario cierra la llave de la tubería.

R: [( )∧(H_3)]→C

4) Dados los razonamientos cuyas formas proposicionales son:

R_1: $[(p \wedge q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

R_2: $q \rightarrow (p \rightarrow q)$

Es VERDAD que:

a) R_1 representa un razonamiento no válido y R_2, un razonamiento válido.

b) R_1 y R_2 representan falacias.

c) R_1 representa un razonamiento válido y R_2, un razonamiento no válido.

d) R_1 y R_2 representan razonamientos válidos.

Scanned by CamScanner

1 | *Lógica*

1.7 Demostraciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Aplicar las propiedades y el álgebra de las proposiciones para realizar demostraciones lógicas, empleando técnicas directas, técnicas de contraposición, contraejemplos y reducción al absurdo.

En matemáticas, a menudo nos ocupamos de la demostración lógica de ciertas afirmaciones. Cualquier sistema lógico debe empezar con algunos términos fundamentales, definiciones, y axiomas o postulados. A partir de ello, se pueden deducir por razonamientos válidos otras afirmaciones. Para llegar a demostrar algo, es necesario justificar cada paso de la demostración de manera lógica.

1.7.1 Demostraciones directas

Si queremos demostrar que $p \rightarrow q$, examinamos los elementos que aparecen en p; y, con la atención puesta en q, intentamos deducir q a partir de una secuencia de pasos lógicos que comience en p y termine en q.

Este tipo de demostración también se conoce como "marcha adelante".

Ejemplo 1.35 Demostración directa.

Demostrar la Ley del MODUS PONENDO PONENS $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ utilizando el método de demostración directa.

Solución:

p.d. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow [(\neg p \vee q) \wedge p]$	Ley de Implicación
$[(\neg p \vee q) \wedge p] \Rightarrow [(\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)]$	Ley Distributiva
$[(\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p)] \Rightarrow [0 \vee (q \wedge p)]$	Ley de la Contradicción
$[0 \vee (q \wedge p)] \Rightarrow (q \wedge p)$	Ley de Identidad de la Disyunción
$(q \wedge p) \Rightarrow q$	Ley de Simplificación

Con lo cual queda demostrado que a partir del antecedente de la implicación lógica, es posible obtener el consecuente dado.

Scanned by CamScanner

1.7.2 Demostraciones por contraposición (o contrarrecíproca)

Este tipo de demostración es conocido como "supongamos que no". Está basada en la Ley Contrapositiva o Contrarrecíproca, es decir, si a partir de p se obtiene q, esto será equivalente a que si no se tiene q, no se tendrá p. Siendo así, se iniciará el proceso demostrativo con la negación de q y se aplicarán los pasos que fueren necesarios hasta culminar con la negación de p.

Ejemplo 1.36 Demostración por contrarrecíproca.

Demostrar la Ley de ADICIÓN $p \Rightarrow (p \vee q)$, utilizando el método de demostración por contrarrecíproca.

Solución:

Aplicando la contrarrecíproca a la Ley de Adición, se tiene la siguiente forma proposicional: $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p$

p.d. $\neg(p \vee q) \Rightarrow \neg p$

$\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	Ley de De Morgan
$(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$	Ley de Simplificación

Con lo cual queda demostrado que a partir de la negación del consecuente de la implicación lógica, fue posible obtener la negación de su antecedente.

1.7.3 Demostraciones por contraejemplo

Dar un ejemplo o mil, que ilustren una proposición, no demuestra que ésta sea verdadera. Sin embargo, sí podemos demostrar el hecho de que la proposición sea falsa, aportando por lo menos un ejemplo que lo confirme. Dicho ejemplo recibe el nombre de contraejemplo.

El contraejemplo pone en evidencia que existe al menos un caso en el cual la proposición no es verdadera.

Ejemplo 1.37 Demostración por contraejemplo.

Verifique si la siguiente proposición es verdadera:
"La suma de dos números de un solo dígito, es otro número de un solo dígito".

Solución:

A partir de esta proposición se podrá suponer, erróneamente y partiendo de una observación limitada, que al sumar dos números de un solo dígito, por ejemplo, $3+4, 1+5, 6+2$, siempre se obtiene otro número de un solo dígito, es decir, otro número correspondiente al sistema de numeración decimal. Sin embargo, podemos notar que al sumar $8+3$, el resultado es 11, número constituido por dos dígitos y no solamente por uno como lo enuncia la proposición dada. Es más, no es el único caso, pues se pueden sumar los números $6+7, 4+9, 5+8$, obteniéndose en cada caso números conformados por dos dígitos. Cualquiera de estos casos que no satisfacen la proposición dada, constituye un contraejemplo, evidenciándose que la misma es falsa.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 1.38 Demostración por contraejemplo.

Verifique si la siguiente proposición es verdadera:

"Las ciudades del Ecuador son capitales de provincias".

Solución:

Si leemos rápidamente y sin mayor análisis la referida proposición, podríamos concluir que su valor de verdad es verdadero, ya que Guayaquil, Portoviejo, Machala, Quito, entre otras, son ciudades y capitales de provincias.

Por otra parte, Quevedo es una ciudad y no es capital de provincia alguna de nuestro país, lo mismo ocurre con ciudades como Manta, Atacames y Milagro, constituyéndose por ende, en contraejemplos para la proposición objeto de estudio, la cual definitivamente es falsa.

1.7.4 Demostraciones por reducción al absurdo

Esta demostración se basa en que si a partir de p se obtiene q, esto será equivalente a decir que la implicación cuyo antecedente está dado por la conjunción entre p y la negación de q, tendrá siempre un consecuente falso.

Ilustraremos este tipo de demostración, analizando la validez del razonamiento en el siguiente ejemplo.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 1.39 Demostración por reducción al absurdo.

Demuestre, por reducción al absurdo, que el siguiente razonamiento es válido: "Si llueve, hay cosecha. Se inundan los sembríos. Luego, no llueve o hay cosecha".

Solución:

Se identifican las variables proposicionales presentes que representan a proposiciones simples:

p: Llueve.
q: Hay cosecha.
r: Se inundan los sembríos.

Las hipótesis y la conclusión son:

$H_1: p \rightarrow q$
$H_2: r$
$C: \neg p \vee q$

La forma proposicional del razonamiento será:

$R: [H_1 \wedge H_2] \rightarrow C$
$R: [(p \rightarrow q) \wedge r] \rightarrow (\neg p \vee q)$

Puesto que el razonamiento es válido, su forma proposicional será tautológica y para su demostración haremos uso de la Ley de reducción al absurdo.

Aplicando la Ley de reducción al absurdo se tiene la siguiente forma proposicional:

$\{[(p \rightarrow q) \wedge r] \wedge \neg(\neg p \vee q)\} \rightarrow 0$

$\equiv \{[(\neg p \vee q) \wedge r] \wedge (p \wedge \neg q)\} \rightarrow 0$ Leyes de Implicación y de De Morgan.

$\equiv \{[(\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \wedge (p \wedge \neg q)\} \rightarrow 0$ Ley Distributiva.

$\equiv \{[(\neg p \wedge r) \wedge (p \wedge \neg q)] \vee [(q \wedge r) \wedge (p \wedge \neg q)]\} \rightarrow 0$ Ley Distributiva.

$\equiv \{[(\neg p \wedge p) \wedge (r \wedge \neg q)] \vee [(q \wedge \neg q) \wedge (r \wedge p)]\} \rightarrow 0$ Ley Asociativa de la Conjunción.

$\equiv \{[0 \wedge (r \wedge \neg q)] \vee [0 \wedge (r \wedge p)]\} \rightarrow 0$ Ley de la Contradicción.

$\equiv (0 \vee 0) \rightarrow 0$ Ley de Absorción de la Conjunción.

$\equiv 0 \rightarrow 0$ Definición de Disyunción.

$\equiv 1$ Definición de Implicación.

Scanned by CamScanner

1.7 Demostraciones

Autoevaluación

1) Escriba con sus propias palabras, una breve explicación de cómo emplear los siguientes métodos de demostración lógica:

Demostración directa:

Demostración por contraposición:

Demostración por reducción al absurdo:

Demostración por contraejemplo:

2) Escriba un contraejemplo para cada proposición FALSA presentada a continuación:

a) Las palabras graves siempre llevan tilde.

b) Todas las ciudades del Ecuador se encuentran en la región Costa.

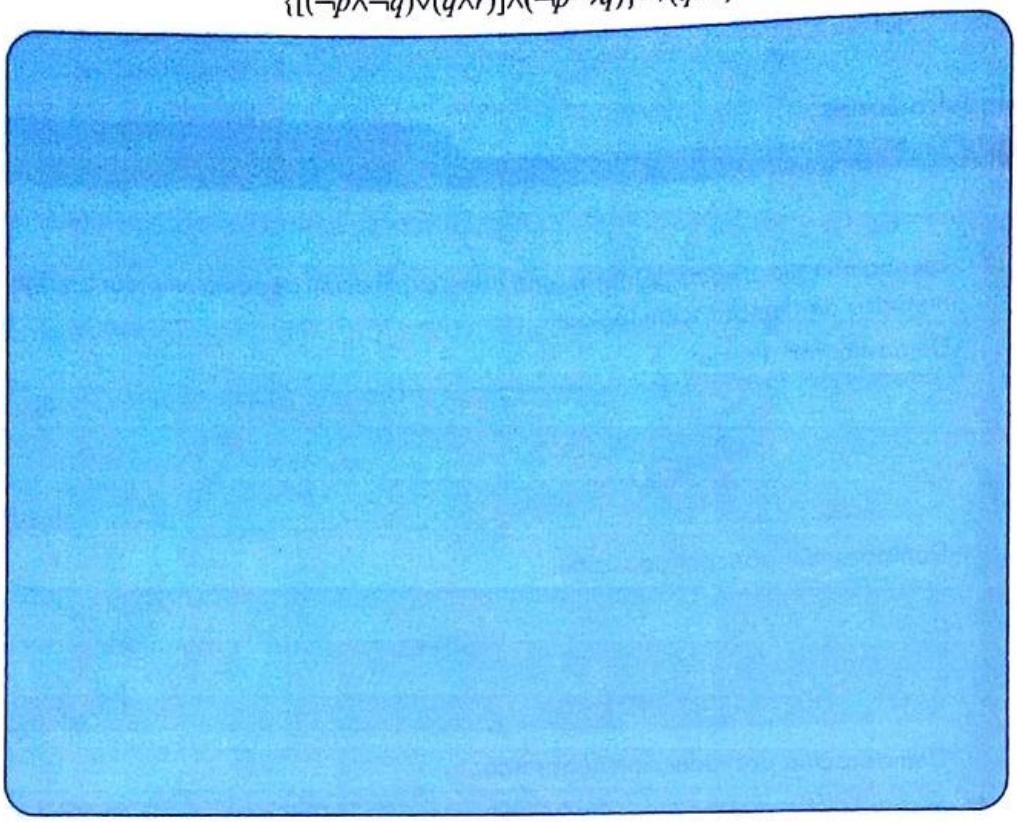
c) Siempre que se lanza una moneda al aire se obtiene "cara".

d) No existen cultivos de banano en el Ecuador.

Scanned by CamScanner

3) Pruebe por demostración directa que la forma proposicional dada es tautológica.

$$\{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)] \wedge (\neg p \rightarrow q)\} \Rightarrow (q \wedge r)$$



4) Observe el procedimiento presentado a continuación y marque con una **X** la fila que contenga algún error con respecto a la línea anterior. Escriba una corta descripción del error cometido.

$\{[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)] \wedge (\neg p \rightarrow q)\} \Rightarrow (q \wedge r)$			
	F_1	$[(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge r)] \wedge (\neg p \rightarrow q)$	
	F_2	$[\neg(p \vee q) \vee (q \wedge r)] \wedge (p \vee q)$	
	F_3	$\neg(p \vee q) \wedge (p \vee q) \vee (q \wedge r)$	
	F_4	$[\neg(p \vee q) \wedge (p \vee q)] \vee (q \wedge r)$	
	F_5	$\neg[(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)] \vee (q \wedge r)$	
	F_6	$\neg 0 \vee (q \wedge r)$	
	F_7	$1 \vee (q \wedge r)$	
	F_8	$(q \wedge r)$	

Scanned by CamScanner

Respuesta al desafío

Se sabe que hay dos sombreros blancos y tres sombreros rojos; y, se seleccionan tres de ellos. La tercera chica puede ver el color del sombrero de las dos chicas que tiene delante y se puede basar en las combinaciones indicadas en la siguiente tabla:

Primera chica	Segunda chica
Blanco	Blanco
Blanco	Rojo
Rojo	Blanco
Rojo	Rojo

Si la tercera chica viera que las otras tienen sombrero blanco, ella debería concluir que tiene un sombrero rojo, pero ella manifestó "no puedo". Lo cual quiere decir que es necesario que ambas no tengan sombrero blanco, para que ella llegue a la conclusión que "no puede", pues lo que ve no es suficiente para que ella pueda concluir de otra forma.

La segunda chica puede ver el color del sombrero de la única chica que tiene delante y se puede basar en la misma tabla:

Primera chica	Segunda chica
Blanco	Blanco
Blanco	Rojo
Rojo	Blanco
Rojo	Rojo

Opción ya descartada

Para que la segunda chica concluya que "tampoco puede", la primera no debería tener un sombrero blanco, porque si así fuera, eso sería condición suficiente para que concluya que su sombrero sea rojo.

La primera chica entonces concluirá que su sombrero es rojo, basándose en lo ya expresado por las otras dos. Observe la tabla con las posibilidades que ella analizó.

Opción ya descartada
Opción ya descartada

Primera chica	Segunda chica
Blanco	Blanco
Blanco	Rojo
Rojo	Blanco
Rojo	Rojo

Scanned by CamScanner

Ejercicios Propuestos

1.1 Proposiciones ● ● ● • •

1) ¿Qué es una proposición?

2) ¿Qué valores de verdad puede tomar una proposición?, cite un ejemplo en cada caso.

3) Defina tabla de verdad y muestre un ejemplo de tablas de verdad para 3 variables proposicionales.

4) Identifique si cada enunciado es o no es una proposición, justificando su respuesta.

   a) 7 es un número primo.
   b) El color rojo es bonito.
   c) Los números divisibles para 5 terminan en los dígitos 0 o 5.
   d) $x + 1 = 5$
   e) ¡Eres pilas!
   f) La esperanza es lo último que se pierde.
   g) El número 36 es par.
   h) El fútbol es divertido.
   i) Juan es profesor de matemáticas.
   j) ¡Auxilio!

5) Dados los siguientes enunciados:

   I) Disminuya la velocidad.
   II) $10 - 8 = 1$
   III) Mi banca es gris.
   IV) Espero que estés bien.

   Identifique la proposición VERDADERA:

   a) I y II no son proposiciones.
   b) I y II son proposiciones.
   c) I y IV son proposiciones.
   d) II y III son proposiciones.
   e) Todas son proposiciones.

6) Identifique la proposición FALSA:

   a) Quito es capital de Colombia.
   b) Santa Elena es una provincia de la región Litoral del Ecuador.
   c) La mitad del mundo está situada en la región interandina.
   d) La independencia de Cuenca se celebra en el mes de noviembre.
   e) Santiago de Chile es la capital de Chile.

Scanned by CamScanner

7) Identifique las variables proposicionales del siguiente extracto.

Razones para estudiar matemáticas:

"Es el arte de pensar bien.
Su facultad para desarrollar la capacidad de pensamiento.
Su utilidad, tanto para la vida cotidiana como para el aprendizaje de otras disciplinas necesarias para el desarrollo personal y profesional.

Las Matemáticas parecen poseer el asombroso poder de explicar cómo funcionan las cosas, por qué son, cómo son y qué nos revelaría el universo si fuésemos capaces de escuchar. Esto se enlaza de lleno con el pensamiento griego ya que explicaron un mundo relativamente sencillo, y ahora se ocupan de hacerlo con otro más complejo. Son, pues, una herramienta de gran utilidad para predecir, explicar y representar todo lo que nos rodea.

Son necesarias para desarrollar habilidades laborales y dar respuesta a cuestiones científicas y tecnológicas".

Cole, 1999.

1.2 Operadores Lógicos ● ● ● • •

8) ¿Cuáles son las variaciones de la condicional? Muestre con una misma condicional sus variaciones y luego construya tablas de verdad para cada caso.

9) Defina:

a) Negación.
b) Conjunción.
c) Disyunción inclusiva.
d) Disyunción exclusiva.
e) Condicional.
f) Bicondicional.
g) Condición suficiente.
h) Condición necesaria.

10) Suponga que la variable proposicional "Los panes se quemaron debido a que la temperatura era muy elevada" es VERDADERA, entonces:

a) Realice un parafraseo en términos de condición suficiente.
b) Realice un parafraseo en términos de condición necesaria.
c) Escriba en el lenguaje común una recíproca de la proposición.
d) Escriba en el lenguaje común una inversa de la proposición.
e) Escriba en el lenguaje común una contrarrecíproca de la proposición.

11) Traduzca al lenguaje simbólico la siguiente variable proposicional "Si respeto a mis padres entonces tengo larga vida sobre la tierra", luego escriba en español y en lenguaje formal su recíproca, inversa y contrarrecíproca.

Scanned by CamScanner

12) "Si una función es diferenciable, es continua" constituye una variable proposicional que representa a una proposición VERDADERA, ¿cuáles de las siguientes condicionales son verdaderas?

a) Una función es diferenciable, sólo si es continua.
b) Una función es continua sólo si es diferenciable.
c) La diferenciabilidad de una función es condición necesaria para la continuidad de la misma.
d) La diferenciabilidad de una función es condición suficiente para la continuidad de la misma.
e) La diferenciabilidad de una función es condición suficiente y necesaria para que sea continua.

13) Suponga que la condicional "Eres feliz siempre que la vida te sonríe" es VERDADERA, entonces es FALSO que:

a) Si la vida te sonríe, entonces eres feliz.
b) Eres feliz cuando la vida te sonríe.
c) Ser feliz es necesario para que la vida te sonría.
d) Eres feliz si la vida te sonríe.
e) Ser feliz es suficiente para que la vida te sonría.

14) Indique cuál de las siguientes proposiciones es FALSA:

a) Si $2(3+5)=16$, entonces $5(6+1)=35$
b) Si $(4+5)=20$, entonces $(6+7)=12$
c) Si $(9+5)=14$, entonces $(6+5)=11$
d) Si $9(4+2)=54$, entonces $9(4+1)=4$
e) Si $9(3+2)=45$, entonces $2(1+3)=8$

15) Dados los siguientes enunciados:

I) $x+1=0$
II) $p \rightarrow q$
III) ¡Qué fácil está el examen!
IV) $(2+5)^{-1} > (3+4)^{-1}$
V) ¿Cuánto tiempo necesitaré para realizar el examen?

Entonces es VERDAD que:

a) I y II son proposiciones pero no III.
b) III es proposición pero no IV.
c) V es proposición siempre que lo sea IV.
d) Si IV es proposición, entonces V no lo es.
e) I, II y IV no son proposiciones.

16) Suponga que la condicional "La figura geométrica es un paralelogramo ya que es un cuadrado o un rombo" representa a una proposición VERDADERA:

a) Identifique la condición necesaria y la condición suficiente.
b) Escriba en español una forma de recíproca, una inversa y una contrarrecíproca.

Scanned by CamScanner

17) Considere las siguientes condicionales:

I) Si la función es continua, entonces es integrable.
II) Si la función no es integrable, entonces no es continua.
III) La función no es continua porque no es integrable.
IV) La función no es integrable ya que no es continua.
V) La función es continua puesto que la función es integrable.

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta.

a) La inversa de la condicional I) es la V).
b) La recíproca de la condicional I) es la IV).
c) Todas las variaciones de la condicional I) están consideradas entre las opciones.
d) La recíproca de la condicional V) es la I).
e) La contrarrecíproca de la condicional III) es la II).

18) En el siguiente fragmento de lectura, identifique los operadores lógicos que usted conoce, así como las condicionales y sus variaciones, además de eso enliste los enunciados que no son proposiciones.

Mary Somerville fue uno de los primeros famosos matemáticos femeninos del mundo. Ella se interesó en las matemáticas, y desesperadamente quería estudiarlas, en un momento en que no se consideraba aceptable que una mujer lo haga.

Compró libros de álgebra y geometría y los leía por la noche. A pesar de la desaprobación de la gente a su alrededor, ella persistió con su lucha para aprender. Comenzó a resolver problemas, publicó sus resoluciones en una revista y ganó un premio por su solución a un problema de álgebra. Ella se dedicó a escribir varios libros sobre matemáticas y ciencias. Más tarde en su vida, reflexionó sobre el gran tiempo que había perseverado casi sin esperanza.

Si Mary no podía encontrar la llave para desbloquear un problema difícil que tenía que resolver, dejaba de trabajar y se iba hacia el piano, se dedicaba a su costura, o daba un paseo al aire libre. Después, regresaba al problema con la mente fresca y encontraba la solución. Si ella no podía entender un pasaje en su lectura, seguía leyendo varias páginas más. Entonces, volvía a la parte confusa y a menudo podía entenderla.

1.3 Clases de proposiciones

19) ¿Cuál es la diferencia entre una proposición simple y una compuesta? Indique ejemplos.

Scanned by CamScanner

20) Considere una proposición compuesta conformada por tres proposiciones simples, entonces:

a) ¿Es posible para al menos un caso determinar el valor de verdad de la proposición compuesta conociendo al menos el valor de verdad de una de las proposiciones simples? Justifique su respuesta.

b) ¿Es posible determinar el valor de verdad de las proposiciones simples conociendo el valor de verdad de la proposición compuesta?

21) Sean las proposiciones simples verdaderas:

a: Danilo programa en LaTeX.
b: Danilo practica álgebra.
c: Danilo es responsable.

La traducción al lenguaje simbólico de la proposición compuesta "Danilo programa en LaTeX porque practica álgebra y es responsable" es:

a) $a \rightarrow (b \wedge c)$
b) $(b \wedge c) \rightarrow a$
c) $a \rightarrow (b \vee c)$
d) $(a \vee c) \rightarrow \neg b$
e) $(b \vee c) \rightarrow a$

22) Considere las proposiciones simples cuyos valores de verdad son conocidos:

a: Los paneles solares que se organizan en forma de árbol captan mayor energía.
b: Aidan Dwyer es un niño genio.
c: La posición de las hojas de un árbol siguen el orden de la serie de Fibonacci.
d: La comunidad científica tiene la razón.

Escriba la traducción al lenguaje literal de la proposición compuesta.

$$[a \rightarrow (b \vee d)] \leftrightarrow (a \vee c)$$

23) Dada la proposición compuesta $[\neg b \rightarrow (c \vee a)]$, la cual es falsa, determine los valores de las proposiciones simples presentes.

24) Dada la proposición falsa $(a \rightarrow b) \vee [a \wedge (b \leftrightarrow c)]$, los valores de verdad de las proposiciones simples a, b y c son respectivamente:

a) 0, 0, 1
b) 1, 1, 0
c) 1, 0, 1
d) 1, 1, 1
e) 0, 1, 0

25) Dada la proposición compuesta verdadera "Si hoy no llueve, hace calor".

a) Escriba en lenguaje natural cinco formas diferentes de expresar la condicional.
b) Escriba en lenguaje natural su recíproca, su inversa y su contrarrecíproca.

Scanned by CamScanner

26) Se conoce que la proposición $a \wedge \neg[b \rightarrow (c \vee d)]$ es verdadera, determine el valor de verdad de:

a) $a \leftrightarrow c$
b) $b \vee d$
c) $(b \vee a) \rightarrow \neg[b \rightarrow (c \vee d)]$
d) $(b \wedge d) \wedge c$
e) $(b \leftrightarrow a) \leftrightarrow c$

27) Dada la proposición compuesta $[a \wedge (\neg c \wedge d)] \wedge [\neg(a \rightarrow \neg b) \rightarrow (c \wedge \neg d)]$, la cual es verdadera, entonces es cierto que:

a) $\neg d \wedge a$ es falsa.
b) $b \wedge d$ es verdadera.
c) $a \vee b$ es falsa.
d) $a \wedge \neg b$ es falsa.
e) $a \wedge c$ es verdadera.

28) Dadas las siguientes proposiciones simples que son verdaderas:

a: Estudio Historia.
b: Estudio Geografía.
c: Estudio Matemáticas.

I) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $(a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$
b) $\neg a \rightarrow (b \wedge c)$
c) $(a \rightarrow c) \wedge \neg b$
d) $\neg c \rightarrow (a \wedge b)$
e) $b \rightarrow (\neg a \wedge c)$

II) Identifique una traducción al lenguaje formal de la proposición compuesta "Si estudio Historia o Geografía, entonces estudio Matemáticas".

29) Identificando previamente las proposiciones simples, traduzca al lenguaje simbólico cada proposición compuesta verdadera.

a) Los precios bajan cada vez que la producción aumenta.
b) Existirá restricción vehicular adicional debido a que la contaminación aumenta.
c) Solamente si las utilidades bajan, las exportaciones disminuyen.
d) Si los elefantes volaran o supieran tocar el acordeón, pensaría que estoy como una regadera y dejaría que me internaran en un psiquiátrico.
e) Si aumenta la demanda, aumenta la oferta; y, viceversa.

Scanned by CamScanner

30) Considere la proposición compuesta "No tendré accidentes de tránsito, ya que soy un buen conductor y conozco las leyes de tránsito", la cual es VERDADERA.

a) Traduzca al lenguaje formal la proposición dada.
b) Determine la condición necesaria y suficiente de la proposición dada.
c) Escriba una posible traducción al lenguaje español de:

I) La recíproca de esta proposición.
II) La inversa de esta proposición.
III) La contrarrecíproca de esta proposición.

31) Suponga que la proposición "Es necesario que el disco duro sea formateado para que Juan no recupere la información o la computadora encienda" es VERDADERA.

Escriba una posible traducción al lenguaje español de:

a) La recíproca de la proposición.
b) La inversa de la proposición.
c) La contrarrecíproca de la proposición.
d) La condición necesaria.
e) La condición suficiente.

32) Escriba la traducción al lenguaje formal de la siguiente proposición compuesta, de la cual se conocen los valores de verdad de las proposiciones simples presentes:
"Si gana Barcelona, no me lo crees. Pero, siempre que te digo que pierde Emelec, te echas a llorar. En fin: O gana Barcelona o no gana, sólo si tú no te echas a llorar y tampoco me crees".

33) Traduzca al lenguaje formal la siguiente proposición compuesta verdadera:
"Aunque hay evidencia de un crimen, el juez no dicta medidas cautelares ni ordena una investigación. Basta que el juez no dicte medidas cautelares para que el sospechoso abandone el país, a menos que la policía actúe al margen de la ley. Así, o la policía actúa al margen de la ley o ya que hay evidencia de un crimen, el sospechoso abandona el país".

34) Si la proposición compuesta $\neg a \vee [(a \wedge b) \rightarrow (c \leftrightarrow b)]$ es FALSA, determine el valor de verdad de:

a) $(b \wedge c) \wedge [a \rightarrow (c \vee \neg b)]$
b) $(a \vee b) \rightarrow (b \rightarrow c)$
c) $(b \vee \neg b) \leftrightarrow a$
d) $[a \rightarrow (c \vee \neg b)] \rightarrow a$
e) $(a \vee c) \rightarrow (\neg a \rightarrow c)$

1.4 Estructuras con variables proposicionales

35) Haciendo uso de una tabla de verdad, determine si la siguiente forma proposicional es una tautología, contradicción o contingencia. A: $[f(p, q, r) \rightarrow g(p, q, r)]$

Donde:

I) $f(p, q, r)$: $[(p \leftrightarrow q) \vee r]$
II) $g(p, q, r)$: $[r \wedge ((q \vee p) \leftrightarrow p)]$

Scanned by CamScanner

36) Considere las siguientes formas proposicionales $f(p, q, r, s)$, $g(p, q, r, s)$. Si se conoce que la forma f es tautológica y g es una contingencia:

a) Haciendo uso de un único operador lógico determine de ser posible, una nueva forma proposicional A que sea tautológica, combinando f y g.
Nota: Es posible que exista más de una combinación.

b) Utilizando la forma proposicional A del literal anterior, determine si las siguientes formas proposicionales son tautología, contradicción o contingencia:

I) B: $[(f(p, q, r, s) \wedge g(p, q, r, s)) \rightarrow A]$
II) C: $[(B \rightarrow A) \rightarrow g(p, q, r, s)]$

c) Construya al menos una tabla de verdad para la forma proposicional f de manera que se cumpla la condición dada en la instrucción general del ejercicio.

d) ¿Es posible determinar el valor de $f(0, 0, 1, 0)$? Justifique su respuesta.

37) Dadas las siguientes formas proposicionales:

I) A: $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee p)] \rightarrow \neg q$
II) B: $(q \wedge \neg p) \vee (q \rightarrow p)$

Es VERDAD que:

a) La forma proposicional I es una tautología y la II no es una tautología.
b) La forma proposicional II no es una tautología.
c) Las formas proposicionales I y II no son tautologías.
d) Las formas proposicionales I y II son tautologías.
e) La forma proposicional I no es una tautología y la II es una tautología.

38) Si la forma proposicional $f(p, q, r, s)$ es una tautología, entonces es VERDAD que:

a) $f(1, 1, 0, 0) \leftrightarrow f(0, 0, 1, 1) \equiv 0$
b) $f(1, 1, 0, 0) \rightarrow f(0, 0, 1, 1) \equiv 0$
c) $f(1, 1, 0, 0) \vee f(0, 0, 1, 1) \equiv 0$
d) $f(1, 1, 0, 0) \wedge f(0, 0, 1, 1) \equiv 0$
e) $f(1, 1, 0, 0) \veebar f(0, 0, 1, 1) \equiv 0$

39) La forma proposicional $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q)]$ es:

a) Contradicción.
b) Tautología.
c) Contingencia.
d) Equivalente a $\neg r$.
e) Equivalente a $(\neg p \vee q)$.

Scanned by CamScanner

40) Indique si las siguientes formas proposicionales son tautología, contingencia o contradicción:

a) A: $\neg[(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)]$
b) B: $\{[(p \vee q) \rightarrow r] \wedge (p \vee q)\} \rightarrow r$
c) C: $\{[(p \vee q) \rightarrow r] \wedge (q \vee r)\} \rightarrow p$
d) D: $[(p \rightarrow r) \vee (p \vee q)]$
e) E: A→B

41) Considere el siguiente número binario como resultado de la forma proposicional:

A: 11010101

Determine una expresión lógica para la forma proposicional A y construya la tabla de verdad de la expresión correspondiente.

42) Utilizando tablas de verdad, determine si las siguientes formas proposicionales son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) A: $[((p \vee q) \wedge (r \rightarrow s)) \leftrightarrow q]$
b) B: $[(p \rightarrow s) \leftrightarrow A]$
c) C: $[(A \leftrightarrow B) \rightarrow (p \wedge r)]$
d) D: $[A \wedge B \wedge C]$
e) E: $[(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)]$

43) Si A y B son dos formas proposicionales tautológicas, entonces es verdad que:

a) A→B no es una forma proposicional.
b) $A \vee \neg A$ es una contradicción.
c) $B \rightarrow \neg A$ es una contingencia.
d) $A \wedge B$ es una forma proposicional tautológica.
e) $B \rightarrow \neg A$ no es una contradicción.

44) Una expresión M, para que la forma proposicional $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow M$ sea una tautología, es:

a) $p \wedge q$
b) $\neg p \wedge q$
c) $p \rightarrow \neg q$
d) $\neg p$
e) $\neg q$

45) Construya, de ser posible, una forma proposicional con 3 variables $f(p, q, r)$ utilizando los operadores lógicos necesarios para que la forma dada sea una tautología.

1.5 Propiedades de los operadores lógicos ● ● ● • •

46) Escriba en lenguaje natural una negación de la forma proposicional "Hoy no es lunes, puesto que tengo esta lección y me voy temprano".

Scanned by CamScanner

1 | Lógica

47) De ser posible, escriba el nombre de la ley o propiedad que está presente en la estructura lógica de las siguientes formas proposicionales.

a) Si duermo, entonces duermo o descanso.
b) Si estudio mucho, entonces apruebo el curso de nivelación. Si apruebo el curso de nivelación, mis papás están felices. Luego, si estudio mucho, mis papás están felices.
c) Si como bastante, voy al gimnasio; pero no voy al gimnasio. Entonces, no como bastante.
d) Si tengo dinero, me voy de viaje; y, si tengo tiempo, arreglo mi cuarto. Por lo tanto, si tengo dinero y tiempo, me voy de viaje y arreglo mi cuarto.

48) Para la forma proposicional "Juego tenis y me divierto con mis amigos, puesto que no llueve", su RECÍPROCA es:

a) Si no llueve, entonces no juego tenis y me divierto con mis amigos.
b) Juego tenis y me divierto con mis amigos, sólo si no llueve.
c) Es necesario que llueva, para no jugar tenis y no divertirme con mis amigos.
d) Si no juego tenis o no juego con mis amigos, llueve.
e) Ya que llueve, juego tenis y me divierto con mis amigos.

49) Para la forma proposicional "Juego tenis y me divierto con mis amigos, puesto que no llueve", una INVERSA equivalente es:

a) Si no llueve, entonces no juego tenis y me divierto con mis amigos.
b) Juego tenis y me divierto con mis amigos, sólo si no llueve.
c) Es necesario que llueva, para no jugar tenis y no divertirme con mis amigos.
d) Si no juego tenis o no juego con mis amigos, llueve.
e) Ya que llueve, juego tenis y me divierto con mis amigos.

50) La traducción al lenguaje formal de la forma proposicional "Si tú eres inteligente y no actúas con prudencia, eres un ignorante en la materia", siendo las variables proposicionales:

m: Tú eres inteligente.
n: Tú actúas con prudencia.
p: Tú eres un ignorante en la materia.

Es:
a) $\neg p \rightarrow (\neg m \vee n)$
b) $m \vee (n \vee p)$
c) $p \rightarrow (m \wedge \neg n)$
d) $(m \wedge \neg p) \rightarrow \neg n$
e) $m \rightarrow \neg (n \wedge \neg p)$

Scanned by CamScanner

51) Dada la forma proposicional "Si los procesos logísticos de la empresa están optimizados, la empresa maximizará su utilidad y sus empleados serán bien remunerados", indique la forma proposicional que es lógicamente equivalente:

a) La empresa maximizará su utilidad y los empleados son bien remunerados sólo si los procesos logísticos de la empresa están optimizados.
b) Ya que los empleados están bien remunerados y los procesos logísticos de la empresa están optimizados, la empresa maximizará su utilidad.
c) Si los procesos logísticos de la empresa no están optimizados, la empresa no maximizará su utilidad y sus empleados no serán bien remunerados.
d) La empresa no maximizará su utilidad o sus empleados no están bien remunerados, entonces los procesos logísticos de la empresa no están optimizados.
e) Sólo si la empresa no maximizará su utilidad y sus empleados no están bien remunerados, los procesos logísticos de la empresa no están optimizados.

52) Escriba la ley del MODUS PONENDO PONENS y construya una proposición compuesta a partir de la estructura lógica de esta ley.

53) Escriba la ley del MODUS TOLENDO TOLLENS y construya una proposición compuesta a partir de la estructura lógica de esta ley.

54) Escriba la ley de TRANSITIVIDAD y construya una proposición compuesta a partir de la estructura lógica de esta ley.

55) Dada la forma proposicional "El curso de nivelación de la ESPOL no dura seis meses, ya que no es cierto que, si los estudiantes aprueban todas las materias entonces ingresan a la ESPOL".

Con el uso de las propiedades de los operadores lógicos, identifique cuál de las nuevas formas proposicionales no es equivalente:

a) Si los estudiantes aprueban todas las materias entonces ingresan a la ESPOL, debido a que el curso de nivelación de la ESPOL dura seis meses.
b) Sólo si los estudiantes no aprueban todas las materias o ingresan a la ESPOL, el curso de nivelación de la ESPOL dura seis meses.
c) El curso de nivelación de la ESPOL dura seis meses, o si los estudiantes aprueban todas las materias entonces ingresan a la ESPOL.
d) El curso de nivelación de la ESPOL no dura seis meses, o no es cierto que, los estudiantes aprueban todas las materias y no ingresan a la ESPOL.
e) Si los estudiantes aprueban todas las materias, entonces ingresan a la ESPOL ya que el curso de nivelación de la ESPOL dura seis meses.

56) Para cada forma proposicional determine si es una tautología, una contradicción o una contingencia, haciendo uso del Álgebra Proposicional.

a) $(p \wedge q \wedge r) \rightarrow (p \vee q \vee r)$
b) $\{(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow \neg q) \rightarrow p]\} \wedge p$
c) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$
d) $[(\neg q \rightarrow \neg p) \wedge p] \rightarrow \neg q$
e) $[(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \vee p)]$

Scanned by CamScanner

57) Una negación de la forma proposicional "Me comporto bien en mi hogar sólo si soy un buen hijo" es "Me comporto bien en mi hogar y no soy un buen hijo".

a) Verdadero b) Falso

58) La ley de la CONTRADICCIÓN establece que una proposición no es verdadera y falsa al mismo tiempo.

a) Verdadero b) Falso

59) La ley de la DOBLE NEGACIÓN establece que una proposición negada dos veces vuelve a tomar su valor de verdad original.

a) Verdadero b) Falso

60) La ley del TERCERO EXCLUIDO establece que una proposición sólo puede ser falsa o sólo puede ser verdadera, pero no admite una tercera posibilidad.

a) Verdadero b) Falso

61) Enuncie y luego demuestre mediante una tabla de verdad:

a) Una de las leyes distributivas b) Una de las leyes de De Morgan

1.6 Razonamientos ● ● ● • •

62) Considere un razonamiento de la forma general $[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \ldots \wedge H_n] \rightarrow C$. Si la conclusión fuese una de las hipótesis, ¿el razonamiento siempre sería válido? Justifique su respuesta.

63) Considere la estructura lógica $(p \wedge q) \rightarrow C$; basándose en el ejercicio anterior, si $C: p$ o $C: q$ el razonamiento es válido. Escriba dos ejemplos de hipótesis tanto para p como para q en lenguaje común y demuestre usando una tabla de verdad la validez del razonamiento.

64) Determine la validez del siguiente razonamiento:

"María se va al cine sólo si no termina de estudiar. María no saldrá bien en el examen de mañana, debido a que no termina las tareas. María se va al cine. Por lo tanto, María no saldrá bien en el examen de mañana".

65) Dadas las premisas: "Si entreno, aprendo a jugar. Además si aprendo a jugar, seré seleccionado para el equipo titular. O juego fútbol o no juego fútbol. No seré seleccionado para el equipo titular". Utilizando TABLAS DE VERDAD, determine la validez del razonamiento para cada una de las siguientes conclusiones:

Scanned by CamScanner

a) Entreno.
b) No entreno.
c) Seré seleccionado para el equipo titular.
d) Aprendo a jugar.
e) No aprendo a jugar y entreno.

66) Para el razonamiento: $(H_1 \wedge H_2) \rightarrow C$ considere las siguientes hipótesis:

H_1: Si tú tomas té, te reanimas.
H_2: Tú estás con energía siempre que tomas café.

Una conclusión C que hace válido este razonamiento es:

a) No es cierto que tú tomas té y estás con energía.
b) Si tú tomas té y café, entonces te reanimas.
c) Si tú te reanimas y estás con energía, entonces tomas café.
d) Si tú te reanimas o estás con energía, entonces tomas café.
e) Si tú te reanimas y estás con energía, entonces tomas té.

67) María desea pedirle un vestido nuevo a su esposo. Considere que los siguientes enunciados describen correctamente el comportamiento de su familia: Si el esposo llega a la casa y no está lista la comida, se siente irritado. Si la esposa le cuenta sus problemas y el esposo está irritado, discuten. Basta que discutan, para que todas las peticiones de la esposa sean negadas.

a) ¿Existirá alguna forma de garantizar que ella consiga su petición?
b) ¿Existirá alguna forma de garantizar que ella NO consiga su petición?

68) Considere las siguientes premisas de un razonamiento: "Si Pablo está trabajando hoy, desayunó y tomó el bus. Pablo no tomó el bus". Una de las siguientes conclusiones hace válido el razonamiento:

a) Pablo no desayunó.
b) Pablo está trabajando hoy.
c) Pablo no está trabajando hoy.
d) No es verdad que Pablo desayunó.
e) Pablo desayunó o tomó el bus.

69) Dado el siguiente razonamiento $[H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge H_4] \rightarrow C$, donde:

H_1: Si apruebo todas las materias, entonces me voy de vacaciones por un mes.
H_2: Si me voy de vacaciones por un mes, entonces compro muchos regalos.
H_3: O me voy o no me voy de vacaciones por un mes.
H_4: No tomo clases de música, si me voy de vacaciones por un mes.

Una conclusión C que hace el razonamiento VÁLIDO es:

a) Apruebo todas las materias.
b) No es verdad que apruebo todas las materias.
c) Compro muchos regalos y apruebo todas las materias.
d) Compro muchos regalos o no apruebo todas las materias.
e) Tomo clases de música, pero no me voy de vacaciones por un mes.

Scanned by CamScanner

70) Sean las hipótesis:

H_1: Si digo mis oraciones, Dios me escucha.
H_2: Si Dios me escucha, hago bien el examen.

Una conclusión C que hace válido el razonamiento $[H_1 \wedge H_2] \rightarrow C$ es:

a) Dios no me escucha.
b) No digo mis oraciones.
c) Dios me escucha.
d) Hago bien el examen.
e) Si digo mis oraciones, hago bien el examen.

71) Dado el razonamiento $[H_1 \wedge H_2] \rightarrow C$ donde:

H_1: Si se concluye con éxito la construcción del nuevo parque en el Barrio del Centenario, se cooperará para el embellecimiento de la urbe.
H_2: Se cooperará para el embellecimiento de la urbe y se incrementará la captación de más turistas.

a) Determine una conclusión diferente a las hipótesis para que el razonamiento sea válido.
b) Determine una conclusión para que el razonamiento no sea válido.

72) Usando:

I) Tablas de verdad.
II) Método alterno tratado en esta sección.

Determine la validez del siguiente razonamiento lógico:
"Pedro se va al cine sólo si no termina de estudiar. Pedro no saldrá bien en el examen de mañana, debido a que no termina de estudiar. Pedro se va al cine. Por lo tanto, Pedro no saldrá bien en el examen de mañana".

1.7 Demostraciones ● ● ● • •

73) Demuestre la ley del MODUS TOLENDO TOLLENS utilizando el método de demostración directa.

74) Demuestre la ley del SILOGISMO DISYUNTIVO utilizando el método de demostración directa.

75) Demuestre la ley del MODUS PONENDO PONENS utilizando el método de demostración por contrarrecíproca.

76) Demuestre las leyes de los DILEMAS CONSTRUCTIVOS utilizando el método de demostración por contrarrecíproca.

77) Demuestre la ley del MODUS TOLENDO TOLLENS utilizando el método de reducción al absurdo.

Scanned by CamScanner

78) Dada la forma proposicional: $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$ y utilizando el método de DEMOSTRACIÓN DIRECTA, concluya que es tautológica.

79) Demuestre que la forma proposicional $[(p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow p$ es tautológica.

a) Utilizando tablas de verdad.
b) Utilizando propiedades de los operadores lógicos.

80) Demuestre que la forma proposicional $[(\neg q \rightarrow \neg p) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ es tautológica.

a) Utilizando tablas de verdad.
b) Utilizando propiedades de los operadores lógicos.

81) Dada la forma proposicional $\neg[(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee \neg p] \rightarrow \neg(p \wedge q)$ y utilizando el método de DEMOSTRACIÓN DIRECTA, concluya que es tautológica.

82) Dada la forma proposicional $[((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p]$ y utilizando el método de DEMOSTRACIÓN POR CONTRARRECÍPROCA, concluya que es tautológica.

83) Si A, B y C son formas proposicionales tales que, A es una tautología, B es una contradicción y C es una contingencia, demuestre que la siguiente forma proposicional es tautológica:

$$[(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (C \wedge A)] \leftrightarrow (\neg C \rightarrow B)$$

84) Dadas las hipótesis: "Si Ecuador gana el mundial, el país festeja y los ecuatorianos sueñan. Si el país no festeja, los ecuatorianos no sueñan. Ecuador no gana el mundial".

Demuestre, utilizando REDUCCIÓN AL ABSURDO, que la siguiente conclusión hace válido al razonamiento:

"Si Ecuador gana el mundial, entonces el país festeja".

85) Considere las siguientes premisas de un razonamiento: "Si me compro una camisa o un pantalón, entonces asisto a la fiesta. Si me compro zapatos nuevos, entonces no asisto a la fiesta y me quedo sin dinero. No asisto a la fiesta". Demuestre utilizando REDUCCIÓN AL ABSURDO, que la siguiente conclusión hace válido al razonamiento:

"Si me compro una camisa, no me quedo sin dinero".

Scanned by CamScanner

¿Quién es el culpable?

Ernesto fue asesinado a las 03H30 del 3 de marzo en un barrio de la urbe. Otto, Amanda, Corina, Matías y Gabriel fueron arrestados e interrogados, ya que una de estas personas es culpable del asesinato.

Sus declaraciones fueron:

Otto: "Fue Amanda o Corina".

Amanda: "Ni Gabriel, ni yo lo hicimos".

Corina: "Ustedes dos están mintiendo".

Matías: "No, uno de ellos está mintiendo; el otro está diciendo la verdad".

Gabriel: "No, Matías, eso no es cierto".

Ahora bien, el investigador sabía que tres de los sospechosos siempre decían la verdad, pero que dos siempre mentían. ¿Puede descubrir el investigador quién asesinó a Ernesto?

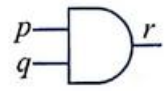
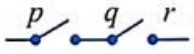
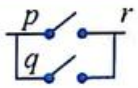
Scanned by CamScanner

El esquema de los tanques

Como ya es conocido, las variables proposicionales pueden tomar, o un valor de verdad verdadero, o uno falso. Si utilizamos esta noción básica de la lógica y haciendo una analogía con los interruptores, tenemos la siguiente equivalencia:

Si p es una variable proposicional que cuando es verdadera toma el valor de 1 y cuando es falsa es 0, entonces cuando p sea 1, el interruptor estará encendido (on), mientras que cuando sea 0, el interruptor estará apagado (off).

Es decir, cada variable proposicional ahora será un interruptor. Pero, así como existen variables proposicionales, también existen operadores lógicos, los que análogamente en circuitos se denominan compuertas y cuya representación se muestra en la siguiente tabla.

	AND - Y	OR - O
COMPUERTAS		
INTERRUPTORES		

Equivalencia de compuertas lógicas.

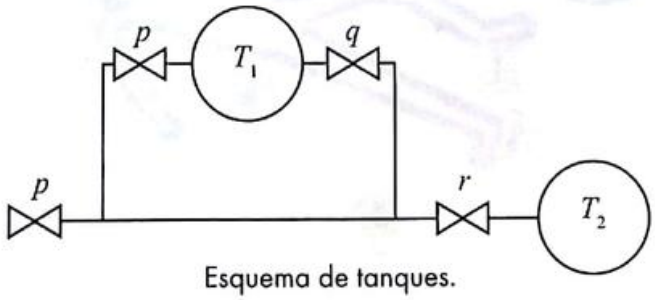
Nótese que la compuerta AND es análoga al operador ($\wedge$), pues muestra que tiene dos variables de ingreso p y q y una variable de respuesta r, la cual sólo estará (on) cuando p y q estén (on), lo que representa la tabla de verdad del operador ($\wedge$). Observe en la tabla, que el paso de la señal en el circuito, exige que tanto p como q estén cerrados, es decir, ambos en posición (on). De manera similar, la compuerta OR es análoga al operador ($\vee$).

Suponga que tiene un esquema hidráulico, el cual se representa a continuación, con interruptores (electroválvulas) antes de cada tanque; y que además, la forma proposicional A corresponde al encendido de las válvulas para que circule agua a través del tanque 1 (T_1) hacia el tanque 2 (T_2).

Sabiendo que p, q y r representan los interruptores (electroválvulas), determine:

a) La forma proposicional A, para que la mayoría de veces tenga agua el tanque T_2, tomando en cuenta que cada electroválvula estará encendida o apagada de acuerdo a su valor de verdad.

b) El circuito de compuertas correspondiente.



Esquema de tanques.

Scanned by CamScanner

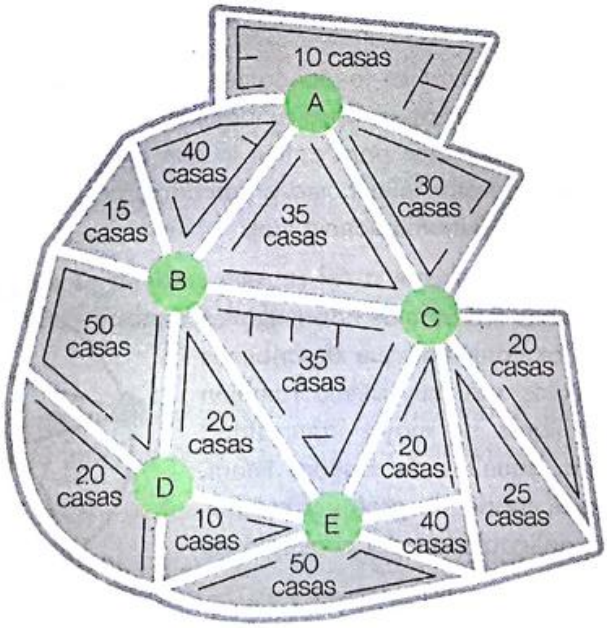
2 | Conjuntos

Desafío

La cobertura de Internet

Una empresa proveedora del servicio de Internet debe conectar los sectores de una pequeña población, contando para ello con el plano mostrado en la figura. La empresa sabe que existe un límite de señal con respecto a la distancia y por ello debería instalar un máximo de tres cajas de conexión (elegidas de entre el conjunto de cajas posibles A, B, C, D y E), desde donde saldrán las conexiones a los sectores de la población.

El problema consiste en plantear un procedimiento para cubrir la mayor cantidad de casas posibles bajo las condiciones dadas, especificando claramente las cajas seleccionadas; y, la cantidad de sectores y casas que se pueden cubrir, sabiendo que las cajas solamente tienen cobertura en las casas que se encuentran a su alrededor.



Si no puede resolver este desafío, busque la solución en la página correspondiente del presente capítulo.

Scanned by CamScanner

Introducción

La noción del término conjunto es una idea básica en el estudio de la matemática.

De hecho, cada uno de nosotros comprende bastante bien cuando hacemos referencia a "un conjunto de compañeros de aula de clase",

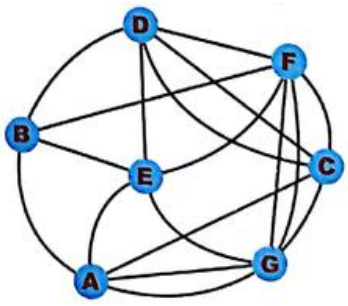
"un conjunto de diferentes marcas y tipos de teléfonos móviles",

"un conjunto de cuentas en redes sociales"; y no hay necesidad, de dar mayores explicaciones para entender que estamos hablando de diferentes tipos de agrupaciones.

Observemos que el análisis de conjuntos como los indicados, nos permite concluir al instante sobre la evidente relación entre las características o propiedades de sus elementos; aunque en la práctica, se puedan agrupar diferentes elementos sin que necesariamente tengan una característica común.

En el capítulo precedente analizamos los fundamentos de la lógica simbólica, así como el uso adecuado de las proposiciones. Estas fundamentaciones y el nuevo estudio de los cuantificadores constituyen las bases para definir lo que intuitivamente parece claro para todos, pues los conceptos a tratar tales como predicados, pares ordenados, relaciones y funciones, requieren este nuevo marco conceptual.

Puesto que en matemáticas trabajamos con múltiples situaciones numéricas, los conjuntos que describimos en los siguientes capítulos son muy útiles. También consideremos que en libros de mayor rigurosidad matemática, tales como aquellos de álgebra lineal, análisis de variable real, teoría de grafos y muchos más, podremos ver la aplicabilidad del concepto de conjunto.



No intentamos profundizar en la teoría de conjuntos, pues ésta es una tarea más compleja de lo que mencionamos en este libro, solamente describiremos los conceptos elementales y sus respectivos nexos, sentando bases sólidas para el aprendizaje futuro.

Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

2.1 Tipos y cardinalidad

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Definir con sus propias palabras los diferentes tipos de conjuntos.
- Expresar un conjunto por comprensión, por extensión o con un diagrama de Venn.
- Determinar la cardinalidad de un conjunto dado.

Dado que **elemento** y **conjunto** constituyen nociones que no admiten definición por ser conceptos primarios en el campo de las matemáticas, la idea de conjunto estará asociada a una colección, reunión o agrupación de objetos, pudiéndose encontrar conjuntos con muchos, pocos o incluso con ningún elemento.

Ejemplo 2.1 Conjuntos.

A continuación se presentan ejemplos de algunos conjuntos:

- Los números enteros.
- Los habitantes de la Luna.
- Los jugadores de tenis.
- Los animales en extinción.
- Los paquetes de software.
- La capital de Ecuador.
- Los operadores de telefonía celular.
- Los equipos de fútbol.
- Los números primos.
- Las cuentas de redes sociales.
- Las marcas de vehículos.

Los conjuntos usualmente se denotan con las letras mayúsculas del alfabeto español; por ejemplo A, B, C, entre otras. Todas estas agrupaciones podrían tener características comunes a ser verificables.

Para decir que x es un elemento del conjunto A, escribiremos $x \in A$.
Para decir que x no está en A, escribiremos $x \notin A$ o también $\neg(x \in A)$.

La descripción de un conjunto se puede realizar de las siguientes maneras:

- Por COMPRENSIÓN, para referirnos a alguna característica de los elementos.
- Por EXTENSIÓN o TABULACIÓN, cuando se listan todos los elementos.
- Por medio de DIAGRAMAS DE VENN, cuando se desea representarlo gráficamente.

La decisión de describir un conjunto de una u otra forma depende del fin práctico o aplicativo que se persigue.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.2 Descripción de conjuntos.

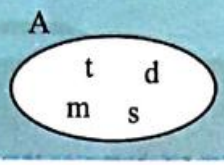
Por COMPRENSIÓN:

$A = \{x/x$ es consonante de la palabra "amistad"$\}$

Por EXTENSIÓN o TABULACIÓN:

$A = \{m, s, t, d\}$

Por DIAGRAMAS DE VENN:



Note que:

$d \in A$

$b \notin A$

Para algunas operaciones que se realizan entre conjuntos, es de mucha utilidad conocer la cantidad de elementos que posee el conjunto. Dicha cantidad recibe el nombre de cardinalidad, la cual se define a continuación.

Definición 2.1 (Cardinalidad)

Es la cantidad de elementos de un conjunto. El símbolo N(A) denota la cardinalidad de un conjunto A.

Ejemplo 2.3 Cardinalidad de conjuntos.

$A = \{x/x$ es un dígito impar en el sistema de numeración decimal$\}$

$N(A) = 5$, porque $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

2.1.1 Conjuntos relevantes

Sea A un conjunto, se pueden dar los siguientes casos:

- A es VACÍO si no tiene elementos. El símbolo que se utiliza para representar al conjunto vacío es $\varnothing$. $N(A) = 0$
- A es UNITARIO si tiene un único elemento. $N(A) = 1$
- A es FINITO si tiene una cantidad finita de elementos.
- A es INFINITO si no tiene una cantidad finita de elementos o posee una cantidad extremadamente grande de ellos.
- A es REFERENCIAL o UNIVERSO cuando contiene todos los elementos que deseen considerarse en un problema, discurso o tema, sin pretender contener todo lo que no interesa al problema. El símbolo que se utiliza para representar a este conjunto es Re.

Ejemplo 2.4 Conjuntos relevantes.

Para el siguiente conjunto referencial $Re = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, se tienen los conjuntos:

$A = \{x/(x$ es par$) \wedge (x$ es impar$)\} = \varnothing$
$N(A) = 0 \therefore$ A es conjunto vacío.

$B = \{x/(x$ es menor que 3$) \wedge (x$ es mayor que 1$)\} = \{2\}$
$N(B) = 1 \therefore$ B es conjunto unitario.

$C = \{x/(x = 0) \leftrightarrow (x$ es mayor que 2$)\} = \{1, 2\}$
$N(C) = 2 \therefore$ C es conjunto finito.

El conjunto $Re = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ es infinito.

Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

2.1 Tipos y cardinalidad

Autoevaluación

1) Proponga 3 ejemplos de conjuntos expresados por tabulación.

a)

b)

c)

2) Proponga 3 ejemplos de conjuntos expresados por comprensión.

a)

b)

c)

3) Los siguientes conjuntos están dados por comprensión, expréselos por tabulación y determine su cardinalidad.

a) $A = \{x/x$ es una vocal en la palabra "ecuatoriano"$\}$

b) $B = \{x/x$ es una estrella en el sistema solar$\}$

c) $C = \{x/x$ es un dígito del número 123454321$\}$

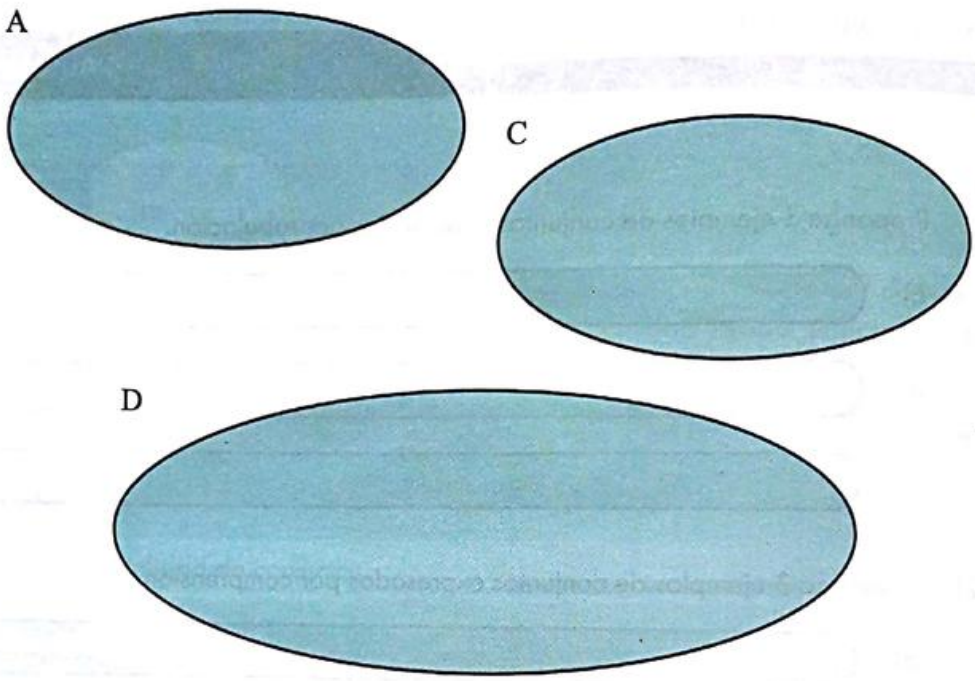
d) $D = \{x/x$ es un día de la semana$\}$

e) $E = \{x/x$ es un color primario tradicional$\}$

Scanned by CamScanner

4) Considere los conjuntos A, C y D del numeral anterior.

a) Represente estos conjuntos en diagramas de Venn.



b) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas. Coloque 1 si la proposición es verdadera y 0 en caso contrario.

- $e \in A$
- martes $\in A$
- $2 \in D$
- $a \notin C$
- lunes $\notin C$
- domingo $\notin D$

5) Una con líneas los conjuntos de la columna izquierda con el tipo de conjunto que le corresponde a la derecha:

a) $A = \{30, 40, 50, 60, ...\}$
b) $B = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$
c) $C = \{x/x$ es consonante y vocal a la vez$\}$
d) $D = \{1, 2, 3, ..., 99, 100\}$
e) $E = \{$Ecuador$\}$

Vacío
Unitario
Finito con cardinalidad mayor que 1
Infinito

Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

2.2 Cuantificadores

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una expresión en lenguaje natural, identificar los dos tipos de cuantificadores que existen.
- Parafrasear expresiones que incluyan cuantificadores.
- Dado un conjunto finito, determinar su conjunto potencia.
- Identificar conjuntos iguales, disjuntos e intersecantes.

Hasta ahora hemos considerado solamente la inferencia lógica de la estructura de proposiciones que son clasificadas como verdaderas o falsas. Sin embargo, se pueden considerar tres tipos de frases o expresiones: verdaderas, falsas e indistintas o abiertas.

A continuación se proporcionan ejemplos de cada uno de estos tipos:

1. Expresiones que son proposiciones verdaderas

   $5 + 3 = 8$
   2 es menor que 6

2. Expresiones que son proposiciones falsas

   $5 + 3 = 10$
   2 es mayor que 6

3. Expresiones indistintas o abiertas

   $5x + 3y = 8$
   $2x$ es menor que 6

Vemos que estas expresiones indistintas o abiertas pueden ser verdaderas o falsas, dependiendo de las sustituciones que se hagan para x o y.

Se desea aplicar ahora el estudio de lógica y conjuntos a las expresiones abiertas. Para este fin, debemos restringir o cuantificar la variable, diciendo que la expresión es verdadera para todos o algunos de sus valores posibles. De aquí que, se hace necesario contar con una simbología especial, que permita obtener proposiciones a partir de expresiones abiertas.

A continuación se definirán los denominados cuantificadores, los cuales permitirán lograr este propósito.

Definición 2.2 (Cuantificador Universal)

Cualquier expresión de la forma: "para todo", "todo", "para cada", "cada", constituye en el lenguaje formal un cuantificador universal y se simboliza por medio de $\forall$.

Scanned by CamScanner

Definición 2.3 (Cuantificador Existencial)

Cualquier expresión de la forma: "existe", "algún", "algunos", "por lo menos uno", "basta que uno", constituye en el lenguaje formal un cuantificador existencial y se simboliza por medio de $\exists$.

Es posible encontrar la expresión $\exists!x$, la cual denota la existencia de un caso único para x.

Ejemplo 2.5 Cuantificadores.

Considere un conjunto referencial de números:

$\forall x, 2x+3x=5x$	Se lee "Para todo número x se cumple que $2x+3x=5x$".
$\exists x, x^2-1=0$	Se lee "Existe al menos un número x, para el cual $x^2-1=0$".
$\exists!x, 2x+2=4$	Se lee "Existe un único número x, para el cual $2x+2=4$".

Como se puede apreciar, estas tres expresiones sí pueden ser calificadas como verdaderas o falsas, lo cual las convierte en proposiciones de acuerdo a la definición 1.1.

Vemos que en el caso de una expresión abierta con cuantificadores, se necesita algún conjunto referencial, del cual se obtienen los valores posibles de la variable.

Definición 2.4 (Subconjunto)

El conjunto A es subconjunto de B si y sólo si los elementos de A están contenidos en B. Simbólicamente, este concepto se representa por:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow \forall x[(x \in A) \rightarrow (x \in B)]$$

Si A es subconjunto de B ($A \subseteq B$) pero B no es subconjunto de A ($B \not\subseteq A$), se dice que A es SUBCONJUNTO PROPIO de B, lo cual se representa por:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge \neg(B \subseteq A)]$$

La proposición $(x \in \varnothing)$ es falsa, porque no existen elementos que pertenezcan al conjunto vacío. Adicionalmente, la forma proposicional $0 \rightarrow p$ es siempre tautológica, sin importar el valor de verdad de la variable proposicional p, con lo cual podemos concluir que: $[(x \in \varnothing) \rightarrow (x \in A)] \equiv 1$, es decir que $\varnothing \subseteq A$. Luego, el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

Si realizáramos un análisis similar, podríamos concluir también que todo conjunto es subconjunto de sí mismo: $A \subseteq A$.

Definición 2.5 (Conjunto Potencia)

Dado un conjunto A, su conjunto potencia es aquel que está formado por todos los subconjuntos posibles de A. El símbolo que se utiliza para este conjunto es P(A).

$$P(A) = \{B / B \subseteq A\}$$

La cardinalidad del conjunto potencia de A se denota como $N(P(A))$ y es igual a $2^{N(A)}$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.6 Conjunto Potencia.

Si $A = \{*, +, a\}$, entonces $P(A) = \{\varnothing, \{*\}, \{+\}, \{a\}, \{*, +\}, \{*, a\}, \{+, a\}, A\}$.
A partir de este resultado, se tienen las siguientes proposiciones:

Proposiciones verdaderas	Proposiciones falsas
$\{*, +\} \subseteq A$	$\{\{a\}\} \subseteq A$
$\{*, +\} \in P(A)$	$\{A\} \in P(A)$
$\varnothing \in P(A)$	$A \notin P(A)$

Observe que $N(P(A)) = 2^3 = 8$.

Ejemplo 2.7 Conjunto Potencia.

Dado el conjunto $B = \{1, \{*, \Omega\}\}$, construya $P(B)$ y $P(P(B))$.

Solución:

Los subconjuntos posibles de B son: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{\{*, \Omega\}\}$, B.
Luego, $P(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{*, \Omega\}\}, B\}$.
$P(P(B)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\{\{*, \Omega\}\}\}, \{B\}, \{\varnothing, \{1\}\}, \{\varnothing, \{\{*, \Omega\}\}\}, \{\varnothing, B\},$
$\{\{1\}, \{\{*, \Omega\}\}\}, \{\{1\}, B\}, \{\{\{*, \Omega\}\}, B\}, \{\varnothing, \{1\}, \{\{*, \Omega\}\}\},$
$\{\varnothing, \{1\}, B\}, \{\{1\}, \{\{*, \Omega\}\}, B\}, \{\varnothing, \{\{*, \Omega\}\}, B\}, P(B)\}$

Observe que $N(P(B)) = 2^2 = 4$ y que $N(P(P(B))) = 2^4 = 16$.

2.2.1 Relaciones entre conjuntos

Definición 2.6 (Igualdad entre conjuntos)

Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. Es decir, ambos conjuntos se contienen mutuamente. Simbólicamente, este concepto se representa por:

$$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

Usando las definiciones y las propiedades de la lógica proposicional, se tiene:

$$(A = B) \Leftrightarrow \forall x[(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$$

Definición 2.7 (Conjuntos disjuntos o intersecantes)

Los conjuntos A y B son DISJUNTOS si y sólo si no tienen elementos en común.
Los conjuntos A y B son INTERSECANTES si y sólo si tienen al menos un elemento común.

Scanned by CamScanner

1) Complete cada literal según corresponda y luego encuentre en la sopa de letras estas palabras.

a) En el lenguaje formal, el cuantificador _____ se utiliza en expresiones gramaticales del tipo "para todo", mientras que el cuantificador _____ se utiliza para expresiones del tipo "existe".

b) Si dos conjuntos tienen elementos en común se denominan _____, caso contrario son _____.

c) El conjunto vacío es _____ de cualquier conjunto.

E	R	Q	F	Z	O	M	O	K	C	I	T	D	E	R	J	O
E	X	S	L	O	M	S	A	W	O	O	O	I	M	V	W	E
E	I	I	W	C	I	U	G	L	P	Z	V	S	U	A	P	I
Y	Y	J	S	Q	N	B	O	T	M	J	I	J	G	H	P	Q
T	M	U	J	T	T	C	K	W	D	O	L	U	I	Q	V	T
O	J	H	Q	E	E	O	K	Z	U	C	N	N	X	H	N	L
T	C	I	B	G	R	N	L	W	U	L	H	T	W	Q	N	N
O	G	Z	O	I	S	J	C	K	A	L	E	O	T	H	S	Z
Y	Y	O	I	P	E	U	S	I	D	J	L	S	O	O	T	W
J	D	S	H	R	C	N	V	S	A	Q	J	X	K	Q	X	E
A	C	X	C	S	A	T	J	W	M	L	R	Z	E	J	J	A
G	U	R	X	Z	N	O	U	N	I	V	E	R	S	A	L	Z
O	C	E	C	L	T	L	E	K	A	L	S	B	U	I	H	I
X	C	E	R	W	E	N	N	L	X	P	A	E	E	H	O	R
S	D	P	H	S	S	T	O	D	D	E	E	G	L	S	B	X

2) Parafrasee las siguientes expresiones con cuantificadores, considerando el conjunto referencial dado.

a) Re = $\{x/(x = 1) \vee (x = 2) \vee (x = 3)\}$ $\forall x, x^2 + 1 > 0$

_____

b) Re = $\{m/m$ es manabita$\}$ $\exists m$, m es alegre.

_____

c) Re = $\{t/t$ es un árbol$\}$ $\exists t$, t no tiene hojas en la época seca.

_____

Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

3) Sea el conjunto Re = {x/x es persona}, traduzca al lenguaje formal las siguientes proposiciones:

a) Todas las personas son puntuales.

b) Existen personas que son universitarias.

c) Cada persona es inteligente.

d) Algunas personas son de tez blanca.

4) Construya y represente mediante el diagrama de Venn correspondiente, el conjunto potencia P(F) para el siguiente conjunto:

F = {heart, mind, soul}

5) Para cada literal considere un conjunto referencial adecuado. Luego, escriba I en cada recuadro si cada par de conjuntos dados son intersecantes; y, D si son disjuntos.

a) A = {x/x es un dígito del sistema de numeración decimal} y B = {0, 1, 2}

b) C = {cocer, hervir} y D = {coser, cortar}

c) E = {huevo, harina} y F = {manzana, naranja}

d) G = {x/x tiene 20 años} y H = {x/x tiene 21 años}

e) I = {pulgada} y J = {x/x es una unidad de longitud}

Scanned by CamScanner

2.3 Operaciones entre conjuntos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar con sus propias palabras las diferentes operaciones entre conjuntos.
- Dada una operación entre conjuntos, representarla con el lenguaje simbólico respectivo.
- Dada una operación entre conjuntos, representarla gráficamente mediante diagramas de Venn.
- Reconocer la operación de conjuntos que representa una región sombreada dada.

Es posible realizar operaciones entre conjuntos para formar otros nuevos. Las operaciones más utilizadas son: unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complementación.

Definición 2.8 (Unión entre conjuntos)

La unión entre los conjuntos A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B. Se denota por $A \cup B$ y se define como:

$$A \cup B = \{x/(x \in A) \vee (x \in B)\}$$

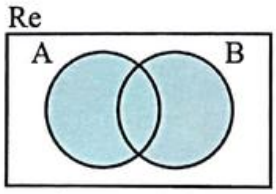


Figura 2.1: Diagrama de Venn de la Unión entre Conjuntos.

Definición 2.9 (Intersección entre conjuntos)

La intersección entre los conjuntos A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B. Se denota por $A \cap B$ y se define como:

$$A \cap B = \{x/(x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

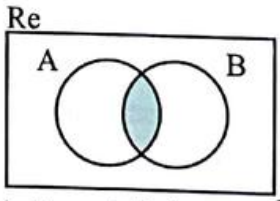


Figura 2.2: Diagrama de Venn de la Intersección entre Conjuntos.

Scanned by CamScanner

Definición 2.10 (Diferencia entre conjuntos)

La diferencia entre los conjuntos A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A, pero no pertenecen al conjunto B. Se denota por $A - B$ y se define como:

$$A - B = \{x/(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}$$

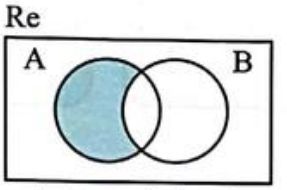


Figura 2.3: Diagrama de Venn de la Diferencia entre Conjuntos.

Definición 2.11 (Diferencia simétrica entre conjuntos)

La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B es un nuevo conjunto formado por los elementos que pertenecen o al conjunto A o al conjunto B. Se denota por $A \Delta B$ y se define como: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, o también:

$$A \Delta B = \{x/[(x \in A) \wedge \neg(x \in B)] \vee [(x \in B) \wedge \neg(x \in A)]\}$$

$$A \Delta B = \{x/(x \in A) \veebar (x \in B)]\}$$

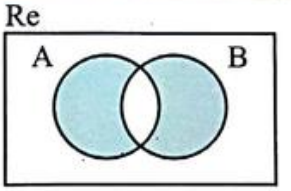


Figura 2.4: Diagrama de Venn de la Diferencia Simétrica entre Conjuntos.

Definición 2.12 (Complementación de conjuntos)

La complementación de un conjunto A es un nuevo conjunto formado por los elementos del referencial que no pertenecen al conjunto A. Se denota por A^C y se define como:

$$A^C = \{x/(x \in Re) \wedge \neg(x \in A)\}$$

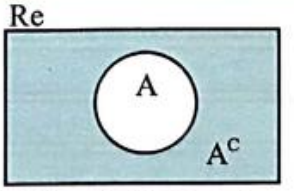
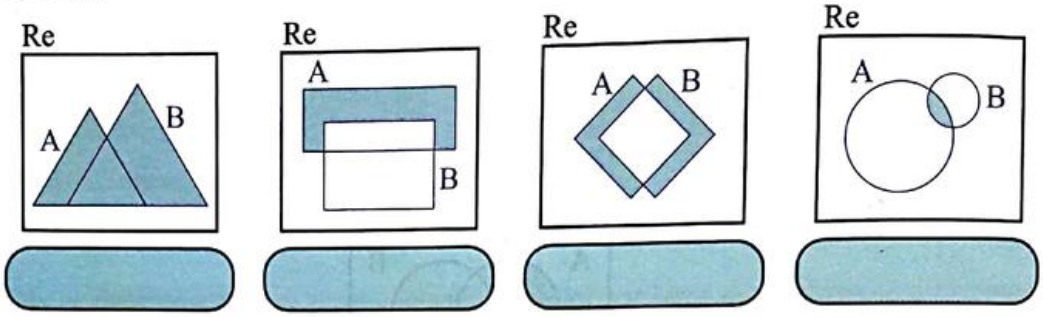


Figura 2.5: Diagrama de Venn de la Complementación de Conjuntos.

Scanned by CamScanner

1) Escriba el nombre de la operación básica entre conjuntos que representa cada diagrama de Venn.

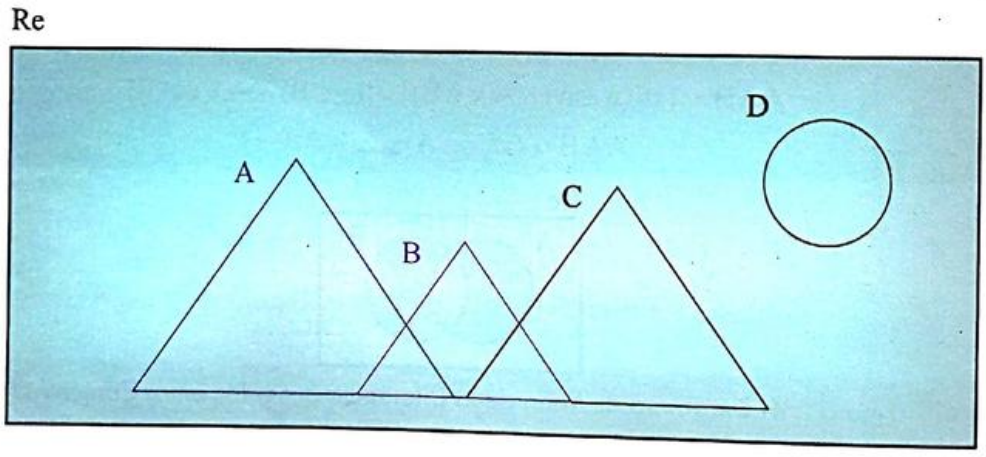


2) Sean los conjuntos:

$$Re = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

$A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{5, 7, 9\}$ $C = \{7, 11, 13\}$ $D = \varnothing$

Complete el siguiente diagrama con los elementos que correspondan.



3) Considerando los conjuntos del numeral anterior, determine el conjunto resultante al efectuar cada operación indicada:

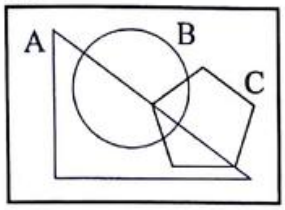
a) $A \cup C$
b) $B \cap C$
c) $D^c - (A \cup B)$
d) $Re - (C - D)$
e) $A \Delta C$
f) $A \Delta B$

Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

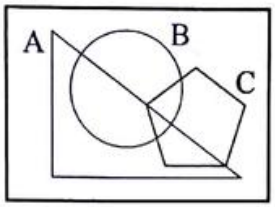
4) Dados los conjuntos A, B, C no vacíos, sombree la región cuya operación entre conjuntos se especifica:

Re



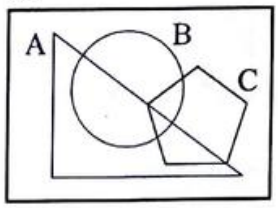
$B \cup C$

Re



$(B \cup C)^c$

Re



$A^c \cap (B \cup C)^c$

5) Si Re = {un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf}, A y B son conjuntos tales que:

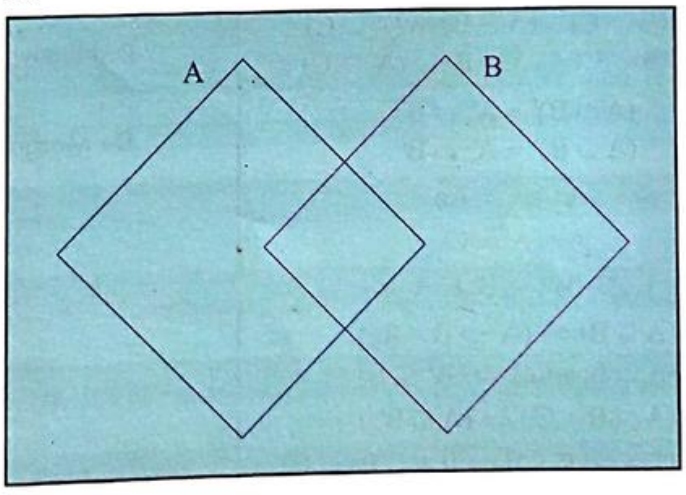
$A \cup B = \{trois, quatre, cinq, huit, neuf\}$

$A \cap B = \{huit\}$

$B - A = \{trois, quatre\}$

Complete el diagrama de Venn y luego describa los conjuntos A y B por tabulación.

Re



Conjunto A

Conjunto B

Scanned by CamScanner

2.4 Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Emplear propiedades de las operaciones entre conjuntos para establecer igualdad entre ellos.
- Dada una propiedad de las operaciones entre conjuntos, demostrarla empleando lógica proposicional.
- Plantear y resolver problemas de cardinalidad empleando álgebra de conjuntos.

Las operaciones entre conjuntos y algunas de sus más importantes propiedades se incluyen en las denominadas Leyes del Álgebra de Conjuntos. A continuación se presentan las de uso más frecuente:

UNIÓN		INTERSECCIÓN
$A \cup B = B \cup A$	Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Asociativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup A = A$	Idempotencia	$A \cap A = A$
$A \cup \varnothing = A$	Identidad	$A \cap Re = A$
$A \cup Re = Re$	Absorción	$A \cap \varnothing = \varnothing$

Cuadro 2.1: Leyes de las operaciones fundamentales Unión e Intersección.

$\varnothing^c = Re$ $(Re)^c = \varnothing$	Complementación
$(A^c)^c = A$	Doble Complementación o Involutiva
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributivas
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	De Morgan
$A \cup A^c = Re$	
$A \cap A^c = \varnothing$	
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (B^c \subseteq A^c)$	
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A^c \cup B = Re)$	
$(A \cup B = Re) \Leftrightarrow (A^c \subseteq B)$	
$(A \cap B = \varnothing) \Leftrightarrow (A \subseteq B^c)$	
$[(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)] \Leftrightarrow [(A \cup B) \subseteq C]$	
$[(A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)] \Leftrightarrow [A \subseteq (B \cap C)]$	
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow [(A \cap B^c) \subseteq \varnothing]$	Reducción al absurdo
$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$ $(A = B) \Leftrightarrow (B = A)$	Equivalencia

Cuadro 2.2: Leyes de las operaciones entre conjuntos.

Scanned by CamScanner

$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (A \neq \emptyset) \wedge (B \neq \emptyset)$	
$A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset) \wedge (B = \emptyset)$	
$(A \cap B = Re) \Leftrightarrow (A = Re) \wedge (B = Re)$	
$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$	
$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	
$\emptyset \subseteq A$	
$A \subseteq A$	
$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$	Transitividad
$[(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)] \Rightarrow [(A \cap C) \subseteq (B \cap D)]$	
$[(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D)] \Rightarrow [(A \cup C) \subseteq (B \cup D)]$	

Cuadro 2.3: Otras Leyes de las operaciones entre conjuntos.

Estas propiedades pueden ser demostradas usando las propiedades del álgebra proposicional.

Ejemplo 2.8 Demostración de propiedades del álgebra de conjuntos.

Demuestre formalmente: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Primera Ley Distributiva)

p.d. $x \in [(A \cup (B \cap C)] \Leftrightarrow x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$

$x \in [(A \cup (B \cap C)] \Leftrightarrow [x \in A] \vee [x \in (B \cap C)]$	Definición de Unión
$\Leftrightarrow [x \in A] \vee [(x \in B) \wedge (x \in C)]$	Definición de Intersección
$\Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \in A) \vee (x \in C)]$	Ley Distributiva
$\Leftrightarrow [x \in (A \cup B)] \wedge [x \in (A \cup C)]$	Definición de Unión
$\Leftrightarrow x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$	Definición de Intersección

Ejemplo 2.9 Demostración de propiedades del álgebra de conjuntos.

Demuestre formalmente: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Primera Ley de De Morgan)

p.d. $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c)$

$x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow (x \in Re) \wedge \neg (x \in (A \cup B))$	Definición de Complementación
$\Leftrightarrow (x \in Re) \wedge \neg [(x \in A) \vee (x \in B)]$	Definición de Unión
$\Leftrightarrow (x \in Re) \wedge [\neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B)]$	Ley de De Morgan
$\Leftrightarrow [(x \in Re) \wedge (x \in Re)] \wedge [\neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B)]$	Ley de Idempotencia
$\Leftrightarrow [(x \in Re) \wedge \neg (x \in A)] \wedge [(x \in Re) \wedge \neg (x \in B)]$	Ley Asociativa
$\Leftrightarrow (x \in A^c) \wedge (x \in B^c)$	Definición de Complementación
$\Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c)$	Definición de Intersección

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.10 Demostración de propiedades de cardinalidad.

p.d. $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

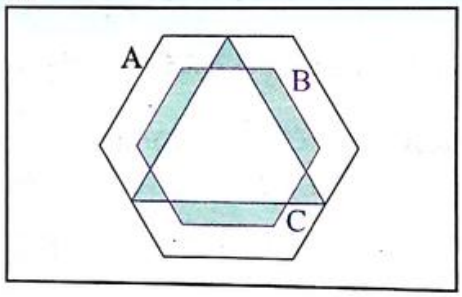
$B = (B - A) \cup (A \cap B)$	Definición de un conjunto disjunto
$N(B) = N(B - A) + N(A \cap B)$	Cardinalidad del conjunto disjunto
$N(B - A) = N(B) - N(A \cap B)$	Cardinalidad de la Diferencia
$A \cup B = A \cup (B - A)$	Expresión mediante conjuntos disjuntos
$N(A \cup B) = N(A) + N(B - A)$	Cardinalidad de la Unión
$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$	Cardinalidad de la Diferencia

Se puede demostrar que:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C)$$

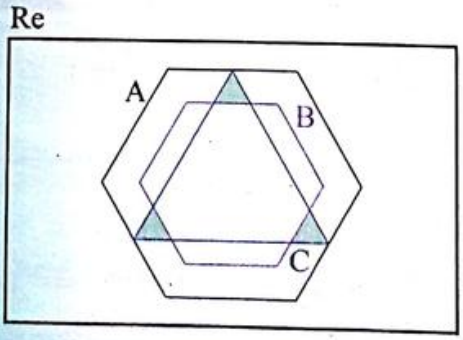
Ejemplo 2.11 Operaciones entre conjuntos.

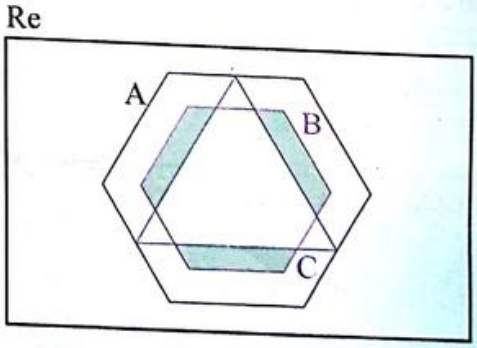
Dados los conjuntos A, B y C que se muestran en el siguiente diagrama de Venn, determine el conjunto que representa la región sombreada.



Solución:

La primera parte del conjunto solicitado la constituye el conjunto $(A \cap B^c) \cap C$, tal como se muestra en el diagrama de la figura ubicada en la parte izquierda. La segunda parte del conjunto solicitado la constituye el conjunto $(B \cap C^c)$, el cual se representa en el diagrama de la figura ubicada a la derecha.





A partir de estos diagramas de Venn, podemos deducir que la región sombreada requerida puede ser representada por el conjunto:

$$[(A \cap B^c) \cap C] \cup (B \cap C^c)$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.12 Cardinalidad de conjuntos.

Determine el porcentaje de alumnos que practican fútbol y básquet, si al entrevistar a 1 000 estudiantes se obtuvieron los siguientes resultados:

- 600 practican fútbol.
- 500 practican básquet.
- 150 no practican fútbol ni básquet.

Solución:

Sea B el conjunto integrado por alumnos que practican básquet y F el integrado por quienes practican fútbol.

A partir de la información dada, se tiene un referencial con dos subconjuntos;

$$N(Re) = 1\,000$$
$$N(B) = 500$$
$$N(F) = 600$$
$$N[Re - (B \cup F)] = 150$$

Sabemos que:

$$N(B \cup F) = N(B) + N(F) - N(B \cap F)$$

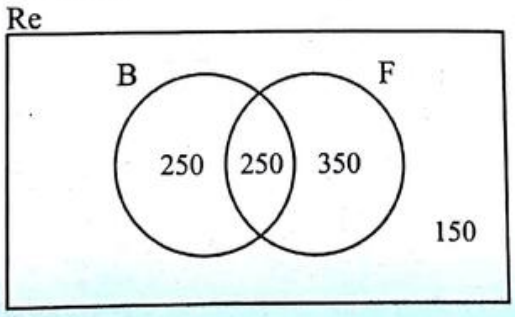
Y como:

$$N(B \cup F) = 1\,000 - 150$$
$$N(B \cup F) = 850$$

Luego:

$$N(B \cap F) = 600 + 500 - 850$$
$$N(B \cap F) = 250$$

El siguiente diagrama de Venn ilustra el análisis previamente desarrollado:



Con lo que se concluye que el número de estudiantes que practican fútbol y básquet es 250, el cual representa el 25% del total de estudiantes.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.13 Cardinalidad de conjuntos.

Durante una encuesta realizada a 200 estudiantes de un colegio se obtuvo lo siguiente: 68 se comportan bien, 138 son aplicados, 160 son habladores, 120 son habladores y aplicados, 20 se comportan bien y no son aplicados, 13 se comportan bien y no son habladores, 15 se comportan bien y son habladores pero no son aplicados. Determine la cantidad de personas que tienen al menos dos de las características mencionadas.

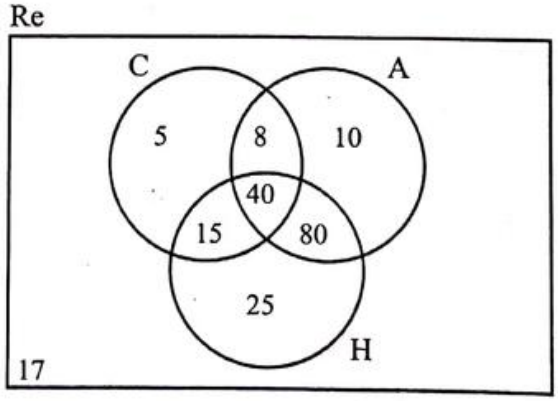
Solución:

Sean los conjuntos C, A, H conformados por estudiantes que se comportan bien, son aplicados y habladores, respectivamente.

A partir de la información obtenida de la encuesta, se deduce que:

- $N(Re)=200$
- $N(C)=68$
- $N(A)=138$
- $N(H)=160$
- $N(H\cap A)=120$
- $N(C-A)=20$
- $N(C-H)=13$
- $N[(C\cap H)-A]=15$
- $N[(C\cup A\cup H)^c]=17$

Luego, el diagrama de Venn correspondiente es:



Los que tienen al menos dos características de las mencionadas, corresponden a aquellos que poseen dos o tres características, es decir:

$$8+15+80+40=143$$

$\therefore$ La cantidad de personas que tienen al menos dos características es 143.

Scanned by CamScanner

2.4 Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Autoevaluación

1) Dadas las condiciones especificadas en cada literal, determine la cardinalidad solicitada:

a) $N(A) = 12, N(B) = 13, N(A \cap B) = 1 \rightarrow N(A \cup B) = ?$

b) A y B son disjuntos $\rightarrow N(A \cap B) = ?$

c) $N(B) = 80, N(A \cap B) = 10, N(A \cup B) = 120 \rightarrow N(A) = ?$

d) $N(A) = 118, N(A \cap B) = 50, N(A \cup B) = 200 \rightarrow N(B) = ?$

e) $N(A) = 3, N(B) = 8$, A y B son disjuntos $\rightarrow N(A \cup B) = ?$

2) Considere A, B y C conjuntos no vacíos de un referencial Re y utilizando Leyes del Álgebra de Conjuntos, simplifique la expresión:

$$[A \cup (B \cup (A \cap A^c))] \cap ((Re - A^c) \cup C)$$

Scanned by CamScanner

3) En una lección escrita dos estudiantes han representado una región sombreada aparentemente de maneras distintas, haciendo uso de operaciones entre los conjuntos no vacíos A, B y C. Considerando que el profesor les otorgó todos los puntos:

a) Demuestre que ambas expresiones son equivalentes usando las propiedades de las operaciones entre conjuntos.

Expresión 1: $[A \cap (C \cup B)^c]$ Expresión 2: $[(B^c \cap A) \cap C^c]$

b) Elabore un diagrama de Venn con una posible representación de los conjuntos A, B y C dentro del referencial Re así como de la región sombreada.

4) Describa por tabulación tres conjuntos no vacíos A, B y C, para demostrar por contraejemplo que la siguiente proposición es falsa:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

2.5 Predicados de una variable

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una expresión en lenguaje común, reconocer si es un predicado.
- Dado un predicado y un conjunto referencial, determinar su conjunto de verdad.
- Dado un predicado compuesto, determinar su conjunto de verdad empleando propiedades de los conjuntos de verdad.
- Demostrar las Leyes de los cuantificadores.

En la sección 2.2, se explicó la diferencia de las expresiones abiertas con respecto a las proposiciones. De ahora en adelante, dichas expresiones en las que se manifiesta una acción o un estado para una variable, recibirán el nombre de predicados.

Definición 2.13 (Predicado de una variable)

Son expresiones en términos de una variable que al ser reemplazadas por los elementos de un conjunto referencial, se convierten en proposiciones. Si x representa a cualquier elemento de Re, entonces la expresión $p(x)$ se definirá como predicado.

La notación para los predicados será: $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, etc.

Ejemplo 2.14 Predicados.

Dado $\text{Re} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $p(x)$: x es impar.

Si $x = 3$, $p(3)$: 3 es impar, es una proposición verdadera.
Si $x = 6$, $p(6)$: 6 es impar, es una proposición falsa.

Por lo tanto, $p(x)$ es un predicado.

Se pueden definir varios predicados con un mismo Re y se pueden realizar operaciones lógicas entre ellos para formar predicados compuestos.

Ejemplo 2.15 Predicados compuestos.

Para el Re y $p(x)$ dados en el ejemplo anterior, considere:

$$q(x): x < 5$$

La expresión: $\neg p(x) \wedge q(x)$ también es un predicado.

Si $x = 2$: $[\neg p(2) \wedge q(2)] \Leftrightarrow 1$
Si $x = 3$: $[\neg p(3) \wedge q(3)] \Leftrightarrow 0$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.16 Predicados compuestos.

Para el Re y $p(x)$ dados anteriormente, considere:

$$r(x): x - 2 = 0$$

La expresión: $p(x) \vee \neg r(x)$ también es un predicado.

Si $x = 2$: $[p(2) \vee \neg r(2)] \Leftrightarrow 0$
Si $x = 3$: $[p(3) \vee \neg r(3)] \Leftrightarrow 1$

Como el lector habrá observado en los ejemplos anteriores, existen elementos del referencial para los cuales los predicados pueden convertirse en proposiciones falsas o verdaderas. Estas últimas son de especial interés ya que los elementos del referencial asociados constituyen lo que a continuación se definirá como conjunto de verdad del predicado.

Definición 2.14 (Conjunto de verdad de un predicado)

Es el conjunto formado por todos los elementos de Re para los cuales el predicado se convierte en una proposición verdadera. La notación a utilizar para este conjunto es $Ap(x)$, y se define como:

$$Ap(x) = \{x/(x \in \text{Re}) \wedge (p(x) \Leftrightarrow 1)\}$$

Ejemplo 2.17 Conjuntos de verdad.

Con referencia a los tres ejemplos anteriores:

$Ap(x) = \{1, 3, 5\}$
$Aq(x) = \{1, 2, 3, 4\}$
$Ar(x) = \{2\}$

Todos los elementos que no pertenezcan al conjunto de verdad de un predicado pero que sean parte del referencial considerado para el análisis, estarán contenidos en el complemento del conjunto de verdad de dicho predicado, lo cual puede expresarse así:

$$A\neg p(x) = A^c p(x)$$

Ejemplo 2.18 Complementos de conjuntos de verdad.

Partiendo de los mismos ejemplos ya citados anteriormente, se puede concluir que:

$A\neg p(x) = \{2, 4, 6\}$
$A\neg q(x) = \{5, 6\}$
$A\neg r(x) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

En relación a los conjuntos de verdad de predicados compuestos, se cumplen las siguientes propiedades:

$A\neg p(x)$	$= A^c p(x)$
$A[p(x) \vee q(x)]$	$= Ap(x) \cup Aq(x)$
$A[p(x) \wedge q(x)]$	$= Ap(x) \cap Aq(x)$
$A[p(x) \rightarrow q(x)]$	$= A^c p(x) \cup Aq(x)$

Cuadro 2.4: Leyes de los conjuntos de verdad de predicados.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.19 Aplicación de las propiedades de los conjuntos de verdad.

Se pueden obtener conjuntos de verdad de predicados compuestos a partir de los conjuntos de verdad de los predicados que lo constituyen.

De esta forma, si se requiere determinar $A[p(x)\rightarrow(q(x)\wedge\neg r(x))]$, se pueden emplear las propiedades anteriormente citadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A[p(x)\rightarrow(q(x)\wedge\neg r(x))] &= A[\neg p(x)\vee(q(x)\wedge\neg r(x))] \\ &= A\neg p(x)\cup(Aq(x)\cap A\neg r(x)) \\ A[p(x)\rightarrow(q(x)\wedge\neg r(x))] &= A^{c}p(x)\cup(Aq(x)\cap A^{c}r(x)) \end{aligned}$$

De esta manera, conociendo los conjuntos de verdad de $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ y el referencial de estos predicados, se puede obtener el conjunto de verdad resultante de esta operación.

En referencia a los ejemplos 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18 se tiene que:

$A^{c}p(x) = \{2, 4, 6\}$
$Aq(x) = \{1, 2, 3, 4\}$
$A^{c}r(x) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

Realizando las operaciones indicadas en $A^{c}p(x)\cup(Aq(x)\cap A^{c}r(x))$, se obtiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, el cual constituye el conjunto de verdad del predicado compuesto requerido.

Dado que ya se ha definido el concepto de predicado y en la sección 2.2 se describieron los dos tipos de cuantificadores que se utilizan en la lógica simbólica, se pueden traducir expresiones del lenguaje natural que combinan predicados y cuantificadores.

Para el efecto, si se tiene un predicado $p(x)$ y un conjunto referencial Re, los siguientes enunciados son proposiciones con cuantificadores:

$$\forall x p(x)$$
$$\exists x p(x)$$

Ya que el primero de ellos se lee "para todo x elemento de Re, se cumple $p(x)$", y el segundo de ellos se lee "existe al menos un x elemento de Re que cumple con $p(x)$", ambos pueden ser calificados como proposiciones verdaderas o falsas.

De aquí que, si un predicado es cuantificado con alguno de los dos cuantificadores definidos, se obtiene una proposición con su correspondiente valor de verdad.

Scanned by CamScanner

Definición 2.15 (Valor de verdad de proposiciones con cuantificadores)

Una proposición que contiene un cuantificador universal es verdadera si y sólo si el conjunto de verdad del predicado es igual al conjunto referencial de la expresión abierta.

$$\forall x p(x) \Leftrightarrow (\mathrm{A}p(x) = \mathrm{Re})$$

Una proposición con un cuantificador existencial es verdadera si y sólo si el conjunto de verdad del predicado no es vacío.

$$\exists x p(x) \Leftrightarrow \neg(\mathrm{A}p(x) = \varnothing)$$

Obsérvese que si $a \in \mathrm{Re}$, los siguientes enunciados hipotéticos son verdaderos:

$$\forall x p(x) \Rightarrow p(a)$$
$$p(a) \Rightarrow \exists x p(x)$$

Considerando a como elemento de Re, el primer enunciado quiere decir: "Si todos los elementos del referencial satisfacen un predicado dado, entonces necesariamente a satisface el predicado". El segundo enunciado quiere decir: "Si a satisface el predicado, entonces necesariamente existirá por lo menos un elemento del referencial que satisface el predicado". Resulta interesante estudiar los valores de verdad de $\forall x p(x)$ y $\exists x p(x)$, en función del conjunto referencial escogido. Consideremos 3 casos:

Caso 1: Conjunto Vacío

Si $\mathrm{Re} = \varnothing$, entonces $\forall x p(x) \Leftrightarrow 1$, debido a que $\mathrm{A}p(x) = \mathrm{Re} = \varnothing$ y $\exists x p(x) \Leftrightarrow 0$, por lo tanto: $\exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$.

Caso 2: Conjunto Unitario

Si $\mathrm{Re} = \{a\}$ y $p(a) \Leftrightarrow 1$, $\forall x p(x) \Leftrightarrow 1$ y $\exists x p(x) \Leftrightarrow 1$, por lo tanto $\exists x p(x) \Rightarrow \forall x p(x)$ y $\forall x p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$. Luego, se puede concluir que $\exists x p(x) \Leftrightarrow \forall x p(x)$.

Caso 3: N(Re) > 1

En este caso siempre se cumple que: $\forall x p(x) \Rightarrow \exists x p(x)$. De aquí en adelante, vamos a considerar en la mayoría de los problemas, este tipo de conjunto como referencial para los predicados que se definan.

2.5.1 Leyes de cuantificadores

DE MORGAN	$\neg\forall x p(x)$	$\Leftrightarrow$	$\exists x \neg p(x)$
	$\neg\exists x p(x)$	$\Leftrightarrow$	$\forall x \neg p(x)$
DISTRIBUTIVAS	$\forall x[p(x) \wedge q(x)]$	$\Leftrightarrow$	$[\forall x p(x)] \wedge [\forall x q(x)]$
	$\exists x[p(x) \vee q(x)]$	$\Leftrightarrow$	$[\exists x p(x)] \vee [\exists x q(x)]$
	$[\forall x p(x) \vee \forall x q(x)]$	$\Rightarrow$	$\forall x[p(x) \vee q(x)]$
	$\exists x[p(x) \wedge q(x)]$	$\Rightarrow$	$[\exists x p(x)] \wedge [\exists x q(x)]$

Cuadro 2.5: Leyes de cuantificadores.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.20 Demostración de Leyes de cuantificadores.

Demuestre formalmente la primera Ley de De Morgan de cuantificadores.

$\forall x p(x) \Leftrightarrow (\mathrm{A}p(x) = \mathrm{Re})$	Definición de cuantificador universal
$\forall x p(x) \Leftrightarrow [(\mathrm{A}^{c}p(x)) = \varnothing]$	Complementación del Referencial
$\forall x p(x) \Leftrightarrow (\mathrm{A}\neg p(x) = \varnothing)$	Propiedad de conjuntos de verdad
$\neg\forall x p(x) \Leftrightarrow \neg(\mathrm{A}\neg p(x) = \varnothing)$	Negación de la proposición previa
$\neg\forall x p(x) \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$	Definición de cuantificador existencial

Ejemplo 2.21 Demostración de Leyes de cuantificadores.

Demuestre formalmente la primera Ley Distributiva:

$$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x p(x)] \wedge [\forall x q(x)]$$

$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \mathrm{A}[p(x) \wedge q(x)] = \mathrm{Re}$	Definición de cuantificador universal
$\Leftrightarrow \mathrm{A}p(x) \cap \mathrm{A}q(x) = \mathrm{Re}$	Propiedad de conjuntos de verdad
$\Leftrightarrow (\mathrm{A}p(x) = \mathrm{Re}) \wedge (\mathrm{A}q(x) = \mathrm{Re})$	Álgebra de conjuntos
$\forall x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall x p(x)] \wedge [\forall x q(x)]$	Definición de cuantificador universal

Ejemplo 2.22 Demostración por contraejemplo.

Por contraejemplo se puede demostrar que las dos últimas Leyes de cuantificadores no son válidas si se consideran las implicaciones recíprocas.

Sean:

$\mathrm{Re} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$p(x)$: x es par

$q(x)$: x es impar

Se puede comprobar que:

$\forall x[p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow 1$, $\forall x p(x) \Leftrightarrow 0$, $\forall x q(x) \Leftrightarrow 0$

$\exists x[p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow 0$, $\exists x p(x) \Leftrightarrow 1$, $\exists x q(x) \Leftrightarrow 1$

Es evidente entonces que, en este caso, las condicionales:

$\forall x[p(x) \vee q(x)] \rightarrow [\forall x p(x) \vee \forall x q(x)]$; y,

$[\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)] \rightarrow \exists x[p(x) \wedge q(x)]$

son falsas.

Scanned by CamScanner

1) Suponiendo un conjunto referencial adecuado, indique con un ✓ si la expresión constituye un predicado y una **X** si no lo es.

a) h es un número primo.
b) 3 es una letra.
c) La letra g es una vocal.
d) t es un día de la semana.
e) Martha es oriunda de Lago Agrio.

2) Dado el conjunto referencial Re = {samán, roble, ceibo, acacia, guayacán}, determine el conjunto de verdad de cada predicado.

a) $p(x)$: x es una palabra aguda.

b) $q(x)$: x lleva tilde.

c) $r(x)$: x comienza con la letra g.

d) $s(x)$: x termina en vocal.

e) $t(x)$: x es el nombre de un árbol.

3) Considerando los predicados del numeral anterior y utilizando propiedades, obtenga los conjuntos de verdad de los siguientes predicados.

a) $\neg r(x)$

b) $r(x) \rightarrow s(x)$

c) $p(x) \vee q(x)$

d) $p(x) \wedge \neg t(x)$

Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

4) Siendo Re = {1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 100}, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x, x + 3 < 103$

b) $\exists! x, \frac{1}{x} = x$

c) $\forall x$, x no es el número ocho.

d) $\exists x, x^2 + 7 = 16$

e) $\forall x$, x es un número positivo.

5) Proponga un contraejemplo para la siguiente proposición falsa:

"Si $[\forall x\, p(x) \equiv 0]$, entonces $[\text{Re} = \varnothing]$".

Scanned by CamScanner

2.6 Razonamientos con predicados y cuantificadores

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Reconocer la estructura de un razonamiento con predicados y cuantificadores.
- Dado un razonamiento con predicados y cuantificadores, establecer su validez empleando Teoría de Conjuntos.
- Dado un razonamiento con predicados y cuantificadores, establecer su validez empleando las Leyes del Álgebra Proposicional.

Como lo hemos visto en la sección 1.6 del capítulo anterior, la estructura de un razonamiento consiste en la conjunción de premisas o hipótesis que conforman el antecedente, la condicional como operador lógico principal; y, una conclusión, como consecuente.

Para esta sección, tendremos las mismas estructuras, pero tanto las proposiciones del antecedente como las del consecuente serán cuantificadas. Como los predicados al ser cuantificados, sea por el cuantificador existencial o el universal se convierten en proposiciones, entonces surge la necesidad de considerar también el caso de los razonamientos con cuantificadores.

En la siguiente tabla se muestran algunas expresiones en el lenguaje común, su traducción empleando Lógica Proposicional y su interpretación en términos de la Teoría de Conjuntos, las cuales nos serán de ayuda para determinar la validez de un razonamiento con predicados y cuantificadores.

Lenguaje común	Lógica proposicional	Teoría de Conjuntos
a satisface $p(x)$	$p(\mathrm{a}) \equiv 1$	$\mathrm{a} \in \mathrm{A}p(x)$
Todo $p(x)$ es $q(x)$	$\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$	$\mathrm{A}p(x) \subseteq \mathrm{A}q(x)$
Ningún $p(x)$ es $q(x)$	$\forall x[p(x) \rightarrow \neg q(x)]$	$\mathrm{A}p(x) \subseteq \mathrm{A}^{\mathrm{c}}q(x)$
Existen $p(x)$ que son $q(x)$	$\exists x[p(x) \wedge q(x)]$	$(\mathrm{A}p(x) \cap \mathrm{A}q(x)) \neq \varnothing$
Existen $p(x)$ que no son $q(x)$	$\exists x[p(x) \wedge \neg q(x)]$	$(\mathrm{A}p(x) \cap \mathrm{A}^{\mathrm{c}}q(x)) \neq \varnothing$

Cuadro 2.6: Traducciones al lenguaje formal y de conjuntos.

Para determinar la validez de un razonamiento utilizando Teoría de Conjuntos se debe empezar construyendo un diagrama de Venn de las premisas, considerando para ello todos los casos posibles; y luego, se deberá verificar si la conclusión dada contradice o no las hipótesis presentes en los diagramas. De esta manera, para que un razonamiento sea válido, la conclusión deberá ratificarse para todos los diagramas construidos; caso contrario, el razonamiento será una falacia.

Ejemplo 2.23 Validez de un razonamiento utilizando Teoría de Conjuntos.

Determine si el siguiente razonamiento es válido:
"Todos los números racionales son reales. Ningún número imaginario es real. Algunos números complejos son reales. En consecuencia, ningún número imaginario es racional".

Scanned by CamScanner

Solución:
Se procede primero a definir el conjunto referencial:

$$\text{Re} = \{x/x \text{ es un número}\}$$

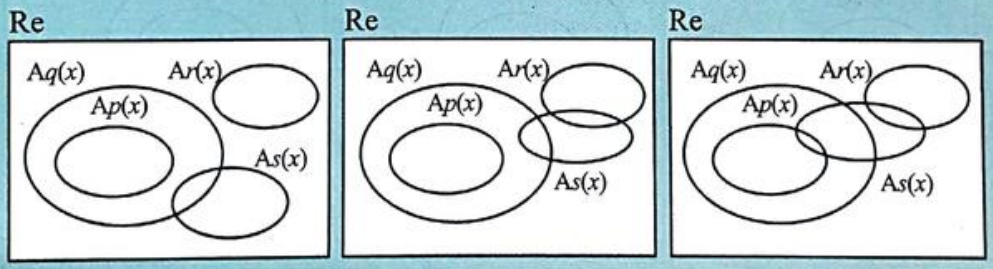
Luego, se identifican los predicados presentes:

$p(x)$: x es número racional.
$q(x)$: x es número real.
$r(x)$: x es número imaginario.
$s(x)$: x es número complejo.

A partir de estos predicados, se traduce al lenguaje formal las hipótesis y la conclusión propuesta, estableciendo su equivalencia lógica empleando la Teoría de Conjuntos.

$$\begin{aligned} H_1&: \forall x[p(x)\rightarrow q(x)] \equiv Ap(x)\subseteq Aq(x)\\ H_2&: \forall x[r(x)\rightarrow\neg q(x)] \equiv Ar(x)\subseteq A^c q(x)\\ H_3&: \exists x[s(x)\wedge q(x)] \equiv \neg[As(x)\cap Aq(x)=\varnothing]\\ C&: \forall x[r(x)\rightarrow\neg p(x)] \equiv Ar(x)\subseteq A^c p(x)\end{aligned}$$

A continuación se construyen los posibles diagramas de Venn para las premisas:



En este caso, al construir tres posibles diagramas conteniendo las hipótesis del razonamiento, se puede observar que la conclusión propuesta se ratifica en todos los casos, no evidenciándose contradicción alguna, a partir de lo cual se concluye que el razonamiento es válido.

Como el lector podrá notar, construir un solo diagrama en el que se cumplan todas las hipótesis no es condición suficiente para concluir respecto a la validez del razonamiento, por ello la importancia de analizar las diferentes interpretaciones posibles, especialmente aquellas que no hacen válido el razonamiento.

Ejemplo 2.24 Validez de un razonamiento utilizando Teoría de Conjuntos.

Determine la validez del siguiente razonamiento:
"Todos los matemáticos son personas interesantes. Ningún vendedor de seguros es matemático. Existen matemáticos que son profesores. Enrique es profesor. Por lo tanto, Enrique no vende seguros".

Scanned by CamScanner

Solución:
Se procede primero a definir el conjunto referencial:

$$\text{Re} = \{x / x \text{ es persona}\}$$

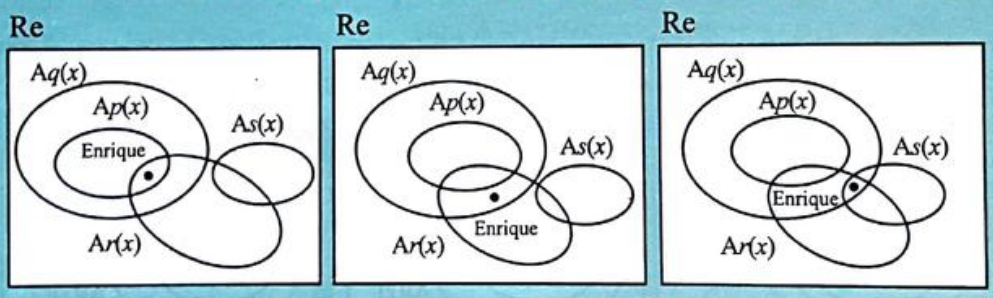
Luego, se identifican los predicados presentes:

$p(x)$: x es matemático.
$q(x)$: x es interesante.
$r(x)$: x es profesor.
$s(x)$: x vende seguros.

A partir de estos predicados, se traduce al lenguaje formal las hipótesis y la conclusión propuesta, estableciendo su equivalencia lógica empleando la Teoría de Conjuntos.

$$\begin{aligned}
H_1&: \forall x[p(x)\rightarrow q(x)] \equiv Ap(x) \subseteq Aq(x)\\
H_2&: \forall x[s(x)\rightarrow \neg p(x)] \equiv As(x) \subseteq A^c p(x)\\
H_3&: \exists x[p(x)\wedge r(x)] \equiv \neg[Ap(x)\cap Ar(x))=\varnothing]\\
H_4&: r(\text{Enrique}) \Leftrightarrow 1 \equiv \text{Enrique} \in Ar(x)\\
C&: s(\text{Enrique}) \Leftrightarrow 0 \equiv \neg(\text{Enrique} \in As(x))
\end{aligned}$$

A continuación se construyen los posibles diagramas de Venn para las premisas:



Note que así como hemos logrado construir dos diagramas en los cuales la conclusión se cumple, podemos encontrar muchos más; sin embargo, al construir el tercer diagrama, se puede evidenciar que se contradice la conclusión planteada, con lo cual se confirma que el razonamiento no es válido.

Tal como el lector puede observar, bastará con construir un diagrama que evidencie que se contradice la conclusión, para concluir que el razonamiento no es válido. Esta argumentación se basa en la demostración por contraejemplo descrita en el capítulo de Lógica.

A más de la forma planteada, es posible, mediante las Leyes del Álgebra Proposicional determinar la validez de un razonamiento con predicados y cuantificadores.

En la aplicación de las Leyes antes referidas es muy común utilizar el principio de particularización referido en la sección anterior, en el sentido de que si un predicado se convierte en una proposición verdadera para todos los elementos de un conjunto referencial, entonces resulta ser una proposición verdadera, en particular, para cada elemento de dicho conjunto.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.25 Validez de un razonamiento empleando Leyes del Álgebra Proposicional.

Determine la validez del siguiente razonamiento:

Todos los alumnos de Ingeniería estudian Álgebra Lineal. Luis es alumno de Ingeniería. Por lo tanto, Luis estudia Álgebra Lineal.

Solución:

Se define el conjunto referencial:

$\text{Re} = \{x/x \text{ es persona}\}$

Se definen los predicados:

$p(x)$: x es alumno de Ingeniería.
$q(x)$: x estudia Álgebra Lineal.

Se identifican las hipótesis y la conclusión:

H_1: $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$
H_2: $p(\text{Luis})$
C : $q(\text{Luis})$

Con lo cual, la estructura lógica del razonamiento sería:

$$[H_1 \wedge H_2] \rightarrow C$$

$$[\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge p(\text{Luis})] \rightarrow q(\text{Luis})$$

A partir de la estructura anterior, se tiene:

$[\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge p(\text{Luis})] \rightarrow [(p(\text{Luis}) \rightarrow q(\text{Luis})) \wedge p(\text{Luis})]$
Principio de particularización.

$[(p(\text{Luis}) \rightarrow q(\text{Luis})) \wedge p(\text{Luis})] \rightarrow q(\text{Luis})$
Ley Modus Ponendo Ponens.

Luego, el razonamiento es válido.

Scanned by CamScanner

1) Traduzca al lenguaje formal las siguientes proposiciones utilizando lógica proposicional, definiendo previamente predicados para cada caso y haciendo uso de cuantificadores, según corresponda. Considere $\mathrm{Re} = \{x/x \text{ es persona}\}$.

a) Algunas personas que nacieron en Ecuador no saben hablar quechua.

b) Todos los ciclistas tienen una excelente condición física.

c) Existen personas que usan la ruta Viva y ahorran tiempo.

d) Scarlett visita Las Islas Encantadas con frecuencia.

2) Suponga un conjunto referencial adecuado e interprete con notación de conjuntos las siguientes proposiciones:

a) $\forall x[q(x) \rightarrow p(x)]$

b) $\exists x[\neg r(x) \wedge p(x)]$

c) $\forall x[\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)]$

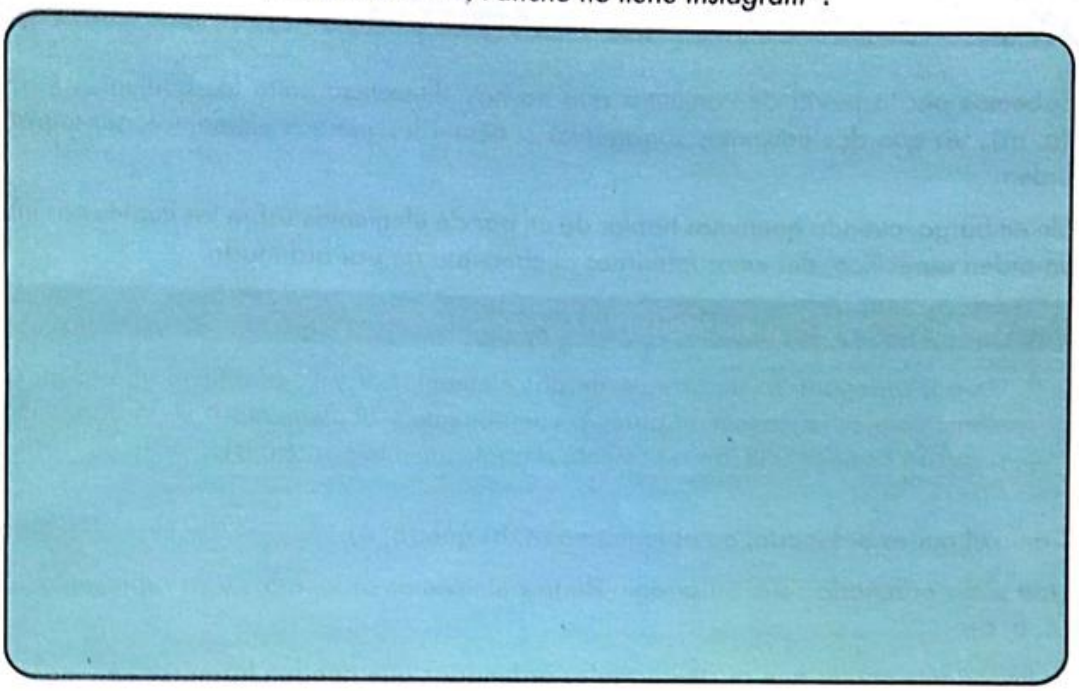
d) $p(\text{María}) \equiv 1$

e) $q(\text{Mario}) \equiv 0$

Scanned by CamScanner

3) Utilizando Teoría de Conjuntos, determine si el siguiente razonamiento es o no válido:

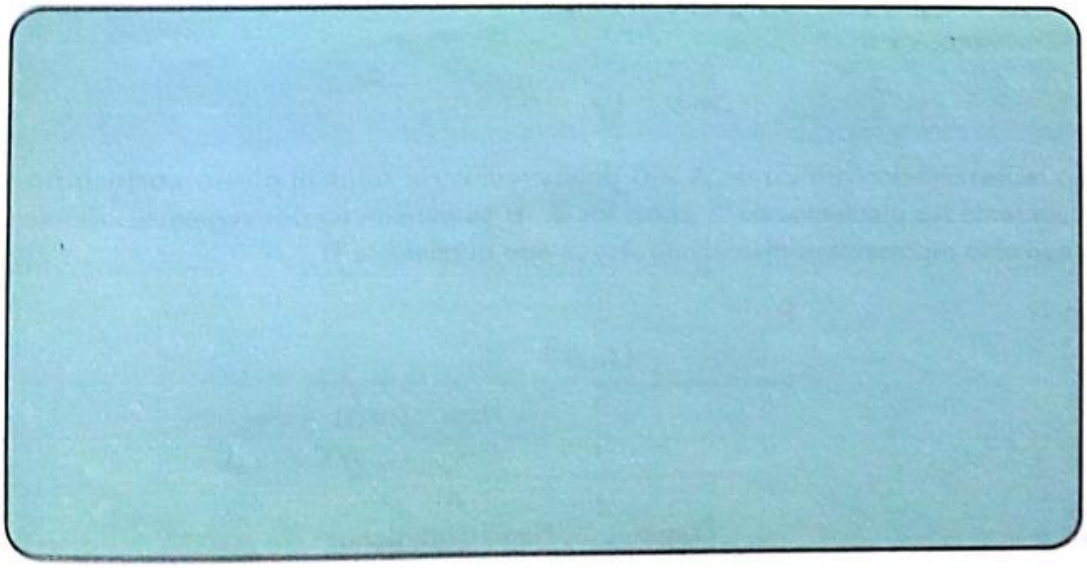
"Todos los que tienen Facebook, tienen Twitter e Instagram; pero Pancho no tiene Twitter. Por tanto, Pancho no tiene Instagram".



4) Demuestre que el siguiente razonamiento es válido, utilizando Álgebra Proposicional.

"Todas las transformaciones lineales son funciones. Existen transformaciones lineales que son inversibles. Entonces, algunas funciones son inversibles".

Puede utilizar la tautología: $[((p \to q) \wedge (p \wedge r))] \Rightarrow (q \wedge r)$.



Scanned by CamScanner

2.7 Pares Ordenados y Producto Cartesiano

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dados dos conjuntos, construir el producto cartesiano entre ellos.
- Dados varios conjuntos, determinar la cardinalidad del producto cartesiano entre ellos.
- Demostrar las propiedades del producto cartesiano.

Sabemos por la teoría de conjuntos que no hay diferencia entre los conjuntos $\{m, n\}$ y $\{n, m\}$, ya que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, sin importar el orden.

Sin embargo, cuando queremos hablar de un par de elementos sobre los cuales nos interesa un orden específico, debemos referirnos al concepto de par ordenado.

Definición 2.16 (Par ordenado)

Un par ordenado es un arreglo de dos elementos, a y b, que tiene un orden; al elemento a se lo denomina primera componente y al elemento b se lo denomina segunda componente. Se representa simbólicamente por: (a, b).

Como el par es ordenado, no es lo mismo (a, b) que (b, a).

Una terna ordenada sería un arreglo de tres elementos ordenados y su representación es: (a, b, c).

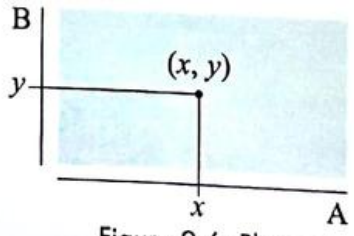
Es importante anotar que existen arreglos ordenados que pueden formarse con más de tres componentes.

Definición 2.17 (Producto cartesiano)

Sean dos conjuntos A y B, no vacíos, denominaremos producto cartesiano entre A y B, al conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente pertenece al conjunto A, y la segunda al conjunto B. Simbólicamente, lo representaremos como: $A \times B$.

$$A \times B = \{(x, y) / (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

La representación gráfica de $A \times B$ puede realizarse sobre el **plano cartesiano**, en el cual tanto los elementos de A como los de B se alinean en dos segmentos de recta. Un segmento representará al conjunto A y el otro al conjunto B.



$x \in A$
$y \in B$
$(x, y) \in A \times B$

Figura 2.6: Plano Cartesiano.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.26 Producto cartesiano entre dos conjuntos.

$A = \{*, \&, \#\}$
$B = \{@, \$, \clubsuit\}$
$A \times B = \{(*, @), (*, \$), (*, \clubsuit), (\&, @), (\&, \$), (\&, \clubsuit), (\#, @), (\#, \$), (\#, \clubsuit)\}$

En este ejemplo la cardinalidad del conjunto resultante es $N(A \times B) = 9$.

Generalizando, la cardinalidad de $A \times B$ es:

$$N(A \times B) = N(A)\, N(B)$$

Ejemplo 2.27 Producto cartesiano entre tres conjuntos.

$A = \{m, n\}$
$B = \{1, 2, 3\}$
$C = \{\oplus, \clubsuit\}$
$A \times B \times C = \{(m, 1, \oplus), (m, 1, \clubsuit), (m, 2, \oplus), (m, 2, \clubsuit), (m, 3, \oplus), (m, 3, \clubsuit),$
$(n, 1, \oplus), (n, 1, \clubsuit), (n, 2, \oplus), (n, 2, \clubsuit), (n, 3, \oplus), (n, 3, \clubsuit)\}$

En este ejemplo la cardinalidad del conjunto resultante es $N(A \times B \times C) = 12$.

Generalizando, la cardinalidad de $A \times B \times C$ es:

$$N(A \times B \times C) = N(A)\, N(B)\, N(C)$$

Con esto se puede concluir que la **cardinalidad del producto cartesiano** es el producto de las cardinalidades de los conjuntos que intervienen en la operación.

Ejemplo 2.28 Cardinalidad del producto cartesiano.

Considerando los conjuntos A, B y C tales que: $N(A) = 2$, $N(B) = 3$, $N(C) = 4$ y $N(B \cap C) = 2$, determine $N[A \times (B \cup C)]$.

Solución:

Con base en la definición de $N(A \times B)$, tenemos que:

$$N[A \times (B \cup C)] = N(A)\, N(B \cup C)$$

Por otra parte:

$$N(B \cup C) = N(B) + N(C) - N(B \cap C) = 3 + 4 - 2 = 5$$

Luego:

$$N[A \times (B \cup C)] = (2)(5) = 10$$

Scanned by CamScanner

El producto cartesiano tiene las siguientes propiedades:

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

Cuadro 2.7: Propiedades del Producto Cartesiano.

Ejemplo 2.29 Demostración de propiedades del producto cartesiano.

Demuestre formalmente:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

p.d. $(x, y) \in [A \times (B \cup C)] \equiv (x, y) \in [(A \times B) \cup (A \times C)]$

$\equiv (x \in A) \wedge [y \in (B \cup C)]$	Definición de Producto Cartesiano
$\equiv (x \in A) \wedge [(y \in B) \vee (y \in C)]$	Definición de Unión entre conjuntos
$\equiv [(x \in A) \wedge (y \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (y \in C)]$	Aplicación de Ley Distributiva
$\equiv [(x, y) \in (A \times B)] \vee [(x, y) \in (A \times C)]$	Definición de Producto Cartesiano
$\equiv (x, y) \in [(A \times B) \cup (A \times C)]$	Definición de Unión entre conjuntos

Ejemplo 2.30 Demostración de propiedades del producto cartesiano.

Demuestre formalmente:

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

p.d. $(x, y) \in [A \times (B - C)] \equiv (x, y) \in [(A \times B) - (A \times C)]$

$\equiv (x \in A) \wedge [y \in (B - C)]$	Definición de Producto Cartesiano
$\equiv (x \in A) \wedge [(y \in B) \wedge \neg (y \in C)]$	Definición de Diferencia entre conjuntos
$\equiv (x \in A) \wedge (x \in A) \wedge [(y \in B) \wedge \neg (y \in C)]$	Ley de Idempotencia de la conjunción
$\equiv [(x \in A) \wedge (y \in B)] \wedge [(x \in A) \wedge \neg (y \in C)]$	Leyes Conmutativa y Asociativa
$\equiv [(x, y) \in (A \times B)] \wedge \neg [(x, y) \in (A \times C)]$	Definición de Producto Cartesiano
$\equiv (x, y) \in [(A \times B) - (A \times C)]$	Definición de Diferencia entre conjuntos

Scanned by CamScanner

2.7 Pares Ordenados y Producto Cartesiano

Autoevaluación

1) Construya doce pares ordenados considerando los elementos del conjunto A.

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta\}$$

2) Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ y $C = \{6, 7\}$, tabule:

a) $A \times B$

b) $B \times C$

c) $A \times C$

d) $(A \cap B) \times C$

e) $(A \Delta B) \times C$

Scanned by CamScanner

3) Considere los conjuntos A, B y C del ejercicio anterior. Determine la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

a) $A \times B \times C$

b) $A \times (B \cup C)$

c) $B \times (A \cup B \cup \{5\} \cup C)$

d) $(B - A) \times (A - B)$

e) $\{e, v, t\} \times [(A \Delta B) \times C]$

4) Demuestre por contraejemplo que la siguiente proposición es FALSA:

$$A \times B = B \times A$$

5) Utilizando Álgebra Proposicional, demuestre formalmente que:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Scanned by CamScanner

2.8 Predicados de dos variables

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dado un predicado, identificar sus dos variables y sugerir un conjunto referencial para las mismas.
- Dado un predicado y los conjuntos referenciales de sus dos variables, determinar su conjunto de verdad.
- Dado un predicado de dos variables compuesto, determinar su conjunto de verdad empleando propiedades de los conjuntos de verdad.
- Determinar el valor de verdad de proposiciones que incluyan predicados compuestos de dos variables y cuantificadores.

Suponga que se tiene el conjunto referencial que incluye a los trabajadores de una empresa. Tal como se ha estudiado, si x representa a cada trabajador, la expresión $p(x)$: x es responsable, constituye un predicado de una variable.

Pero ¿qué ocurriría si se necesita relacionar a trabajadores de la empresa con diferentes características? ¿Se podría definir un predicado que satisfaga esta necesidad?

Para lograr este objetivo, resulta imprescindible definir predicados de varias variables, tal como se presenta a continuación.

Definición 2.18 (Predicados de varias variables)

Son expresiones abiertas en términos de varias variables que al ser reemplazadas por los elementos de un conjunto referencial con respecto a cada variable, se convierten en proposiciones. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ representan a cualquier elemento de $\text{Re}_{x_1}, \text{Re}_{x_2}, \ldots, \text{Re}_{x_n}$ respectivamente, entonces la expresión $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se definirá como predicado de n variables.

La notación para los predicados de varias variables será: $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, etc.

Las aplicaciones de predicados de varias variables serán de mucha utilidad en futuros capítulos de esta obra, así como en el estudio de las Matemáticas en general; por ejemplo, cuando se plantea una ecuación que incluye una variable, ésta podrá ser analizada como un predicado de una única variable, a partir de la determinación de un conjunto referencial. Por otra parte, si se plantea un sistema de ecuaciones, el mismo será analizado como un predicado de tantas variables como incógnitas estén presentes. Sin dejar de lado la importancia de los predicados de varias variables, para fines específicos, en esta sección se estudiarán predicados que contengan sólo dos variables, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.31 Predicados de dos variables.

Dados $\text{Re}_x = \{1, 2, 3\}$, $\text{Re}_y = \{4, 5, 6, 7\}$ y $p(x, y)$: "x es la mitad de y":
Si $x = 3$ e $y = 6$, $p(3, 6)$: 3 es la mitad de 6, es una proposición verdadera.
Si $x = 2$ e $y = 7$, $p(2, 7)$: 2 es la mitad de 7, es una proposición falsa.

Análogamente a los predicados de una variable, se pueden definir predicados de dos variables compuestos, tal como se ilustra a continuación.

Ejemplo 2.32 Predicados de dos variables compuestos.

Si Re_x, Re_y y $p(x, y)$ son los mismos del ejemplo anterior, y además se considera al predicado $q(x, y)$: y es el triple de x, se puede evidenciar que la expresión $[p(x, y) \veebar q(x, y)]$ constituye un predicado compuesto.

Así, si $x = 3$ e $y = 6$: $[p(3, 6) \veebar q(3, 6)] \Leftrightarrow [1 \veebar 0] \Leftrightarrow 1$
Mientras que, si $x = 2$ y $y = 7$: $[p(2, 7) \veebar q(2, 7)] \Leftrightarrow [0 \veebar 0] \Leftrightarrow 0$

Ejemplo 2.33 Predicados de dos variables compuestos.

Si Re_x, Re_y, $p(x, y)$ y $q(x, y)$ son los mismos de los ejemplos anteriores y además se considera al predicado $r(x, y)$: x es menor que y, se puede constatar que la expresión: $[(p(x, y) \rightarrow q(x, y)) \wedge r(x, y)]$ también es un predicado compuesto.

En este caso, si $x = 3$ e $y = 6$: $[(p(3, 6) \rightarrow q(3, 6)) \wedge r(3, 6)] \equiv 0$
Por otra parte, si $x = 2$ e $y = 7$: $[(p(2, 7) \rightarrow q(2, 7)) \wedge r(2, 7)] \equiv 1$

Si a partir de los predicados y conjuntos referenciales de los ejemplos anteriores se construye un predicado de la forma $p(x, x)$, este se entendería como "x es la mitad de sí mismo"; de igual manera, al construir el predicado $q(y, y)$ en lenguaje común estaríamos diciendo que "y es el doble de sí mismo". En el primer caso, la variable y se conoce como variable libre, mientras que x es una variable ligada. En el segundo, la variable y es ligada, mientras que x es una variable libre.

Tal como se ha podido observar en esta sección, existen elementos de los conjuntos referenciales para los cuales los predicados pueden convertirse en proposiciones falsas o verdaderas. Éstas últimas son de especial interés y los elementos del referencial asociados constituyen lo que a continuación se definirá como conjunto de verdad de predicados de varias variables.

Definición 2.19 (Conjunto de verdad de predicados de varias variables)

Es el conjunto formado por todos los elementos ordenados $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tales que $x_1 \in \text{Re}_{x_1}$, $x_2 \in \text{Re}_{x_2}$, $\ldots$, $x_n \in \text{Re}_{x_n}$ para los cuales el predicado $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se convierte en una proposición verdadera. La notación a utilizar para este conjunto es $Ap(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, y formalmente se define como:

$$Ap(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)/(x_1 \in \text{Re}_{x_1}, x_2 \in \text{Re}_{x_2}, \ldots, x_n \in \text{Re}_{x_n}) \wedge (p(x_1,x_2,\ldots,x_n) \Leftrightarrow 1)\}$$

Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

Al centrar nuestro estudio en predicados de dos variables, el alcance de sus conjuntos de verdad estará también limitado a aquellos casos en los que se relacionen sólo dos variables. Dichos conjuntos podrán ser vacíos o estar integrados por pares ordenados.

Ejemplo 2.34 Conjuntos de verdad de predicados de dos variables.

Con referencia a los tres ejemplos anteriores:
$Ap(x, y) = \{(2, 4), (3, 6)\}$
$Aq(x, y) = \{(2, 6)\}$
$Ar(x, y) = \text{Re}_x \times \text{Re}_y$

Todos los elementos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que no pertenezcan al conjunto de verdad de un predicado de varias variables, estarán contenidos en el complemento del conjunto de verdad de dicho predicado, lo cual puede denotarse como: $A\neg p(x_1, x_2, ..., x_n) = A^c p(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Ejemplo 2.35 Complementación de conjuntos de verdad de predicados de dos variables.

A partir del ejemplo anterior:
$A\neg p(x, y) = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 7)\}$
$A\neg q(x, y) = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 4), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7)\}$
$A\neg r(x, y) = \varnothing$

Así como se aplicaron propiedades a conjuntos de verdad en predicados de una sola variable, es posible hacerlo para aquellos de dos variables.

Ejemplo 2.36 Aplicación de las propiedades de los conjuntos de verdad en predicados de dos variables.

Empleando propiedades de los conjuntos de verdad, determine el conjunto de verdad del predicado compuesto $[(p(x, y) \vee r(x, y)) \rightarrow q(x, y)]$, tomando como referencia los mismos predicados de los ejemplos anteriores.

Solución:

$$A[(p(x, y) \vee r(x, y)) \rightarrow q(x, y)] = A[\neg(p(x, y) \vee r(x, y)) \vee q(x, y)]$$
$$= A[(\neg p(x, y) \wedge \neg r(x, y)) \vee q(x, y)]$$
$$A[(p(x, y) \vee r(x, y)) \rightarrow q(x, y)] = (A^c p(x, y) \cap A^c r(x, y)) \cup Aq(x, y)$$

Realizando las operaciones indicadas en $(A^c p(x, y) \cap A^c r(x, y)) \cup Aq(x, y)$, se obtiene el conjunto unitario $\{(2, 6)\}$ el cual constituye el conjunto de verdad del predicado compuesto solicitado.

Scanned by CamScanner

Así como en el caso de predicados de una variable, los predicados de dos variables también pueden ser relacionados con cuantificadores para estructurar proposiciones, tal como se muestra en el ejemplo 2.37.

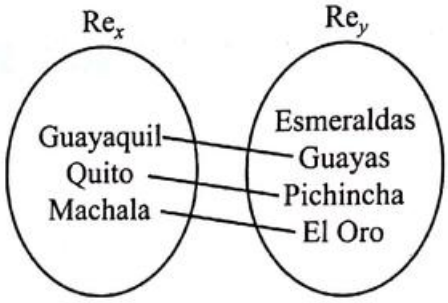
Ejemplo 2.37 Valor de verdad de proposiciones que incluyen cuantificadores y predicados de dos variables.

Considerando los conjuntos referenciales $\text{Re}_x = \{\text{Guayaquil, Quito, Machala}\}$, $\text{Re}_y = \{\text{Esmeraldas, Guayas, Pichincha, El Oro}\}$ y el predicado $p(x, y)$: x es capital de la provincia y, califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas:

a) $\forall x\, \forall y\, p(x, y)$
b) $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$
c) $\exists y\, \forall x\, p(x, y)$
d) $\exists x\, \exists y\, p(x, y)$
e) $\exists x\, \forall y\, p(x, y)$

Solución:

Empezaremos realizando un diagrama representativo de la situación:



a) $\forall x\, \forall y\, p(x, y)$: Cada ciudad del conjunto referencial Re_x es capital de cada provincia del conjunto referencial Re_y.

Esta proposición es falsa, ya que todas las ciudades del conjunto Re_x no son capitales de todas las provincias del conjunto Re_y.

b) $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$: A cada capital del conjunto referencial Re_x le corresponde al menos una provincia del conjunto referencial Re_y.

Esta proposición es verdadera, ya que cada capital del conjunto referencial Re_x está relacionada con una provincia del conjunto referencial Re_y.

c) $\exists y\, \forall x\, p(x, y)$: Existe al menos una provincia del conjunto referencial Re_y cuyas capitales sean todas las ciudades del conjunto referencial Re_x.

Esta proposición es falsa porque a ninguna provincia del conjunto referencial Re_y puede corresponderle más de una capital del conjunto referencial Re_x.

d) $\exists x\, \exists y\, p(x, y)$: Al menos una ciudad del conjunto referencial Re_x es capital de al menos una provincia del conjunto referencial Re_y.

Esta proposición es verdadera, ya que las tres capitales se están relacionando con sus respectivas provincias.

Scanned by CamScanner

e) $\exists x\, \forall y\, p(x, y)$: Existe al menos una ciudad del conjunto referencial Re_x que sea capital de todas las provincias del conjunto referencial Re_y.

Esta proposición es falsa, ya que ninguna ciudad del conjunto referencial Re_x puede ser capital de todas las provincias contenidas en el conjunto referencial Re_y.

Tal como se aprecia en el ejercicio anterior, las expresiones $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$ y $\exists y\, \forall x\, p(x, y)$, no necesariamente son equivalentes. En el cuadro 2.8 se presentan equivalencias e implicaciones lógicas que pueden ser de utilidad.

$\forall x\, \forall y\, p(x, y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, p(x, y)$
$\exists x\, \exists y\, p(x, y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, p(x, y)$
$\exists y\, \forall x\, p(x, y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, p(x, y)$
$\exists x\, \forall y\, p(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, p(x, y)$

Cuadro 2.8: Cuantificadores y predicados de dos variables.

Tomando como punto de partida las Leyes de De Morgan para cuantificadores en el caso de predicados de una variable, resulta interesante su aplicación cuando se trabaja con predicados de dos variables, tal como se requiere en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.38 Leyes de De Morgan para cuantificadores y predicados de dos variables.

Determine la negación de la siguiente proposición:

"Todas las computadoras tienen dañada alguna de sus teclas".

Solución:

Primero, se definen los conjuntos referenciales involucrados:

$\mathrm{Re}_x = \{x/x \text{ es computadora}\}$
$\mathrm{Re}_y = \{y/y \text{ es tecla}\}$

Luego, se identifica el predicado de dos variables y se realiza la traducción al lenguaje formal de la proposición dada en el enunciado:

$p(x, y)$: x tiene dañada y

$\forall x\, \exists y\, p(x, y)$

Aplicando las Leyes de De Morgan para cuantificadores, se plantea la negación de la proposición dada: $\neg(\forall x\, \exists y\, p(x, y)) \equiv \exists x\, \forall y\, \neg p(x, y)$

Parafraseando la negación de la proposición dada, se tiene:

"Existen computadoras que no tienen dañadas todas sus teclas".

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.39 Valor de verdad de proposiciones que incluyen cuantificadores y predicados de dos variables que son compuestos.

Sean los conjuntos referenciales: $\text{Re}_x = \{0, 1, 2\}$, $\text{Re}_y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y el predicado de dos variables $p(x, y)$: x es mayor o igual que y, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $[\forall x\, \exists y\, p(x, y) \rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y)]$

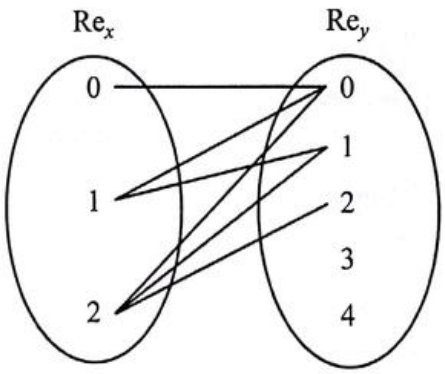
b) $[\forall y\, \exists x\, p(x, y) \rightarrow \exists y\, \forall x\, p(x, y)]$

Solución:

Reemplazando por x los elementos de Re_x y por y los elementos de Re_y tal que $p(x, y)$ sea una proposición verdadera, tenemos que el conjunto de verdad $Ap(x, y)$ es:

$$Ap(x, y) = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$$

Luego, un diagrama puede ayudar a determinar el valor de verdad de las proposiciones:



Note que todos los elementos de Re_x están relacionados con al menos un elemento de Re_y, por lo tanto la proposición $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$ es verdadera.

Además, no existe elemento alguno de Re_x relacionado con todos los elementos de Re_y, por lo tanto la proposición $\exists x\, \forall y\, p(x, y)$ es falsa.

Así mismo, podemos notar que la proposición $\forall y\, \exists x\, p(x, y)$ es falsa, mientras que $\exists y\, \forall x\, p(x, y)$ es verdadera.

Luego, tenemos que:

$$[\forall x\, \exists y\, p(x, y) \rightarrow \exists x\, \forall y\, p(x, y)] \equiv 0$$

$$[\forall y\, \exists x\, p(x, y) \rightarrow \exists y\, \forall x\, p(x, y)] \equiv 1$$

Scanned by CamScanner

2.8 Predicados de dos variables

Autoevaluación

1) Dado el predicado de dos variables $p(x, y)$: x viaja con frecuencia a y, sugiera dos posibles referenciales para cada variable.

Re_x

Re_y

2) Determine el valor de verdad de las proposiciones, considerando que:

$Re_x = \{i, v, r, s\}$ $\quad$ $Re_y = \{1, a, 2, b, c\}$

$p(x, y)$: Tanto x como y son letras $\quad$ $q(x, y)$: x es una vocal, pero y es un número

a) $q\,(v, a) \rightarrow p\,(v, a)$

b) $\neg p\,(s, 1) \wedge p\,(r, c)$

c) $\neg q\,(r, 2) \leftrightarrow q\,(i, b)$

3) Tabule los conjuntos de verdad $Ap(x, y)$ y $Aq(x, y)$ de los predicados del ejercicio anterior, determinando además la cardinalidad de cada conjunto.

Scanned by CamScanner

4) Suponga que existen los predicados de dos variables $p(x, y)$ y $q(x, y)$ tal que:

$$Ap(x, y) = \{(\nabla, \Delta), (\cap, \cup), (\wedge, \vee)\} \qquad Aq(x, y) = \left\{\left(\nabla, \frac{d}{dt}\right), \left(\Sigma, \int\right)\right\}$$

Utilizando propiedades de los conjuntos de verdad, tabule:

$$A[\neg p(x, y) \rightarrow (p(x, y) \wedge q(x, y))]$$

5) Sean los conjuntos referenciales $Re_x = \{1, 2, 3\}$, $Re_y = \{a, b, c, d\}$ y el predicado $p(x, y)$: x es el número que indica el lugar que ocupa y en el abecedario español.

a) Tabule $Ap(x, y)$.

b) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas:

- $\forall x \exists y\, p(x, y)$
- $\exists x\, p(x, d)$
- $\exists x \forall y\, p(x, y)$
- $\forall x \exists y\, \neg p(x, y)$
- $[\forall x \forall y\, p(x, y)] \rightarrow 0$

Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

2.9 Relaciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:
- Dados dos conjuntos, crear una relación entre ellos.
- Dada una relación, identificar su dominio y rango.
- Dada una relación, representarla mediante diagramas sagitales.

En lenguaje común, decimos que la tarifa del agua potable depende del número de metros cúbicos consumido en un período de tiempo, o bien decimos que el valor de un terreno depende del número de metros cuadrados que tiene. Aparece en estas frases el concepto de dependencia o relación.

Cuando se formula una expresión que liga dos o más objetos entre sí, postulamos una relación (no necesariamente matemática). Las relaciones, en un sentido más general, se fundamentan en conjuntos arbitrarios.

Definición 2.20 (Relación)

Una relación establece la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos no vacíos A y B. Usualmente, al conjunto A se lo denomina conjunto de partida, y al conjunto B, de llegada. Simbólicamente, la relación se representa por R y se cumple que:

$$R \subseteq A \times B$$

Es decir, cada subconjunto de $A \times B$ constituye una relación.

La cantidad máxima de relaciones que se pueden obtener a partir de dos conjuntos no vacíos A y B es: $2^{N(A)\,N(B)}$.

Ejemplo 2.40 Relaciones.

Sean $A = \{\text{Samuel, José, César}\}$ y $B = \{\text{Janeth, Irma, Pedro}\}$. Al decir que Samuel es padre de Irma, se está construyendo una relación entre ambos.

El par ordenado (Samuel, Irma) constituye un elemento del producto cartesiano $A \times B$ y de la relación R: "x es padre de y", construida entre A y B, siendo $x \in A$, $y \in B$.

Se pueden construir relaciones entre TODOS o ALGUNOS elementos del primer conjunto con UNO o MÁS del segundo conjunto; esto incluye la posibilidad de que NINGÚN elemento del primer conjunto se relacione con NINGÚN elemento del segundo conjunto, estableciéndose una relación vacía.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.41 Relación vacía.

Basados en el ejemplo anterior, podría darse el caso que Samuel, José o César no sean padres de Janeth, Irma o Pedro, lo cual correspondería a una relación sin elementos.

Una relación puede ser representada mediante el uso de diagramas sagitales.

Ejemplo 2.42 Relaciones con diagramas sagitales.

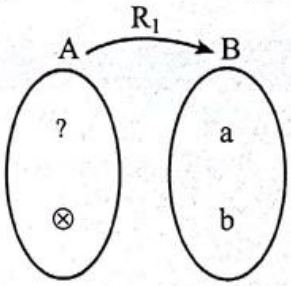
Dados los conjuntos A = {?, ⊗} y B = {a, b}, determine analíticamente el número de relaciones posibles que se pueden obtener de A en B, y realice los diagramas sagitales correspondientes a todas las relaciones posibles.

Solución:

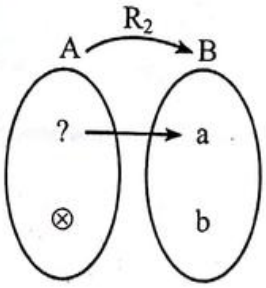
El número máximo de relaciones de A en B es $2^{N(A)\,N(B)} = 2^{(2)\,(2)} = 2^4 = 16$.

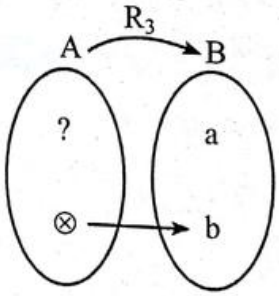
Diagramas sagitales:

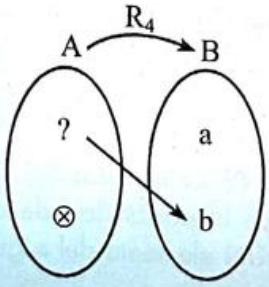
Caso 1: Ningún elemento del conjunto de partida está relacionado con ningún elemento del conjunto de llegada (relación vacía).

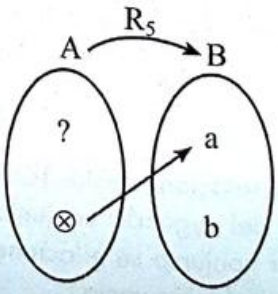


Caso 2: Relaciones de un solo elemento del conjunto de partida con uno solo del conjunto de llegada.



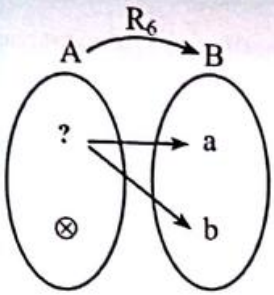


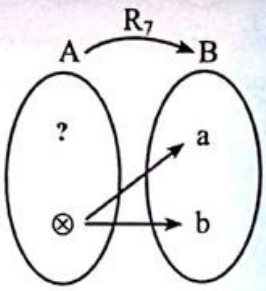




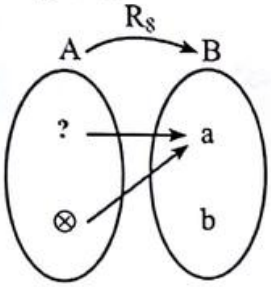
Scanned by CamScanner

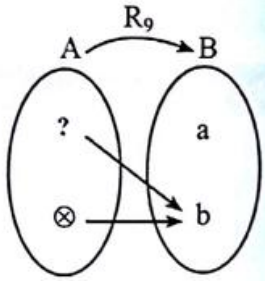
Caso 3: Relaciones de un solo elemento del conjunto de partida con dos del conjunto de llegada.



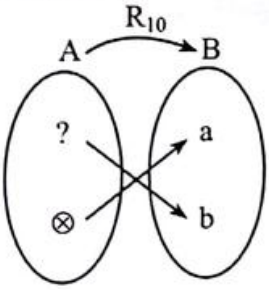


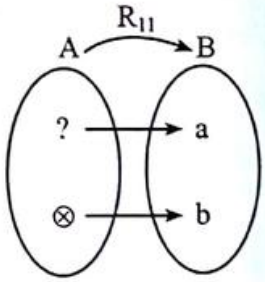
Caso 4: Relación de dos elementos del conjunto de partida con uno solo del conjunto de llegada.



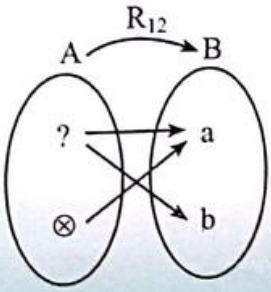


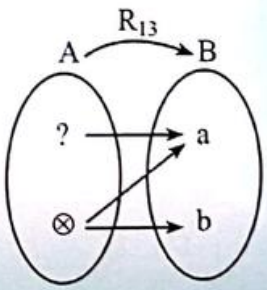
Caso 5: Relaciones de un elemento del conjunto de partida con uno solo del conjunto de llegada.



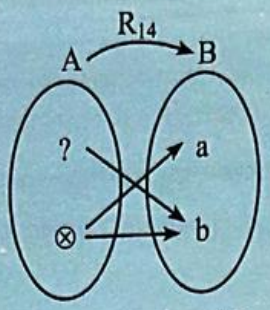


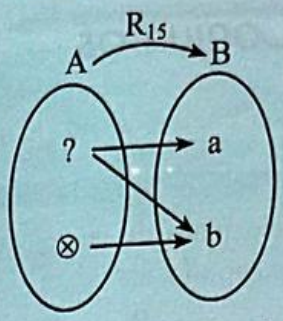
Caso 6: Relaciones de un elemento del conjunto de partida con dos del conjunto de llegada y el otro elemento del conjunto de partida con otro del conjunto de llegada.



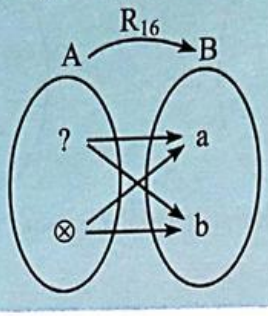


Scanned by CamScanner





Caso 7: Todos los elementos del conjunto de partida están relacionados con todos los elementos del conjunto de llegada (producto cartesiano).



Definición 2.21 (Dominio de una Relación)

Dada una relación R, construida a partir de los conjuntos A y B, los elementos del conjunto A que establecen correspondencia constituyen el dominio de la relación. Se representa simbólicamente por: *dom* R.

No necesariamente todos los elementos del conjunto de partida forman parte del dominio de una relación.

Definición 2.22 (Rango de una Relación)

Dada una relación R, construida a partir de los conjuntos A y B, los elementos del conjunto B que se relacionan con elementos del dominio de R constituyen el rango de la relación. Se representa simbólicamente por: *rg* R.

Es común también denominar al rango de la relación como el **recorrido, imagen o codominio** de la misma. No necesariamente todos los elementos del conjunto de llegada forman parte del rango de una relación.

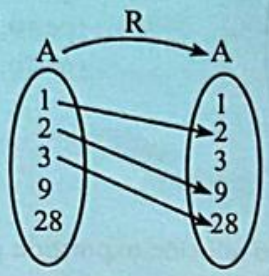
Ejemplo 2.43 Dominio y rango de una relación.

$A = \{1, -1, 2, 3\}$
$B = \{-5, -2, 0, 1\}$
$R : A \mapsto B$
$R = \{(x, y) / y = x^2 - 6\}$
$R = \{(1, -5), (-1, -5), (2, -2)\}$
dom $R = \{-1, 1, 2\}$
rg $R = \{-5, -2\}$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.44 Representación sagital de una relación.

$A = \{1, 2, 3, 9, 28\}$
$R \subseteq A \times A$
$R = \{(x, y) / x = \sqrt[3]{y-1}\}$
$R = \{(3, 28), (2, 9), (1, 2)\}$



$dom\ R = \{1, 2, 3\}$
$rg\ R = \{2, 9, 28\}$

Ejemplo 2.45 Relaciones.

Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{(0, 0), (3, 1), (4, 2), (6, 3)\}$ y R la relación de A en B definida por:

$$R = \{(a, (b, c)) / (a = b + c) \wedge (a \in A) \wedge ((b, c) \in B)\}$$

Establezca los elementos de R.

Solución:

Partiendo de la condición:

$$a = b + c$$

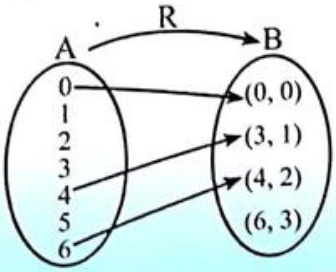
Tenemos que:

$(b, c) = (0, 0) \Rightarrow a = 0 + 0 = 0$
$(b, c) = (3, 1) \Rightarrow a = 3 + 1 = 4$
$(b, c) = (4, 2) \Rightarrow a = 4 + 2 = 6$

Note que la pareja restante (6, 3) del conjunto B no satisface la condición dada.

De donde:

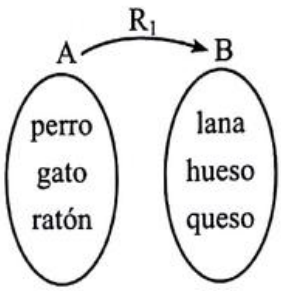
$R = \{(0, (0, 0)), (4, (3, 1)), (6, (4, 2))\}$



Adicionalmente, se puede concluir que: $dom\ R = \{0, 4, 6\}$ y $N(dom\ R) = 3$; $rg\ R = \{(0, 0), (3, 1), (4, 2)\}$ y $N(rg\ R) = 3$.

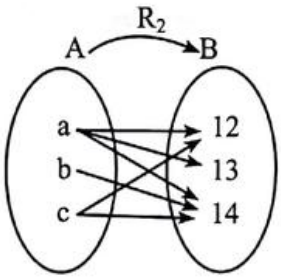
Scanned by CamScanner

1) Dados los conjuntos A = {perro, gato, ratón} y B = {lana, hueso, queso}, una sus elementos de acuerdo a la relación R_1 establecida de A en B.



$R_1 = \{(\text{perro, hueso}), (\text{gato, lana}), (\text{perro, queso}), (\text{ratón, queso}), (\text{perro, lana}), (\text{ratón, hueso})\}$

2) A continuación se presenta una relación expresada por medio de un diagrama sagital. Exprésela como un conjunto de pares ordenados.



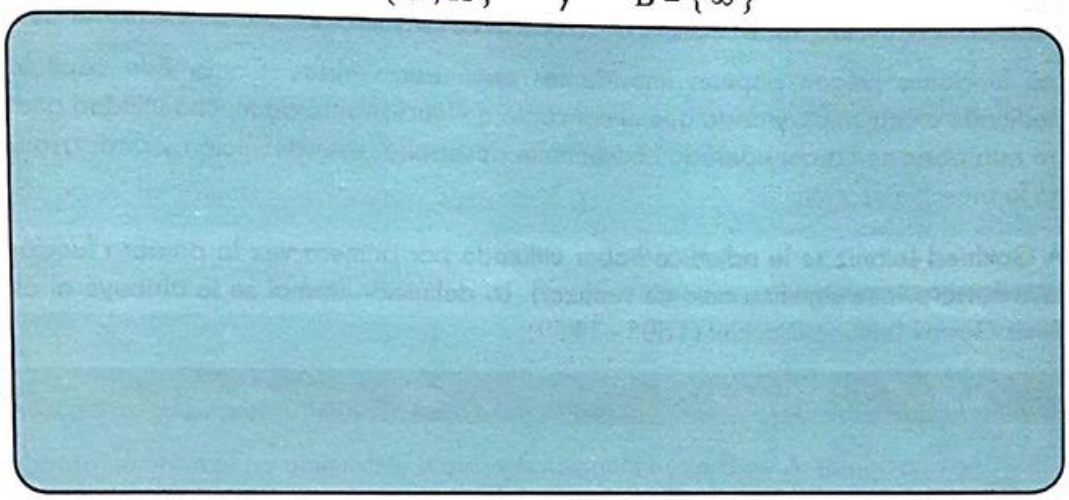
3) Dados los conjuntos A = {5, 8, 9} y B = {1, 2, 3, 4}, determine el dominio y el rango de las siguientes relaciones.

a) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B / x = 9\}$
b) $R_4 = \{(x, y) \in A \times B / y = 2\}$
c) $R_5 = \{(x, y) \in A \times B / x = y\}$

Scanned by CamScanner

4) Represente por medio de diagramas sagitales todas las posibles relaciones de A en B que se pueden construir, si:

$A = \{ \alpha , \Omega \}$ y $B = \{ \infty \}$



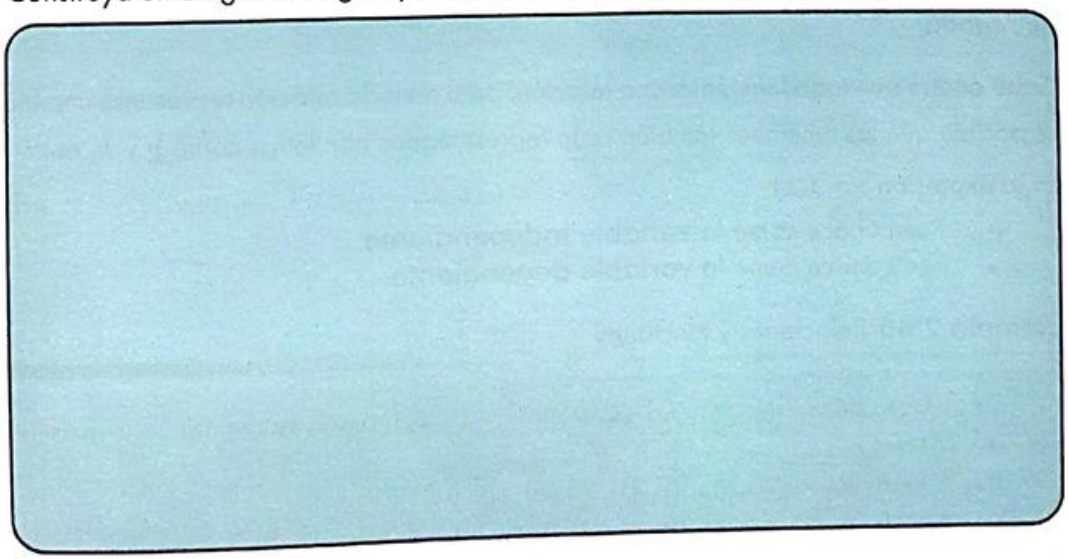
5) Considere los conjuntos:

A = {Martha, Susan, Hilda, Ivette, Ivonne, Victoria} y
B = {Jorge, Alfredo, José, Eduardo, Antonio, Alberto, David}.

Si se define la relación:

$R = \{(x, y) \in (A \times B) / x$ tiene letras repetidas y esa letra consta en el elemento $y\}$.

Construya un diagrama sagital para R, determinando su dominio y rango.



Scanned by CamScanner

2.10 Funciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una relación entre dos conjuntos, identificar si es función.
- Dada una función entre conjuntos, determinar su tipo.
- Dada una función, analizar la existencia de su inversa.
- Construir, de ser posible, la composición entre funciones.

Las funciones juegan papeles importantes en nuestras vidas. Como este capítulo está dedicado a conjuntos, y dado que el concepto de función será de mucha utilidad a lo largo de esta obra, se ha considerado conveniente desarrollar esta definición y otras asociadas, en la presente sección.

A Gottfried Leibniz se le adjudica haber utilizado por primera vez la palabra función (del latín **functo**, que significa acto de realizar). La definición formal se le atribuye al alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).

Definición 2.23 (Función)

Una relación de A en B es una función si y sólo si el dominio de la relación es todo el conjunto de partida, y si a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento en el rango. Simbólicamente, esta definición se representa por:

1. $dom\ \mathrm{R} = \mathrm{A}$
2. $\forall x \in \mathrm{A}\ \forall y_1, y_2 \in \mathrm{B}\ [((x\ \mathrm{R}\ y_1) \wedge (x\ \mathrm{R}\ y_2)) \Rightarrow (y_1 = y_2)]$

Para denotar funciones usualmente se utiliza la letra f.

De esta definición, se concluye que en una función no pueden existir dos elementos del conjunto de llegada relacionados con un mismo elemento del dominio, o lo que es igual, un elemento del dominio no puede estar relacionado con dos elementos diferentes del conjunto de llegada.

Cabe anotar que toda función es una relación, pero no toda relación representa una función.

Es posible que las funciones también sean representadas con letras como g y h, entre otras.

En la expresión $y = f(x)$:

- x se conoce como la **variable independiente**.
- y se conoce como la **variable dependiente**.

Ejemplo 2.46 Relaciones y funciones.

Dados los conjuntos $\mathrm{A} = \{\alpha, \beta, \delta, \rho\}$ y $\mathrm{B} = \{a, e, i, o, u\}$, se definen las siguientes relaciones:

R_1: $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}$, $\mathrm{R}_1 = \{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\delta, \delta), (\rho, \rho)\}$

R_2: $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{B}$, $\mathrm{R}_2 = \{(\alpha, a), (\beta, e), (\delta, i), (\rho, o), (\rho, u)\}$

R_3: $\mathrm{B} \mapsto \mathrm{B}$, $\mathrm{R}_3 = \{(a, e), (e, i), (i, o), (o, u)\}$

Scanned by CamScanner

Determine si R_1, R_2 o R_3 representan funciones.

Solución:

R_1 es una función, puesto que *dom* $R_1 = A$, y a cada elemento del dominio de R_1 le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada.

R_2 no es una función, puesto que al elemento ρ del conjunto de partida le corresponde más de un elemento en el conjunto de llegada.

R_3 no es una función, puesto que *dom* $R_3 \neq B$.

Ejemplo 2.47 Relaciones y funciones.

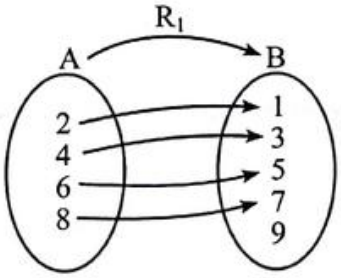
Dados los conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, y las relaciones:

$R_1 = \{(x, y) \in A \times B / x = y + 1\}$
$R_2 = \{(x, y) \in A \times B / x = 2\}$

Determine si R_1 o R_2 constituyen funciones de A en B.

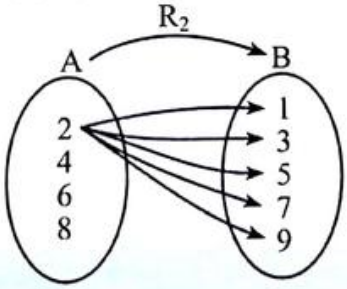
Solución:

R_1: $A \mapsto B$, $R_1 = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (8, 7)\}$



Sí constituye una función, ya que el dominio de R_1 es todo el conjunto de partida A, y a cada elemento del dominio le corresponde uno del conjunto de llegada.

R_2: $A \mapsto B$, $R_2 = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (2, 9)\}$



Basta que el dominio no sea todo el conjunto de partida A, para que no sea función. Además, a un mismo elemento le corresponde más de una imagen.

Scanned by CamScanner

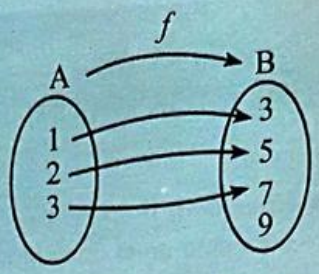
Ejemplo 2.48 Funciones.

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 5, 7, 9\}$

$f: A \mapsto B,\ f(x) = 2x + 1$

$f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$



$dom\, f = A$

$rg\, f = \{3, 5, 7\}$

En este caso, se dice que 3 es la imagen de 1, también 5 es la imagen de 2 y que 7 es la imagen de 3.

2.10.1 Tipos de funciones

Las funciones presentan diversas características, las cuales deben ser tipificadas para posteriores análisis. Estas características dependen de la cardinalidad de los conjuntos de partida y de llegada, así como de la relación que se establezca entre ellos.

De acuerdo a las características de las funciones, es posible realizar diferentes representaciones gráficas.

Definición 2.24 (Función Inyectiva)

$f: A \mapsto B$ es inyectiva $\Leftrightarrow \{\forall x_1, x_2 \in A[\neg(x_1 = x_2) \Rightarrow \neg(f(x_1) = f(x_2))]\}$

f es inyectiva si cada elemento del rango es imagen exclusiva de un único elemento del dominio.

Es necesario que $N(A) \leq N(B)$ para poder construir funciones inyectivas.

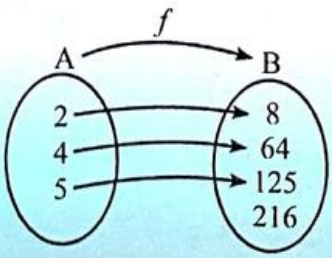
Ejemplo 2.49 Función Inyectiva.

$A = \{2, 4, 5\}$

$B = \{8, 64, 125, 216\}$

$f: A \mapsto B$, "y es el cubo de x"

$f = \{(2, 8), (4, 64), (5, 125)\}$



$dom\, f = A$

$rg\, f = \{8, 64, 125\}$

f es inyectiva

Si f es inyectiva, podemos regresar de $f(x)$ a x por un solo camino, con lo cual se garantiza que, dado un elemento del rango de f, se puede encontrar un solo elemento de su dominio que le corresponda.

Scanned by CamScanner

Definición 2.25 (Función Sobreyectiva)

$f: A \mapsto B$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow \{\forall y \in B\ \exists x \in A[y = f(x)]\}$

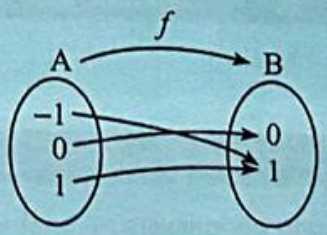
f es sobreyectiva si $rg\, f = B$.

Es necesario que $N(A) \geq N(B)$ para poder construir funciones sobreyectivas.

Ejemplo 2.50 Función Sobreyectiva.

$A = \{-1, 0, 1\}$
$B = \{0, 1\}$

$f: A \mapsto B$, "y es el cuadrado de x"
$f = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$



$dom\, f = A$
$rg\, f = B$
f es sobreyectiva

Observaciones

A partir de las definiciones anteriores, es importante anotar que:

- Las funciones que son sobreyectivas no necesariamente son inyectivas.
- Las funciones que son inyectivas no necesariamente son sobreyectivas.
- Es posible que una función no sea inyectiva, ni sobreyectiva.

Así mismo, existen funciones que poseen las dos características anteriormente señaladas, las cuales se definen a continuación.

Definición 2.26 (Función Biyectiva)

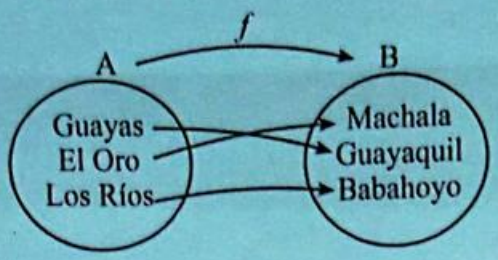
$f: A \mapsto B$ es biyectiva si y sólo si f es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 2.51 Función Biyectiva.

A = {Guayas, El Oro, Los Ríos}
B = {Machala, Guayaquil, Babahoyo}

Scanned by CamScanner

f: A ↦ B, "y es capital de x"
f = {(Guayas, Guayaquil), (El Oro, Machala), (Los Ríos, Babahoyo)}



$dom\, f$ = A
$rg\, f$ = B
f es biyectiva

Las funciones biyectivas tienen propiedades importantes, una de las cuales se explicará a continuación.

Definición 2.27 (Función Inversible)

f: A ↦ B es inversible si y sólo si su relación inversa es una función de B en A.

A partir de esta definición, el lector podrá verificar el siguiente teorema.

Teorema 2.1

f es una función inversible si y sólo si es biyectiva.

Definición 2.28 (Función Inversa)

Si f: A ↦ B es biyectiva, es posible construir la inversa f^{-1}: B ↦ A. Esta nueva función permite invertir el sentido de la correspondencia, tal que a cada $y \in$ B se lo asocia con un único $x \in$ A.

La función inversa es f^{-1}: B ↦ A, lo cual indica que el orden de los conjuntos cambia. Adicionalmente, se puede notar que el dominio de f es el rango de f^{-1} y el rango de f es el dominio de f^{-1}.

Ejemplo 2.52 Función Inversa.

En el ejemplo anterior la función f es biyectiva, entonces existe f^{-1}:

f^{-1}: B ↦ A, "x es capital de y"
f^{-1} = {(Guayaquil, Guayas), (Machala, El Oro), (Babahoyo, Los Ríos)}

Podemos observar que $dom\, f = rg\, f^{-1}$ y $dom\, f^{-1} = rg\, f$.

Definición 2.29 (Función Compuesta)

Sean las funciones f: A ↦ B y g: C ↦ D, la función compuesta denotada por gof es una función que relaciona A con D, es decir, que a partir de un elemento x de A, se obtiene un elemento $g(f(x))$ de D.

Scanned by CamScanner

La composición de funciones $g \circ f$ se ilustra en el siguiente gráfico, suponiendo que B = C:

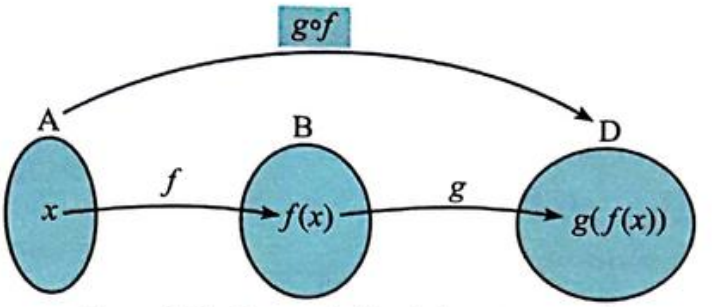


Figura 2.7: Composición de funciones $g \circ f$.

Es importante anotar que $g \circ f$ existe, si y sólo si: $rg\, f \subseteq dom\, g$.

Dadas dos funciones f y g, $g \circ f$ es el conjunto de parejas de la forma $(x, g(f(x)))$. Considerando el gráfico anterior, si f y g son procesos, entonces $h = g \circ f$ es el resultado del proceso siguiente:

1) h recibe un elemento x y lo introduce en el proceso f para obtener $b = f(x)$
2) h introduce a b en el proceso g para obtener $g(b) = g(f(x))$
3) En resumen, h ha transformado a x en $h(x) = g(f(x))$

Lo anterior nos permite concluir que $dom\,(g \circ f) = A$, y que $rg\,(g \circ f) \subseteq rg\, g \subseteq D$.

La composición de funciones $f \circ g$, siendo g: E ↦ F y f: F ↦ G, se ilustra en la siguiente figura:

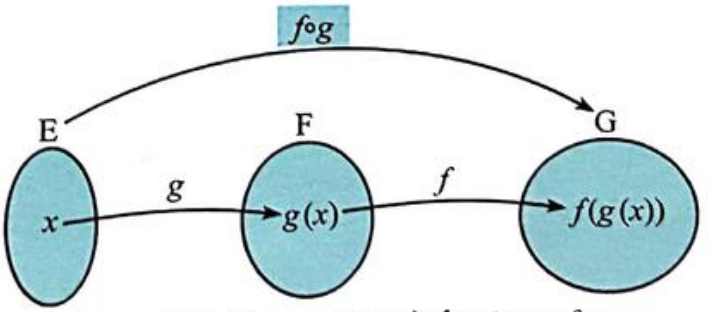


Figura 2.8: Composición de funciones $f \circ g$.

La función compuesta $f \circ g$ existe, si y sólo si: $rg\, g \subseteq dom\, f$.

Se cumple que $dom\,(f \circ g) = E$, y que $rg\,(f \circ g) \subseteq rg\, f \subseteq G$.

La composición de funciones, en general, no es conmutativa.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.53 Composición de funciones.

Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{a, e, i, o\}$. Se tienen las funciones:

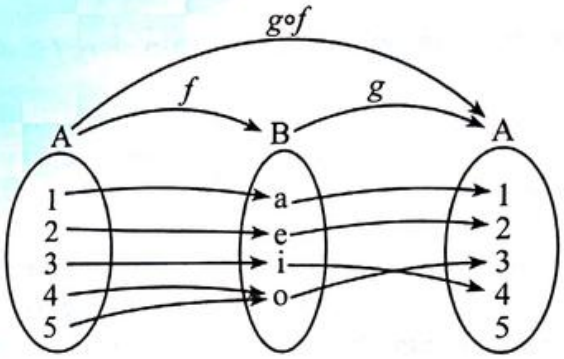
$f: A \mapsto B$ dada por $f = \{(1, a), (2, e), (3, i), (4, o), (5, o)\}$
$g: B \mapsto A$ dada por $g = \{(a, 1), (e, 2), (i, 4), (o, 3)\}$

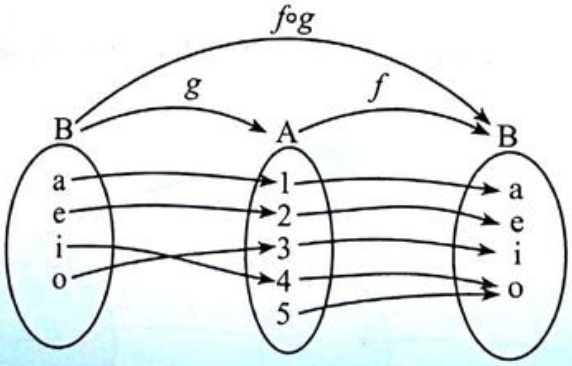
Es posible construir las funciones:

$g \circ f: A \mapsto A$
$g \circ f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 3)\}$

$f \circ g: B \mapsto B$
$f \circ g = \{(a, a), (e, e), (i, o), (o, i)\}$

De este ejemplo se puede concluir que $f \circ g$ es diferente a $g \circ f$.

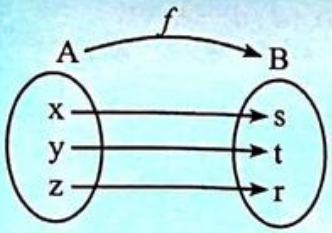


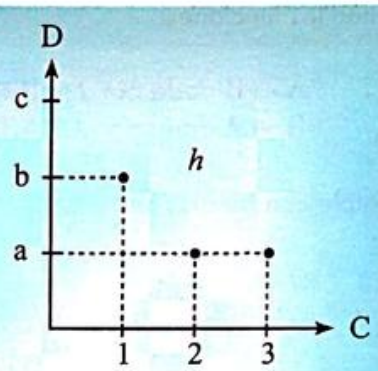


Ejemplo 2.54 Composición de funciones.

Sean los conjuntos $A = \{x, y, z\}$, $B = \{s, t, r\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ y $D = \{a, b, c\}$;
$f: A \mapsto B$, $g: D \mapsto A$ y $h: C \mapsto D$ funciones tales que:

Scanned by CamScanner



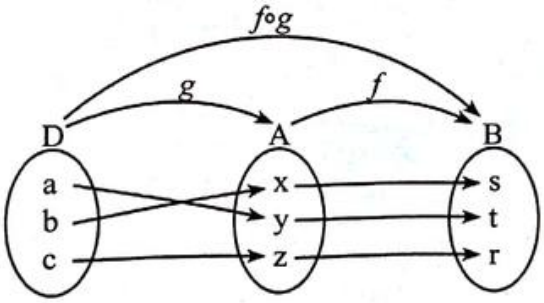


$g = \{(a, y), (b, x), (c, z)\}$

Determine $((f \circ g) \circ h)$

Solución:

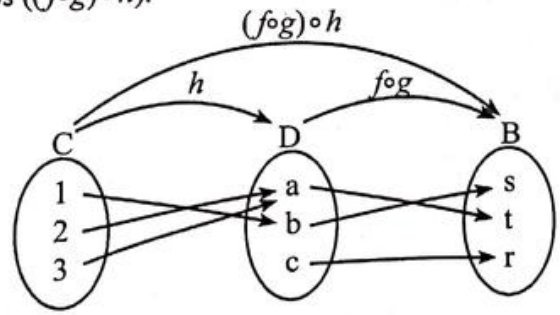
Planteamos $f \circ g$:



$f \circ g : D \mapsto B$

$f \circ g = \{(a, t), (b, s), (c, r)\}$, la cual es una función de D en B.

Ahora planteamos $((f \circ g) \circ h)$:



$(f \circ g) \circ h : C \mapsto B$

$((f \circ g) \circ h) = \{(1, s), (2, t), (3, t)\}$, la cual es una función de C en B.

Adicionalmente, se cumple que:

$$dom\,((f \circ g) \circ h) = dom\,h$$
$$rg\,((f \circ g) \circ h) \subseteq rg\,(f \circ g)$$

Es posible construir las funciones compuestas $(f \circ f^{-1})$ y $(f^{-1} \circ f)$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.55 Composición de funciones.

Considere los conjuntos $A = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$.

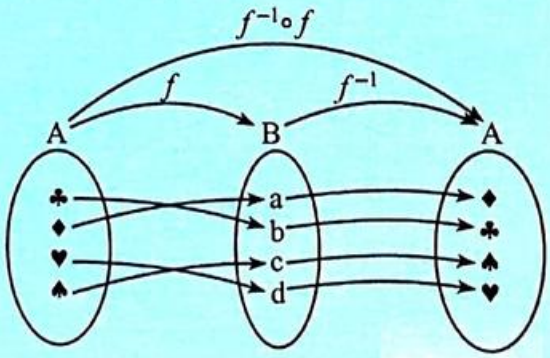
Se tienen las funciones:

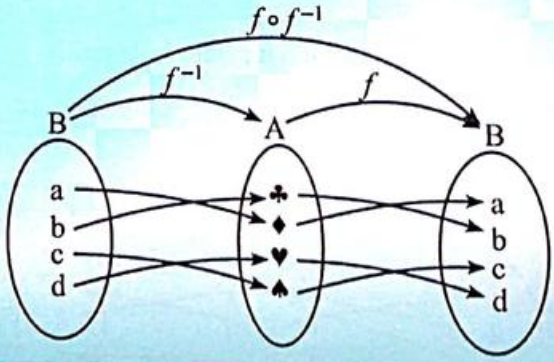
$f : A \mapsto B$ dada por $f = \{(\clubsuit, b), (\diamondsuit, a), (\heartsuit, d), (\spadesuit, c)\}$
$f^{-1} : B \mapsto A$ dada por $f^{-1} = \{(b, \clubsuit), (a, \diamondsuit), (d, \heartsuit), (c, \spadesuit)\}$

Es posible construir las funciones:

$f^{-1} \circ f : A \mapsto A$
$f^{-1} \circ f = \{(\clubsuit, \clubsuit), (\diamondsuit, \diamondsuit), (\heartsuit, \heartsuit), (\spadesuit, \spadesuit)\}$

$f \circ f^{-1} : B \mapsto B$
$f \circ f^{-1} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$





Las parejas que resultan en ambas composiciones tienen las mismas componentes.

Una función con esta característica se conoce como función IDENTIDAD, la cual se denota por I.

Como $x \in A$, $y \in B$, $f^{-1} \circ f = I_A(x)$ y $f \circ f^{-1} = I_B(y)$, para que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$, es necesario que los conjuntos de partida y de llegada sean los mismos.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 2.56 Composición de funciones.

Dados los conjuntos A, B y C:

$A = \{\#, *, \$\}$
$B = \{m, n, p\}$
$C = \{1, 3, 5\}$

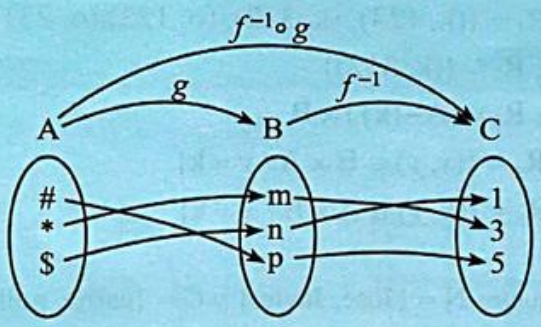
Y las funciones f y g tales que:

$f: C \mapsto B \,/\, f = \{(1, n), (3, m), (5, p)\}$
$g: A \mapsto B \,/\, g = \{(\#, p), (*, m), (\$, n)\}$

Determine $(f^{-1} \circ g)^{-1}$

Solución:

Dado que f es biyectiva, entonces $f^{-1} = \{(n, 1), (m, 3), (p, 5)\}$



$f^{-1} \circ g = \{(\#, 5), (*, 3), (\$, 1)\}$
$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1} = \{(5, \#), (3, *), (1, \$)\}$

Se puede verificar que $(f^{-1} \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f$.

Scanned by CamScanner

1) Suponga que usted tiene una sobrina de 9 años, muy inteligente y ávida de conocimientos. Un día, ella le pide que le explique qué son las funciones. Escriba a continuación lo que usted le diría:

2) Dados los conjuntos $A = \{k, o\}$ y $B = \{123, 312, 231\}$. Coloque 1 en el recuadro si la relación es una función y 0 si no lo es.

a) $R_1: A \mapsto B$, $R_1 = \{(k, 123), (k, 312), (o, 123), (o, 231)\}$ ☐

b) $R_2: \{k\} \mapsto B$, $R_2 = \{(k, 312)\}$ ☐

c) $R_3: \{o\} \mapsto B$, $R_3 = (A - \{k\}) \times B$ ☐

d) $R_4: B \mapsto A$, $R_4 = \{(x, y) \in B \times A \,/\, y = k\}$ ☐

e) $R_5: A \mapsto B$, $R_5 = \{(x, y) \in A \times B \,/\, x = k\}$ ☐

3) Considere los conjuntos N = {José, Javier} y C = {carne, pollo, cerdo}. Tabule:

a) Una función inyectiva de N en C.

b) Una función sobreyectiva de C en N.

c) Una función biyectiva, considerando los conjuntos N y (C – {carne}).

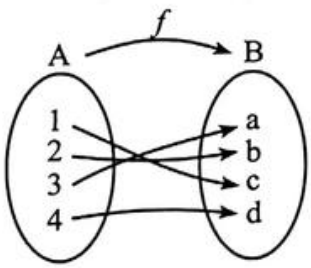
Scanned by CamScanner

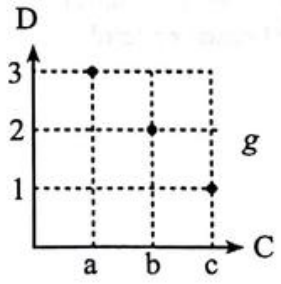
4) Sean las funciones $f: B \mapsto A$, $g: C \mapsto B$ y $h: D \mapsto C$:

$$f = \{(2, \alpha), (3, \beta), (4, \gamma), (5, \theta)\}$$
$$g = \{(b, 5), (c, 2), (d, 3), (e, 4), (m, 5)\}$$
$$h = \{(\varphi, b), (\pi, m), (\omega, c), (\rho, e), (\eta, c)\}$$

Realice el diagrama sagital para la función $f \circ (g \circ h)$ y tabule sus elementos.

5) Sean las funciones $f: A \mapsto B$ y $g: C \mapsto D$





Tabule, de ser posible, lo siguiente:

a) $f^{-1} \circ f$

b) $g \circ g^{-1}$

c) $f^{-1} \circ g^{-1}$

Scanned by CamScanner

Respuesta al desafío

Se trata de un problema de recubrimiento de conjuntos. Un procedimiento sencillo de tres pasos podría ser el siguiente:

1) Determinar el número de casas que cubre cada caja de conexión, en donde cada caja corresponde al conjunto de cajas disponibles {A, B, C, D, E}:

Caja de conexión	Casas
A	115
B	195
C	165
D	100
E	175

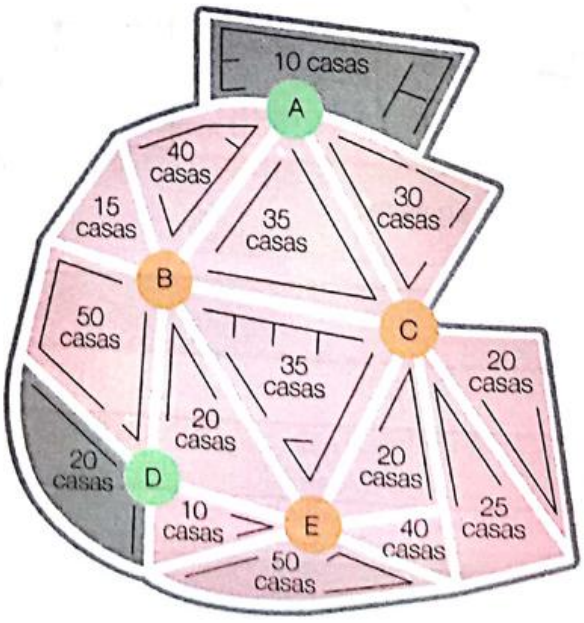
2) Ordenar descendentemente (de mayor a menor valor), según la cobertura de cada caja de conexión. Nótese que:

- B es mayor que E.
- E es mayor que C.
- C es mayor que A.
- A es mayor que D.

El orden sería: B, E, C, A, D.

3) Seleccionar las 3 primeras cajas del conjunto, es decir, B, E y C.

Utilizando este procedimiento, no se pueden cubrir los 15 sectores de la población, porque se tiene la limitante de las 3 cajas de conexión. Sin embargo, se cubrirá un total de 13 de los 15 sectores y 390 casas en total.



Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

Ejercicios Propuestos

2.1 Tipos y cardinalidad ● ● ● • •

1) Construya un ejemplo de conjunto y represéntelo por comprensión, por tabulación y en un diagrama de Venn.

2) Defina cardinalidad y muestre con ejemplos las cardinalidades de los conjuntos más relevantes.

3) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas. Para el caso de las falsas, replantéelas para que sean verdaderas:
   a) Si $A = \{\varnothing\}$, entonces $N(A) = 0$.
   b) Considere un conjunto tal que $N(B) = 0$, entonces $B = \{a, -a\}$.
   c) Si $N(C) = 10$, entonces $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$.
   d) Si $A = \{x/x$ es un valor de verdad$\}$, entonces su cardinalidad es la misma que la de un conjunto unitario.
   e) A es un conjunto vacío si y sólo si $N(A) = 0$.

2.2 Cuantificadores ● ● ● • •

4) Indique las principales diferencias entre el Cuantificador Universal y el Cuantificador Existencial.

5) Establezca las principales diferencias entre Subconjunto y Subconjunto Propio. Utilice ejemplos para clarificar estas diferencias.

6) Sea $Re = \{1, 2, 3, 4\}$, traduzca la siguiente proposición al lenguaje natural:
$$\exists x \in Re, x + 1 = 5$$

7) Dado el referencial $Re = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces es verdad que:
   a) $\exists x, (x + 6 = 0)$
   b) $\forall x, (x + 1 \leq 5)$
   c) $\exists x, (x + 1 = 0)$
   d) $\forall x, (x + 1 > 2)$
   e) $\exists x, (x - 1 = 0)$

8) Sea $Re = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y las proposiciones:
   a: $\exists x, x^2 = 4$
   b: $\forall x, 3x < 24$
   c: $\exists x, x \geq 10$

Scanned by CamScanner

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) b debido a que c.
b) a pero c.
c) O c, o a.
d) Cuando b, c.
e) c si y solamente si b.

9) Defina los conjuntos referenciales y los predicados adecuados en cada caso; y luego, con el uso de cuantificadores, traduzca formalmente:

a) Toda letra del alfabeto español es vocal.
b) Algún ciudadano es libre.
c) No todo adulto llora.
d) No es cierto que algún árbol es verde.
e) No es verdad que todo número es primo.

10) Conociendo que $A = \{-1, 0, 1\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\exists! x \in A, (x^2 > 0)$
b) $\exists! x \in A, (x^3 = 9) \rightarrow \exists! x \in A, (x = 9)$
c) $\exists! x \in A, (x + 3 = 5) \vee \forall x \in A, (x - 2 > 1)$
d) $\exists! x \in A, (x + a = a) \rightarrow \forall x \in A, (x + 0 = x)$
e) $\exists! x \in A, (x^3 + 5 = 6) \leftrightarrow \exists! x \in A, (x^3 \geq 0)$

11) Si $A = \{\pm, \{\%\}\}$, entonces es FALSO que:

a) $A \in P(A)$
b) $\varnothing \subseteq P(A)$
c) $\varnothing \in P(A)$
d) $\{\{\%\}\} \subseteq P(A)$
e) $\{A\} \in P(P(A))$

12) Dado el conjunto $A = \{\measuredangle, \{\blacksquare, \perp\}, \{\neg\}\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $N(A) = 3$
b) $N(P(A)) = 16$
c) $\{\blacksquare, \perp\} \in P(A)$
d) $\{\{\{\blacksquare, \perp\}\}\} \in P(P(A))$
e) $\{\measuredangle\} \in A$

13) Para el conjunto $S = \{@, \$, \{?, ¡\}\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $N(S) = 4$
b) $N(P(S)) = 8$
c) $N(P(P(S))) = 64$
d) $@ \in P(S)$
e) $\{\{\$\}\} \subseteq P(S)$
f) $\{\{?, ¡\}\} \subseteq S$
g) $\{\{\{?, ¡\}\}\} \subseteq P(P(S))$

Scanned by CamScanner

h) $\{\{@, \$\}\} \in P(P(P(S)))$
i) $\varnothing \subseteq S$
j) $\varnothing \subseteq P(S)$

14) De los siguientes literales, identifique la proposición VERDADERA:
a) Si $A = \{\varnothing\}$, entonces $A \cup P(A) = A$.
b) Si $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, entonces $N(P(A)) = 2$.
c) Si $A \subseteq (B \cup C)$, entonces $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$.
d) $A - B = \{x/(x \in B) \wedge \neg(x \in A)\}$.
e) Si $A \neq \varnothing$, entonces $A \in P(A)$.

15) Dado el conjunto $A = \{0, 1, 3, 4, 5, 7\}$, estructure un contraejemplo para demostrar que la siguiente proposición es falsa:

$$\forall n \in A, 7 > n + 1$$

16) Sea $Re = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
a) $\forall x \left(\frac{x+2}{x}\right) > 5 \vee \forall x\,(x + 1 < 8)$
b) $\exists x\,(x^3 + 1 = 9) \rightarrow \exists x\,(x + 7 = 9)$
c) $\exists x\,(x + 3 = 5) \vee \forall x\,(x - 2 > 1)$
d) $\exists x\,(x + a = a) \rightarrow \forall x\,(x + 0 = x)$
e) $\exists x\,(x^3 + 5 = 6) \rightarrow \exists x\,(x^3 > 27)$

17) Dados los conjuntos $A = \{*, \{*\}, \varnothing, \{\varnothing\}\}$ y $B = \{\pi, \{\pi\}, \rho\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
a) $[(\{*, \varnothing\} \subseteq A) \wedge (\varnothing \in A)] \leftrightarrow [\{\pi, \{\pi\}\} \subseteq B]$
b) $[(\{*, \varnothing\} \subseteq A) \wedge (\varnothing \in A)] \leftrightarrow [(\pi, \{\pi\}) \subseteq B]$

2.3 Operaciones entre conjuntos

18) Defina las siguientes operaciones entre conjuntos:
a) Unión.
b) Intersección.
c) Diferencia.
d) Diferencia simétrica.
e) Complementación.

19) Sea Re un conjunto no vacío y $A \subseteq Re$. Califique como verdadera o falsa la siguiente proposición, en caso de ser verdadera demuéstrela y en caso de ser falsa, proporcione un contraejemplo:

$$\forall X, Y \subseteq Re\,[(A \cup X) = (A \cup Y) \Rightarrow (X = Y)]$$

Scanned by CamScanner

20) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) La unión entre los conjuntos A y B, se define formalmente como:
$$\forall x\,[x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)]$$

b) Dados los conjuntos A y B, un elemento x que satisface $(x \notin A) \wedge (x \in B)$, pertenece al conjunto $(A \cup B)$.

c) Para que $(A \cup B) = A$, el conjunto B debe ser vacío.

d) Si A es un conjunto finito, entonces $(A \subseteq A \wedge A \neq \varnothing)$.

e) Si A, B son conjuntos no vacíos y $A \neq B$, la proposición $\exists x[(x \in B) \rightarrow (x \in A)]$ es verdadera.

21) Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ y $C = \{1, 5, 6\}$ tres conjuntos no vacíos de un mismo referencial Re, indique cuál de las siguientes proposiciones es VERDADERA:

a) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$
b) $(A \cup B \cup C)^c = A \cap B \cap C$
c) $(A - B) \cap C = A \cup (B^c \cap C)$
d) $A - (B - C) = (A - B) - C$
e) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

22) Sea el conjunto $Re = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y los subconjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6, 7\}$ y $C = \{5, 6, 7\}$; entonces el conjunto $[(A - B)^c \cap (A^c \cup B^c)]^c$ es igual a:

a) $\{1, 2, 3, 4\}$
b) $\{4, 5, 6\}$
c) $\{1, 2, 4\}$
d) $\{3, 5, 7\}$
e) $\varnothing$

23) Dados los conjuntos: $Re = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A - C = \{2, 3, 6\}$, $(B - C) - A = \{4, 5\}$, $(A \cup B \cup C)^c = \{10\}$, $C - (A \cup B) = \{7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{1, 6\}$. Entonces es VERDAD que:

a) $(C - A) = \{7, 8, 9\}$
b) $B = \{1, 4, 5, 6, 9\}$
c) $(A \cap B \cap C) = \{1, 9\}$
d) $(C - B) = \{1, 7, 8\}$
e) $(B \cup C)^c = \{2, 3\}$

24) Sean A, B y C subconjuntos no vacíos de un conjunto referencial Re, en el que se cumplen las siguientes condiciones:

- $Re = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
- $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12\}$
- $B \cap C = \{3, 7, 8, 9\}$
- $C - (A \cup B) = \varnothing$
- $B - (A \cup C) = \{1\}$

Obtenga los elementos del conjunto $B - (A \cap B)$.

Scanned by CamScanner

25) Sea $\otimes$ la operación entre conjuntos definida por:

$$A \otimes B = A^c \cap B^c$$

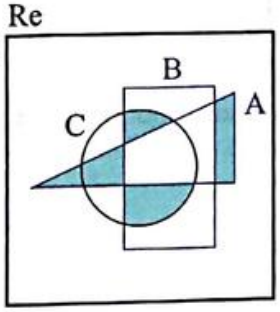
Considere un referencial Re y $F \subseteq P(Re)$, un conjunto no vacío tal que:

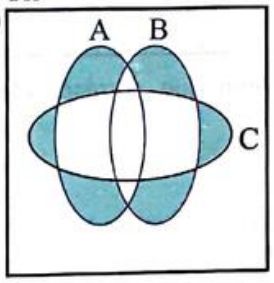
$$\forall A, B \in F, A \otimes B \in F.$$

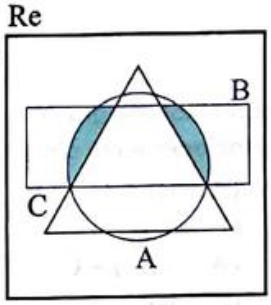
Demuestre que:

a) $A^c \in F$
b) $(A \cap B) \in F$
c) $(A \cup B) \in F$
d) $(A \Delta B) \in F$
e) $(\varnothing \in F) \wedge (Re \in F)$

26) Escriba una expresión con operaciones de conjuntos para los siguientes diagramas de Venn:

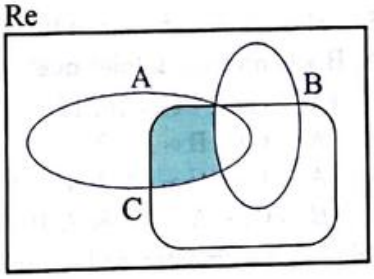
a)


b)


c)


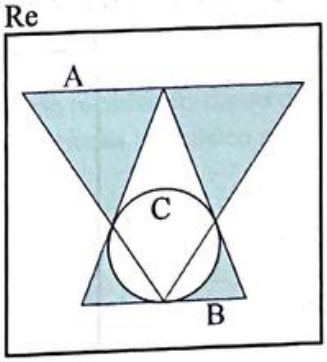
27) La región sombreada del gráfico adjunto representa el conjunto:

a) $C - (A \cap B)$
b) $(C \cup A) - B$
c) $(A \cap C) - B$
d) $(C \cup B) - A$
e) $(B \cap C) - A$



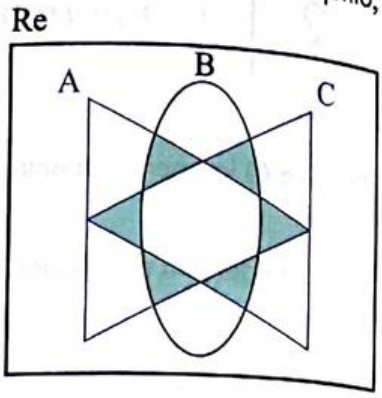
28) Si A, B y C son conjuntos no vacíos, entonces la región sombreada del gráfico adjunto corresponde a:

a) $(B^c \cap Re) \cup (C^c \cap B)$
b) $B^c \cup (C^c \cap B)$
c) $(B - C) \cap A^c$
d) $(A \cup B \cup C) \cap A^c$
e) $(A - B) \cup [(B - C) - A]$



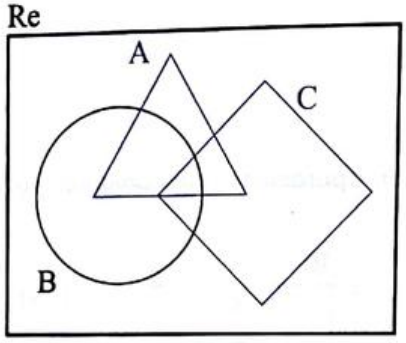
Scanned by CamScanner

29) Si A, B, C son conjuntos no vacíos representados en el diagrama de Venn adjunto, entonces la región sombreada corresponde a:



a) $[(A-B)\cup(B-A)]\cup[(A-B)\cup((B-A)-C)]$
b) $[(A\cap B)-C]\cup[(A-B)\cap C]\cup[(B-A)\cap C]$
c) $[(A\cap B)\cap C^c]\cup[(A\cap B)^c\cap C]$
d) $[(A^c\cup B^c)\cap C]\cup[(A\cup B)\cap C^c]$
e) $[((A-B)\cup(B-A))-C]\cup[C-(A\cap B)]$

30) Considere la siguiente distribución de los conjuntos A, B y C para cierto conjunto referencial Re.



Elabore los diagramas de Venn que corresponden a cada una de las siguientes operaciones entre conjuntos:

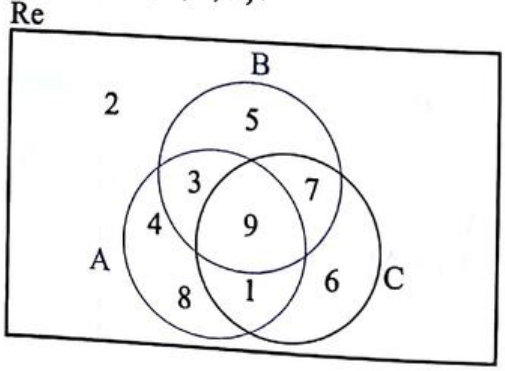
a) $(A-B)\cap C$
b) $(B\cup C)-A$
c) $(A^c\cap B^c)-C$
d) $(C-B)^c-A$
e) $(C-A)\cup B^c$

31) Sea el conjunto referencial $Re=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ y los subconjuntos A, B y C no vacíos, tales que:

- $(A^c\cap B^c)-C=\{6, 12\}$
- $(A\cup C)-B=\{1, 2, 3, 10, 11\}$
- $(A\cup B)-C=\{2, 3, 4, 5, 8, 9\}$
- $(B\cup C)-A=\{7, 8, 9, 10, 11\}$

Tabule los elementos de los conjuntos A, B y C.

32) En el diagrama de Venn que se muestra a continuación A, B y C son subconjuntos del referencial $Re=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:



Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

I) Tabule los conjuntos :
   a) $(A \cap B) \cup C$
   b) $(A^c \cap C) \cup B$
   c) $A - B$
   d) $(A \Delta C) \cap B$

II) Sombree cada conjunto especificado en los ítems anteriores, utilizando un diagrama para cada caso.

2.4 Propiedades de las operaciones entre conjuntos ● ● ● • •

33) Sean A y B subconjuntos de un referencial Re, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. En cada caso, si la proposición es verdadera, demuéstrela formalmente; y, si es falsa, proporcione un contraejemplo:
   a) Si $m \in A$, entonces $m \in P(A)$.
   b) Si $m \in (A \cup B)$, entonces $m \in A$.
   c) Si $m \in (A \cap B)$, entonces $m \in A$.
   d) Si $m \in B$, entonces $m \in (A \cup B)$.
   e) Si $(A \cup B \neq \varnothing)$, entonces $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$.

34) Considere dos conjuntos NO vacíos y de cardinalidad finita ¿en qué caso se cumple que: $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$?, muestre un ejemplo.

35) Sean A y B dos conjuntos cualesquiera.
   a) Demuestre que $\varnothing \notin (P(A) - P(B))$.
   b) Demuestre que $[P(A-B) \subseteq ((P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\})]$.
   c) Determine A y B tales que $P(A - B) \neq [(P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\}]$.

36) Sean A, B y C tres conjuntos, demuestre que:
   a) $[(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)] = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$
   b) $[A \cap C = \varnothing] \Rightarrow [(A - B) - C = A - (B - C)]$

37) Dados los conjuntos A, B, $C \subseteq Re$ (donde Re representa el referencial, no vacío) demuestre que:

$$[(A \Delta B) \cup (B \Delta C)] = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$$

38) En un curso de 60 estudiantes, 2/3 son mujeres y 2/5 están recibiendo clases de música. El máximo número de mujeres que NO están recibiendo clases de música es:
   a) 4
   b) 16
   c) 20
   d) 36
   e) 40

Scanned by CamScanner

39) En una encuesta realizada a personas que adquieren juguetes en vísperas de Navidad se obtuvo la siguiente información:
11 personas compran sólo en la Bahía. 9 personas compran sólo en Pycca. 14 compran en Mi Juguetería y la Bahía. 5 compran en los tres lugares. El número de personas que sólo compran en la Bahía y Pycca es igual al número de personas que sólo compran en Mi Juguetería y Pycca. En la Bahía compran 3 personas más de las que compran en Pycca; y, en Pycca 3 personas más de las que compran en Mi Juguetería.

¿Cuántas personas compran en cualquiera de esos tres lugares?

40) Sea Re el conjunto referencial. Considere dos conjuntos no vacíos $A, B \subseteq Re$. Para cualquier conjunto $X \subseteq Re$, se define un nuevo conjunto $C(X)$ de la siguiente forma:

$$C(X) = \begin{cases} X - B & \text{si} \quad A \cap X \neq \varnothing \\ X \cup B & \text{si} \quad A \cap X = \varnothing \end{cases}$$

a) Compruebe que $C(B) \in \{\varnothing, B\}$
b) Compruebe que $C(A) = A - B$ y $C(A^c) = (C(A))^c$

41) Usando las propiedades del Álgebra Proposicional, demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderas:
a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
b) $A \Delta \varnothing = A$
c) $(A^c)^c = A$
d) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
e) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

42) Sean $A, B, C \subseteq Re$. Empleando las propiedades de Álgebra de Conjuntos, demuestre que las siguientes proposiciones son verdaderas:
a) $[A \subseteq B \subseteq C] \Rightarrow [C - (B - A) = A \cup (C - B)]$
b) $[B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] \Leftrightarrow [A = \varnothing]$
c) $[A \subseteq B] \Leftrightarrow [B^c \subseteq A^c]$

43) En un experimento para estudiar el secado de 80 hojas de plátano, se observó que 10 se secaron estando en sombra, con ventilador y con humedad controlada; 5 se secaron sólo en sombra; 3 sólo con ventilador y 6 sólo con humedad controlada; 15 se secaron con ventilador y humedad controlada, 30 se secaron con sombra y ventilador. Si todas las hojas fueron sometidas a alguna de estas 3 condiciones, determine el número de hojas que se secaron en sombra y humedad controlada.

44) En una encuesta a un grupo de inversionistas se tiene que:
- 100 invierten en acciones.
- 120 invierten en valores.
- 160 invierten en bonos.
- 50 invierten en acciones y bonos.
- 40 invierten en bonos y valores.
- 10 invierten en acciones, valores y bonos.
- 100 invierten en acciones o valores pero no en bonos.

Determine cuántos invierten sólo en valores.

Scanned by CamScanner

45) En una encuesta realizada a 40 estudiantes de primer semestre de la Espol se obtuvieron los siguientes datos: 27 son hombres, 20 estudian ingeniería en computación, de estos últimos 8 estudian ingeniería en computación (especialización multimedia), 6 de las mujeres no estudian ingeniería en computación y 22 de los hombres no estudian ingeniería en computación (especialización multimedia). Con los datos proporcionados, determine de ser posible, cuántas mujeres estudian ingeniería en computación pero no en la especialización multimedia.

46) En un concurso de cocineros en el que se preparan tres comidas criollas: guatita, seco de chivo y encebollado, se obtuvieron los siguientes resultados:

- 2% de cocineros fracasó en las tres comidas.
- 6% de cocineros fracasó en guatita y seco de chivo.
- 5% de cocineros fracasó en seco de chivo y encebollado.
- 8% de cocineros fracasó en guatita y encebollado.
- 29% fracasó en guatita.
- 32% de cocineros fracasó en seco de chivo.
- 36% de cocineros fracasó en encebollado.

a) Construya un diagrama de Venn con los datos proporcionados.
b) Escriba una expresión con operaciones de conjuntos para indicar el porcentaje de cocineros que tuvo éxito.
c) ¿Cuántos cocineros tuvieron éxito en las tres comidas si concursaron 200 personas?

2.5 Predicados de una variable ● ● • • •

47) Defina:

a) Predicado de una variable.
b) Conjunto de verdad de un predicado.
c) Predicado compuesto.

48) Dado el conjunto referencial Re y los predicados $p(x)$ y $q(x)$, demuestre formalmente que:

a) $A[\,p(x) \wedge \neg q(x)] = Ap(x) \cap A^c q(x)$
b) $A[p(x) \rightarrow q(x)] = A^c p(x) \cup Aq(x)$

49) Dado el conjunto referencial $Re = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; y los predicados:

$$p(x): x + 2x - 1 = 0 \text{ y } q(x): x > 1$$

Determine:

a) $Ap(x)$
b) $A[\neg p(x) \wedge q(x)\,]$
c) $A[\neg p(x) \rightarrow \neg q(x)]$
d) $A[p(x) \vee q(x)]$
e) $A[p(x) \leftrightarrow q(x)]$

Scanned by CamScanner

50) Dado el conjunto referencial $\text{Re} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$; y los predicados:

$p(x)$: $x + 1 > 0$

$q(x)$: x es número primo

a) Tabule el conjunto:

$$A[p(x) \rightarrow q(x)] \cap Aq(x)$$

b) Verifique que se cumple la propiedad: $\exists x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\exists x p(x) \wedge \exists x q(x))$

51) Dado el conjunto referencial $\text{Re} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 14, 15\}$; y los predicados:

$p(x)$: x es mayor que 9

$q(x)$: x es menor que 2

Tabule los siguientes conjuntos de verdad:

a) $Aq(x) - Ap(x)$
b) $Aq(x) \cap Ap(x)$
c) $Aq(x) \cup Ap(x)$
d) $\text{Re} - Ap(x)$
e) $A^c q(x) \cap Ap(x)$

52) Dado el conjunto referencial $\text{Re} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y los predicados:

$p(x)$: x es mayor que 1 y menor que 6

$q(x)$: x es mayor o igual que 2

Determine el valor de verdad de cada proposición:

a) $\exists x q(x)$
b) $\forall x p(x)$
c) $\forall x\, [p(x) \vee q(x)]$
d) $\forall x\, [p(x) \wedge q(x)]$
e) $\exists x q(x) \rightarrow \forall x p(x)$

53) Dado el conjunto referencial $\text{Re} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y los predicados:

$p(x)$: $x + 1 = 2x$

$q(x)$: $2x - 1 = 2x - 3$

Determine el valor de verdad de cada proposición:

a) $\exists x p(x) \rightarrow \forall x p(x)$
b) $A[p(x) \rightarrow q(x)] = \text{Re}$
c) $[\forall x p(x) \vee \forall x q(x)] \rightarrow \forall x[p(x) \wedge q(x)]$
d) $\exists x q(x) \rightarrow \forall x p(x)$
e) $[\forall x p(x) \wedge \forall x q(x)] \rightarrow \forall x[p(x) \wedge q(x)]$

54) Dado el conjunto referencial $\text{Re} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y los predicados:

$p(x)$: $2x < 0$

$q(x)$: $(x - 2)(x - 1) = 0$

Determine el valor de verdad de cada proposición:

a) $Ap(x) - Aq(x) = \varnothing$
b) $Aq(x) - Ap(x) = \{1, 2\}$
c) $\text{Re} - Aq(x) = Ap(x)$
d) $[Ap(x) \cap Aq(x)]^c = \text{Re}$
e) $A^c q(x) = \{\dot{x} / x \geq 3\}$

Scanned by CamScanner

55) Sean las siguientes proposiciones r y s:

$$r{:}\forall x(p(x) \Rightarrow q)$$
$$s{:}(\forall x p(x)) \Rightarrow q$$

I) Niegue las proposiciones r y s

II) De las dos implicaciones, $(r \rightarrow s)$ y $(s \rightarrow r)$ determine cuál corresponde a una tautología. Justifique su respuesta.

2.6 Razonamientos con predicados y cuantificadores ● ● ● • •

56) Dado el conjunto referencial $\mathrm{Re} \neq \varnothing$ y los predicados $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$, demuestre formalmente que:

$$[\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \forall x(q(x) \rightarrow r(x))] \rightarrow [\forall x(p(x) \rightarrow r(x))]$$

57) Dado el conjunto referencial $\mathrm{Re} \neq \varnothing$ y los predicados $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$, demuestre formalmente que:

$$[\forall x(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \exists x p(x)] \rightarrow \exists x q(x)$$

58) Determine la validez del siguiente razonamiento:
"Todos los matemáticos son interesantes. Ningún vendedor de seguros es matemático. Existen matemáticos que son profesores. Luego, si Ramón es un profesor interesante, Ramón no es vendedor de seguros".

59) Dadas las siguientes premisas:
"Ningún ecuatoriano es astronauta. Algunos hombres exitosos son ecuatorianos. Algunos astronautas son hombres exitosos. Julio es un hombre exitoso".

Utilizando Teoría de Conjuntos, indique la validez del razonamiento para cada conclusión planteada:

a) Julio es astronauta.
b) Todos los hombres exitosos que son astronautas no son ecuatorianos.

60) Dadas las siguientes premisas:

P_1: Todos los que saben matemáticas son lógicos.
P_2: Algunos economistas saben matemáticas.
P_3: Ningún abogado es lógico.

Utilizando Teoría de Conjuntos, indique la validez del razonamiento para cada conclusión planteada:

a) Todos los que saben matemáticas no son abogados.
b) Todos los economistas son lógicos.

Scanned by CamScanner

61) Considere la siguiente proposición:
"Todas las operadoras de telefonía móvil son usureras, ya que todas las operadoras de telefonía móvil cobran valores demasiado altos".

a) Traduzca la proposición al lenguaje formal.
b) Escriba la negación de esta proposición en lenguaje formal y en español.

62) Considere la siguiente proposición:
"Existen personas que no son confiables, por lo tanto todas las personas no deben ser confiadas".

a) Traduzca la proposición al lenguaje formal.
b) Escriba la negación de esta proposición en lenguaje formal y en español.

63) Dadas las siguientes hipótesis respecto a un homicidio:

H_1: Todos los que conocían a la víctima estuvieron en la fiesta.
H_2: Algunos amigos de la víctima son sospechosos del homicidio.
H_3: Todos los que no estuvieron en la fiesta son sospechosos.
H_4: Arturo conocía a la víctima.

Entonces, es cierto que:

a) Arturo es sospechoso del homicidio.
b) Arturo no es sospechoso del homicidio.
c) No se puede concluir si Arturo es o no sospechoso a partir de la información proporcionada.

64) Dadas las siguientes premisas de un razonamiento:

P_1: Todos los cultivos de frutas son extensos.
P_2: Ningún cultivo forrajero es extenso.
P_3: Algunos cultivos de granos son extensos.

Para cada conclusión planteada a continuación y utilizando Teoría de Conjuntos, analice si el razonamiento es válido.

a) Ningún cultivo de frutas es cultivo de granos.
b) Algunos cultivos de granos son cultivos forrajeros.

2.7 Pares Ordenados y Producto Cartesiano ● ● ● • •

65) Defina:

a) Par ordenado.
b) Producto cartesiano.
c) Terna ordenada.

66) Sean A y B dos conjuntos no vacíos, si $N(A) = 2$ y $N(B) = 1$, entonces $N(P(A \times B)) = 8$.

a) Verdadero b) Falso

67) Si A, B y C son conjuntos no vacíos, entonces $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

a) Verdadero b) Falso

Scanned by CamScanner

68) Dado el conjunto $A = \{1, \{1\}, \varnothing\}$, entonces $N(A \times A) = 2$.

a) Verdadero b) Falso

69) Sean (a, b) y (c, d) dos pares ordenados, $[(a, b) = (c, d)] \leftrightarrow [(a = c) \text{ y } (b = d)]$.

a) Verdadero b) Falso

70) Sean A y B dos conjuntos no vacíos, entonces $A \times B = B \times A$.

a) Verdadero b) Falso

71) Sean A y B dos conjuntos no vacíos, tales que $N(A) = 2$ y $N(B) = 4$, entonces $N(A \times B) + N[P(A \times B)] = 20$.

a) Verdadero b) Falso

72) Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, el producto cartesiano $A \times B$ tiene:

a) 2 elementos.
b) 3 elementos.
c) 4 elementos.
d) 5 elementos.
e) 6 elementos.

73) Proporcione ejemplos de conjuntos A, B, C tales que:

a) $A \times B \neq B \times A$
b) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$
c) $A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$
d) $(A \times B)^c \neq A^c \times B^c$ (Considere un conjunto referencial apropiado)
e) $(A \neq B) \wedge (A \times C = B \times C)$

74) Por Demostración Directa, pruebe la siguiente propiedad del producto cartesiano empleando las Leyes del Álgebra Proposicional:

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

75) Por Demostración Directa, pruebe la siguiente propiedad del producto cartesiano empleando las Leyes del Álgebra Proposicional:

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

2.8 Predicados de dos variables ● ● ● • •

76) Defina:

a) Predicado de dos variables.
b) Conjunto de verdad de un predicado de dos variables.

Scanned by CamScanner

77) La negación de la proposición $\forall x\, \exists y[(x < y) \rightarrow ((x = 3) \vee (y \geq 4))]$ es:

a) $\exists x \forall y\, [(x < y) \wedge (x = 3) \wedge (y \geq 4)]$
b) $\exists x \forall y\, [(x < y) \wedge (x \neq 3) \wedge (y < 4)]$
c) $\exists x \forall y\, [(x \geq y) \wedge (x = 3) \wedge (y \geq 4)]$
d) $\exists x \forall y\, [(x \geq y) \wedge (x \neq 3) \wedge (y \geq 4)]$
e) $\exists x \forall y\, [(x \geq y) \wedge (x \neq 3) \wedge (y < 4)]$

78) A partir de los conjuntos referenciales $\text{Re}_x = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\text{Re}_y = \{-1, -2, -3\}$ se definen los predicados:

$$p(x, y): -2y + x \leq 5 \text{ y } q(x, y): (x \text{ es impar}) \wedge (y < 0)$$

a) Tabule A$p(x, y)$.
b) Tabule A$q(x, y)$.

79) A partir de los conjuntos referenciales $\text{Re}_x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\text{Re}_y = \{0, -1, -2, -3, -4\}$, se definen los predicados:

$$p(x, y): xy \geq 0 \text{ y } q(x, y): (5x + y) \text{ es un número par}$$

Califique cada proposición como Verdadera o Falsa:

a) $\forall x\, \exists y\, p(x, y)$
b) $\exists x\, \forall y\, p(x, y)$
c) $\exists x\, \exists y\, \neg p(x, y)$
d) $\forall x\, \exists y\, q(x, y)$
e) $\exists x\, \forall y\, q(x, y)$

80) Sean $p(x)$, $q(y)$ predicados de una variable, determine la negación de las siguientes proposiciones:

a) $\exists x\, p(x)$
b) $\exists x\, \forall y\, (p(x) \wedge q(y))$
c) $\forall x\, \forall y\, (p(x) \rightarrow q(y))$
d) $\forall x\, p(x) \rightarrow \exists y\, q(y)$
e) $\exists x\, \exists y\, (p(x) \leftrightarrow q(y))$

81) Sean los conjuntos referenciales $\text{Re}_x = \{-3, -1, 2, 4\}$, $\text{Re}_y = \{2, 4, 6\}$ y el predicado $p(x, y): (x - y)^2 = x^2 - y^2$, entonces N(A$p(x, y)$) es igual a:

a) 0
b) 2
c) 6
d) 8
e) 12

82) A partir de los conjuntos referenciales $\text{Re}_x = \{1, 2, 3, 4\}$, $\text{Re}_y = \{0, -1, -2, -3 -4, -5\}$ se definen los predicados:

$$p(x, y): x = -2y \text{ y } q(x, y): x + y \leq 0$$

Califique cada proposición como verdadera o falsa:

a) $\forall y\, \exists x\, p(x, y)$
b) $\exists y\, \forall x\, p(x, y)$
c) $\forall x\, \forall y\, \neg p(x, y)$
d) $\forall y\, \exists x\, q(x, y)$
e) $\exists y\, \forall x\, q(x, y)$

Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

83) Dados los siguientes conjuntos: $\text{Re}_x = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\text{Re}_y = \{-1, -2, -3, -4\}$ y $\text{Re}_z = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Se definen los predicados:

$$p(x, y): x = y$$
$$q(y, z): yz \leq 0$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x \, \exists y \, p(x, y)$
b) $\exists x \, \exists y \, \neg p(x, y)$
c) $\exists y \, \exists z \, q(y, z)$
d) $\forall y \, \exists z \, q(y, z)$
e) $\forall y \, \forall z \neg q(y, z)$

84) Dados los conjuntos referenciales $\text{Re}_x = \{0, 1, 2\}$, $\text{Re}_y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y el predicado $p(x, y): y = \sqrt{x}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\exists y \, \forall x \, p(x, y)$
b) $\forall x \, \exists y \, p(x, y)$
c) $\exists x \, \forall y \, p(x, y)$
d) $\forall x \, \forall y \, p(x, y)$
e) $\forall x \, \exists y \, \neg p(x, y)$

85) Dados los referenciales $\text{Re}_x = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $\text{Re}_y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, y los predicados $r(x, y): y = 0$ y $t(x, y): x^2 + y^2 = -1$, determine sus conjuntos de verdad.

86) Dados los conjuntos referenciales $\text{Re}_x = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $\text{Re}_y = \{0, 1, 4\}$ y el predicado $p(x, y)$: "y es el cuadrado de x", entonces es FALSO que:

a) $\forall x \, \exists y \, p(x, y)$
b) $\forall x \, \exists y \, \neg p(x, y)$
c) $\exists x \, \exists y \, p(x, y)$
d) $\exists y \, \exists x \, p(x, y)$
e) $\exists y \, \forall x \, p(x, y)$

2.9 Relaciones ● ● ● • •

87) Defina:

a) Relación de A en B.
b) Dominio de una relación.
c) Rango de una relación.

Scanned by CamScanner

88) Sean: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, determine la opción que NO es correcta:

a) $R_1 = \{(3, 2), (1, 8), (5, 4)\}$ es una relación de A en B.
b) $R_2 = \{(2, 3), (6, 1), (4, 5)\}$ es una relación de B en A.
c) $R_3 = \{(3, 6), (1, 4), (5, 8), (2, 1)\}$ es una relación de A en B o es una relación de B en A.

89) Dados los siguientes conjuntos:

$Re = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $A = \{-1, 0, 1, 3\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ y las relaciones:

$R_1 = \{(m, n) / (m \in (A - B)) \wedge (n \in (A \cap B^c)) \wedge (m = n)\}$

$R_2 = \{(a, b) / (a \in (A - B^c)) \wedge (b \in (A \cap B)) \wedge (a \leq b)\}$

Construya los diagramas sagitales de:

a) R_1
b) R_2
c) $R_1 \cup R_2$

90) Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, -2\}$ y $C = \{0, 1, 2\}$:

a) Se define la relación R_1 de $(A \times B)$ en C:

$$R_1 = \{((x, y), z) / z = x + y\}.$$

Tabule los elementos de R_1.

b) Se define la relación R_2 de $(B \times C)$ en A:

$$R_2 = \{((x, y), z) / z = xy\}$$

Tabule los elementos de R_2.

c) Determine la cantidad de relaciones que se pueden construir de $(B \times B)$ en B.

91) Dados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ y la relación $R: S \mapsto S$ definida por:

$$R = \{(n, m) / n + 3m = 12\}$$

Determine:

a) R como un conjunto de pares ordenados.
b) Dominio y rango de R.
c) R^{-1}.

92) Sean: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 4, 5, 8\}$, $R = \{(1, 2), (3, 2), (4, 1)\}$ y $S = \{(2, 1), (3, 1), (2, 4), (3, 5)\}$, determine: $S \circ R$.

2.10 Funciones ● ● ● • •

93) Defina:

a) Función de A en B.
b) Función inyectiva.
c) Función sobreyectiva.
d) Función biyectiva.
e) Composición entre dos funciones.

Scanned by CamScanner

94) Sean las funciones de A en A:

$$f = \{(a, u), (e, o), (i, i), (o, e), (u, a)\}$$
$$g = \{(a, e), (e, i), (i, o), (o, u), (u, a)\}$$

Tabule, de ser posible, las nuevas funciones:

a) f^{-1}
b) g^{-1}
c) $f \circ g$
d) $g \circ f$
e) $f^{-1} \circ f$

95) Sea f una función definida de A en B y g una función de B en A tales que:

$$f = \{(*, 1), (?, a), (¡, 1), (\alpha, a)\} \text{ y } g = \{(1, ?), (a, *), (\beta, \alpha), (*, ¡)\}$$

Entonces es FALSO que:

a) $f \circ g$ no es una función sobreyectiva.
b) f no es inyectiva y g es sobreyectiva.
c) $A - B = \{?, ¡, \alpha\}$
d) $f \circ g$ es una función inyectiva.
e) $rg\,(f \circ g) = \{a, 1\} \wedge rg\,(g \circ f) = \{?, *\}$

96) Sean los conjuntos $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \theta\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{b, c, d, e, m\}$, $D = \{\varphi, \pi, \omega, \rho, \eta\}$ y las funciones $f: A \mapsto B$, $g: C \mapsto B$ y $h: D \mapsto C$, tales que:

$f = \{(\alpha, 2), (\beta, 3), (\gamma, 4), (\theta, 5)\}$
$g = \{(b, 5), (c, 2), (d, 3), (e, 4), (m, 5)\}$
$h = \{(\varphi, b), (\pi, m), (\omega, c), (\rho, e), (\eta, c)\}$

Complete la siguiente tabla:

	¿Es inyectiva?	¿Es sobreyectiva?	¿Es biyectiva?
f			
g			
h			
$f^{-1} \circ g \circ h$			

97) Sea el conjunto $A = \{1, 2\}$, construya, de ser posible:

a) Una relación R de A en A que no sea función.
b) Una función f de A en A que no sea inyectiva, ni sobreyectiva.
c) Una función g de A en A que sea inversible.
d) La función g^{-1} del literal anterior, en el caso que exista g.
e) La función $(g \circ g^{-1})$, en el caso que existan g y g^{-1}.

Scanned by CamScanner

98) Dados los conjuntos $A = \{p, q, r, s\}$, $B = \{m, n, o, p\}$ y las funciones de A en B:

$$f = \{(p, m), (q, p), (r, m), (s, n)\}$$
$$g = \{(p, p), (q, m), (r, n), (s, o)\}$$

Determine el valor de verdad de cada proposición:

a) $f \cup g$ es una función inyectiva.
b) g es sobreyectiva pero no inyectiva.
c) f es inyectiva pero no sobreyectiva.
d) g es una función biyectiva.
e) f es una función biyectiva.

99) Sean los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3\}$.

a) Determine cuántas relaciones se pueden construir de A en B .
b) De ser posible, construya la(s) relación(es) del literal anterior que cumpla(n) con ser función(es).
c) De ser posible, construya la(s) función(es) del literal anterior que cumpla(n) con ser inyectiva(s).
d) De ser posible, construya la(s) función(es) del literal b) que cumpla(n) con ser sobreyectiva(s).
e) De ser posible, construya la(s) función(es) del literal b) que cumpla(n) con ser biyectiva(s).

100) Definiendo de forma adecuada los conjuntos A, B, C, D, construya, de ser posible, dos funciones f y g que cumplan con las siguientes condiciones:

- f es una función de A en B.
- g es una función de C en D.
- f es inyectiva.
- g no es inyectiva ni sobreyectiva.
- $f \circ g$ existe y es inyectiva.

101) Considere los conjuntos A, B y las funciones $f: A \mapsto B$ y $g: B \mapsto A$:

$A = \{\alpha, \beta, \lambda, \theta, \mu\}$
$B = \{\Omega, \Delta, \Psi, \Sigma, \Gamma\}$
$f = \{(\beta, \Omega), (\mu, \Delta), (\lambda, \Delta), (\alpha, \Psi), (\theta, \Sigma)\}$
$g = \{(\Omega, \mu), (\Delta, \alpha), (\Gamma, \lambda), (\Psi, \alpha), (\Sigma, \theta)\}$

a) De ser posible, obtenga los elementos de la función $(f \circ g)$.
b) De ser posible, obtenga los elementos de la función $(g \circ f)$.
c) De ser posible, obtenga la función f^{-1}, justificando su respuesta.

102) Sean los conjuntos $A = \{x, y, s, t\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y las funciones:

$$R = \{(1, x), (4, s), (3, t), (2, y)\} \text{ y } S = \{(2, t), (3, y), (1, x), (4, y)\}$$

De ser posible, tabule la función $S \circ R^{-1}$ y elabore su diagrama sagital. Si es posible construir $S \circ R^{-1}$, justificando su respuesta, indique si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

103) A partir de la construcción de un contraejemplo, para cada caso, demuestre que las siguientes proposiciones son falsas:

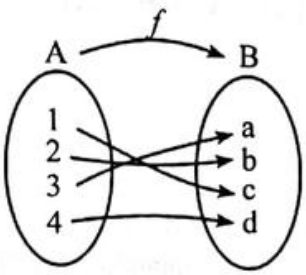
a) Si f es una función inyectiva, entonces f no es sobreyectiva.
b) Si f es una función sobreyectiva, entonces f no es inyectiva.

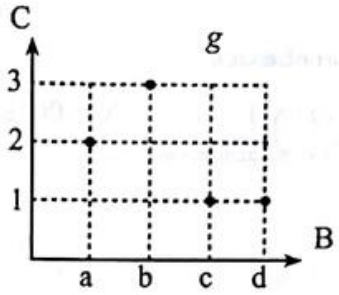
Scanned by CamScanner

2 | Conjuntos

104) Demuestre, de ser posible, que:
"Dadas dos funciones f: A $\mapsto$ B y g: B $\mapsto$ C. Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es".

105) Dadas las funciones f: A $\mapsto$ B y g: B $\mapsto$ C cuyas representaciones gráficas son las siguientes:





a) Si se definieran relaciones cuyo conjunto de partida sea *rg g* y cuyo conjunto de llegada sea *dom f*, determine la cantidad de relaciones que se podrían construir.
b) De ser posible, construya la función f^{-1}.
c) De ser posible, construya la función $g \circ f$.

106) Sean los conjuntos A = {1, 2, 3, 4}, B = {5, 6, 7, 8} y C = {10, 12, 14, 16} y las funciones f: A $\mapsto$ B y g: B $\mapsto$ C, tales que:
$g = \{(5, 10), (6, 12), (7, 14), (8, 16)\}$ y $g \circ f = \{(1, 10), (2, 12), (3, 14), (4, 16)\}$

Determine de ser posible:

a) f^{-1}
b) $g^{-1} \circ f^{-1}$
c) $g \circ g^{-1}$

107) Si f es una función de A en B, entonces es VERDAD que:

a) f es inyectiva $\Leftrightarrow \forall x \in A, \forall y_1, y_2 \in B\ [(y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x)) \rightarrow y_1 = y_2]$.
b) f es sobreyectiva, si y sólo si $rg\, f = A$.
c) f es una función inversible, si y sólo si la relación inversa de f es una función.
d) Si N(A) > N(B), entonces f es sobreyectiva.
e) Si f es inyectiva, entonces N(A) > N(B).

108) Si f es una función de A en B y g es una función de B en A, tales que:
$f = \{(1, \square), (2, \triangle), (3, \bigcirc), (4, \triangle)\}$ y $g = \{(\square, 1), (\triangle, 2), (\parallel, 3), (\bigcirc, 3)\}$

Entonces es VERDAD que:

a) f es inyectiva o g es sobreyectiva.
b) g es la función inversa de f.
c) g^{-1} existe o f^{-1} existe.
d) No es posible construir la función $f \circ g$.
e) $g \circ f = \{(1, 1), (2, 2), (3,3), (4,2)\}$

Scanned by CamScanner

109) Dado un conjunto $A \neq \emptyset$, $B \subseteq A$, determine cuáles de los siguientes literales representa una función y, en aquellos que lo sea, determine si es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva, si se considera A como el conjunto referencial.

a) $f: P(A) \mapsto P(A)$, dada por $\forall X \subseteq A\ [f(X) = X^C]$
b) $g: P(A) \mapsto P(A)$, dada por $\forall X \subseteq A\ [g(X) = X - X^C]$
c) $h: P(A) \mapsto P(A)$, dada por $\forall X \subseteq A\ [h(X) = X \cap B]$

110) Sea Re un conjunto referencial y $A, B \subset Re$. Se define:

$$f: P(Re) \mapsto P(Re)$$
$$X \mapsto f(X) = A \cap (B \cup X)$$

Compruebe que:

a) $f(f(X)) = f(X)$, $\forall X \in P(Re)$.
b) f no es sobreyectiva.

111) Sea Re un conjunto referencial y $A, B \subseteq Re$. Sea $f: A \mapsto B$ y $C \subseteq A$.
Se define $g: C \mapsto B$ tal que $g(x) = f(x)$, $\forall x \in C$, con un ejemplo compruebe que:

$$\forall D \subseteq B,\ g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D).$$

112) Sea F el conjunto de todas las funciones de A en A; y sea $g: A \mapsto A$ una función biyectiva. Se define:

$$\varphi : F \mapsto F$$
$$f \mapsto \varphi(f) = g \circ f$$

Compruebe que φ es biyectiva y determine φ^{-1}.

113) Sea Re un conjunto referencial y $A \subseteq Re$. Se define la siguiente función:

$$f: P(Re) \mapsto P(Re)$$
$$X \mapsto f(X) = X - A$$

a) Si $A \neq \emptyset$ muestre que f no es sobreyectiva.
b) Demuestre que si f es inyectiva entonces $A = \emptyset$.

114) Sean A, B conjuntos no vacíos. Considere la función:

$\varphi: A \times B \mapsto A$ definida por $\varphi(a, b) = a$.

Demuestre que φ es sobreyectiva.

115) Considere el conjunto $F = \{f: R \mapsto R / f \text{ es biyectiva}\}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de R en R. Se define la función dada por:

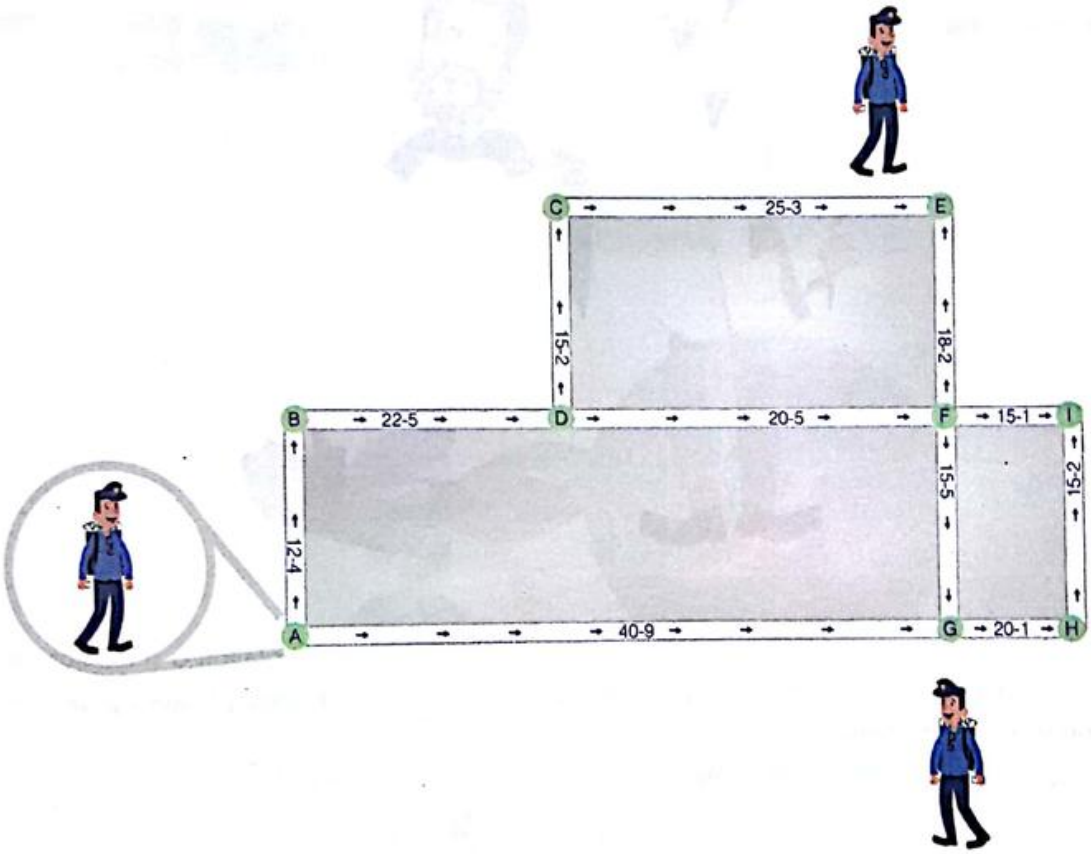
$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

a) Justifique por qué $\forall (f, g) \in F \times F,\ \Psi(f, g) \in F$
b) Compruebe que Ψ no es inyectiva.

Scanned by CamScanner

El cartero

Un cartero debe entregar el correo, a lo largo de cada calle, empezando y terminando en el punto A.



El primer número en cada calle indica el tiempo necesario (en minutos) para entregar la correspondencia a lo largo de la misma. El segundo número indica el "tiempo muerto" (en minutos) necesario para caminar a lo largo de la calle sin entregar el correo.

Se pide calcular el tiempo que le toma al cartero hacer el recorrido hasta volver al punto A, considerando el tiempo necesario de entrega de la correspondencia y el mínimo valor posible para el "tiempo muerto".

Scanned by CamScanner

La paradoja del barbero

En un pequeño pueblo un barbero afirma:

Si denominamos A al conjunto de las personas del pueblo que se afeitan a sí mismos, su complemento es el conjunto de las personas que no se afeitan a sí mismos. ¿A qué agrupación pertenece el barbero?

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

Desafío

Las edades de las tres hijas

A partir de este diálogo, ¿cuáles son las edades de las hijas?

Si no puede resolver este desafío, busque la solución en la página correspondiente del presente capítulo.

Como dato curioso, este problema se le atribuye a Albert Einstein.

Scanned by CamScanner

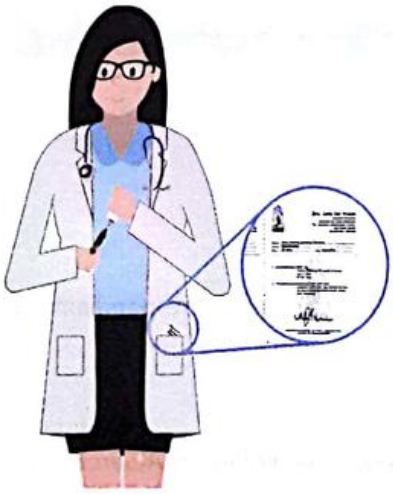
Introducción

Es innegable que a lo largo de la historia, los diferentes conjuntos numéricos han sido un soporte fundamental para la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria que van desde la necesidad primitiva del hombre de contar objetos o animales, hasta los requerimientos actuales relacionados con los grandes avances en materia de ingeniería, tecnología; y, ciencias en general.

Evidencias de estos hechos guardan relación con lo realizado por los sumerios cuando 3 500 años a.C. crearon un calendario, siendo pioneros en el desarrollo de la Aritmética; y, los babilonios quienes construyeron calculadoras en tablas de arcilla 2 000 años a.C.

Por otra parte, los diferentes sistemas de numeración introducidos por egipcios, babilonios, mayas, árabes, entre otros; a más de la conceptualización de números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales, dieron paso al desarrollo de la Aritmética, el Álgebra, el Análisis Combinatorio; así como al dominio de las funciones numéricas.

Egipcios	𓏺	𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺	𓐄	𓐄𓏺	𓐄𓏺𓏺	𓐄𓏺𓏺𓏺	𓐄𓏺𓏺𓏺𓏺	𓎆	𓍢	𓆼
Babilónicos	𒐕	𒐕𒐕	𒐕𒐕𒐕	𒐕𒐕𒐕𒐕	𒐕𒐕𒐕 𒐕	𒐕𒐕𒐕 𒐕𒐕	𒐕𒐕𒐕 𒐕𒐕𒐕	𒐕𒐕𒐕 𒐕𒐕𒐕𒐕	𒐕𒐕𒐕 𒐕𒐕𒐕 𒐕	𒐕𒐕𒐕 𒐕𒐕𒐕 𒐕𒐕	𒌋	
Romanos (primitivos)	I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	IX	X	C	CIↃ
Chinos	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千
Indostanos	२	३	४	५	६	७	८	९	१०			
Mayas	•	••	•••	••••	—	•̲	••̲	•••̲	••••̲	=	𝌆	
Arábigos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000



Hoy en día, sin fundamentos numéricos, sería imposible que un médico prescriba la medicación a un paciente; que un agrónomo calcule la composición requerida de abonos o fertilizantes para diferentes cultivos; y, que un ingeniero estudie la posición apropiada de un cohete para aumentar la eficiencia de masa y su radio de alcance.

La exploración de nuevos descubrimientos en el mundo moderno exigirá continuar reflexionando en el rol de los conjuntos numéricos, relacionándolos con tamaños, instrucciones, acciones, procesos, soluciones ideales o estructuras bien definidas, temas cuyas bases desarrollaremos en el presente capítulo.

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

3.1 Conjuntos Numéricos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Describir los diferentes conjuntos numéricos.
- Establecer relaciones entre los conjuntos numéricos.
- Representar números en la recta real.

Desde los capítulos anteriores, con el propósito de ejemplificar temas relativos a sus contenidos, hemos considerado diferentes elementos de conjuntos numéricos. Uno de los más utilizados, es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, los cuales deben su nombre a que históricamente el ser humano los empleó de manera intuitiva, para contar. Muchos autores consideran al cero como elemento del conjunto de los números naturales; y bajo este criterio, se define el nuevo conjunto $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, también utilizado en esta obra.

Por otra parte, en algunas situaciones de la vida diaria, tales como:

* Determinar el número que sumado con 5, dé por resultado 2.
* Tener un sobregiro de \$100 en una cuenta corriente.
* Disminuir la temperatura de 25°C a 20°C en un cierto instante de tiempo.
* Adeudar cierta suma de dinero.

Nos encontramos con la dificultad de que no existen números naturales que puedan resolver dichos problemas. Las soluciones pertenecen a un nuevo conjunto denominado conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, del alemán zahl (número).

¿Existe algún número que multiplicado por 2 sea 1? En general, dados dos números enteros m y n cualesquiera, ¿existe un número entero x que multiplicado por n $(n \neq 0)$ sea igual a m? La respuesta negativa a estas preguntas obligó a los matemáticos a una ampliación del conjunto $\mathbb{Z}$, introduciendo un nuevo conjunto numérico denominado conjunto de los números racionales, denotado por $\mathbb{Q}$ y definido por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ f / f = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$, del inglés **q**uotient (cociente).

Un número racional es aquel que puede expresarse como una fracción $\frac{p}{q}$ entre dos números enteros: p (numerador) y q (denominador), con denominador q diferente de cero.

Si el numerador es menor que el denominador, se dice que la fracción es **propia**. Ejemplos de fracciones propias son: $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{7}{10}$.

Si el numerador es mayor que el denominador, se dice que la fracción es **impropia**. Ejemplos de fracciones impropias son: $\frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{10}{3}$.

Pero también existen números que no pueden ser representados como una fracción, a este conjunto lo denominamos $\mathbb{I}$: conjunto de los números irracionales. Tales números existen, por ejemplo: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, e, \pi$, etc.

Scanned by CamScanner

Como se puede observar existen números irracionales que pueden representarse a través de un radical, los cuales se conocen como **irracionales algebraicos**; mientras que aquellos que no pueden representarse con radicales se conocen como **irracionales trascendentes.**

Tanto los números racionales como los irracionales forman el conjunto de los números reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. La siguiente figura muestra cómo se relacionan los conjuntos numéricos mencionados:

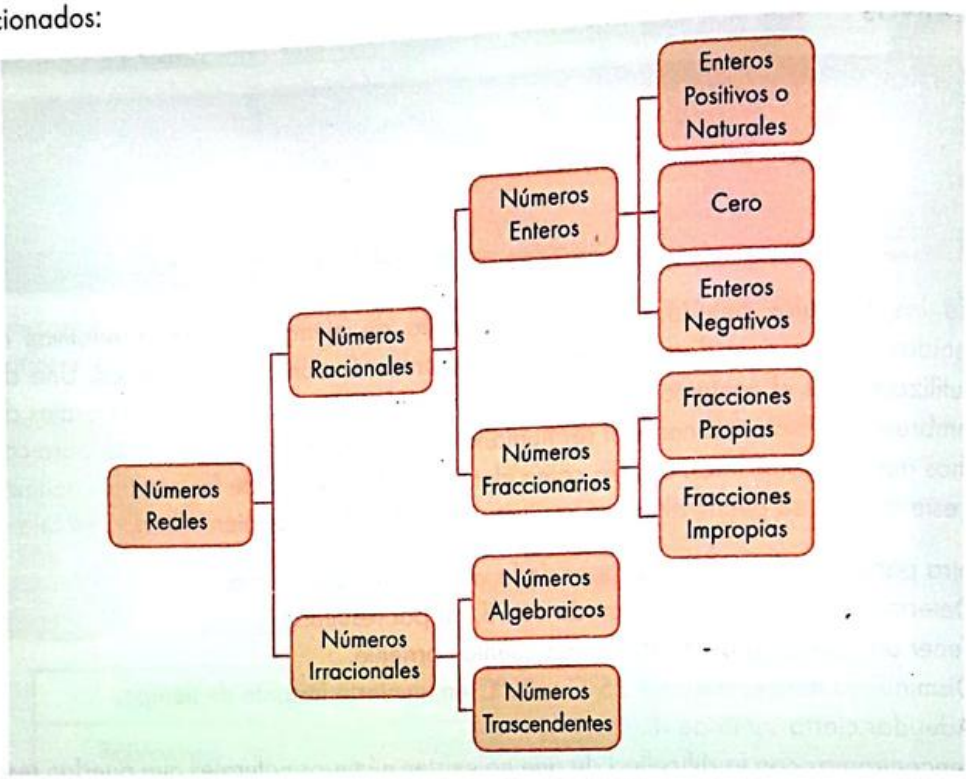


Figura 3.1: Relación de los Conjuntos Numéricos.

Se puede utilizar una recta dibujada de manera horizontal, sobre la cual seleccionamos un punto y lo marcamos con **0** (origen), este punto representa el número cero. Si queremos identificar un número positivo, lo marcamos a la derecha del cero, mientras que si es negativo, lo marcamos a la izquierda del cero. A esta recta se la denomina **recta de los números reales o recta numérica.**

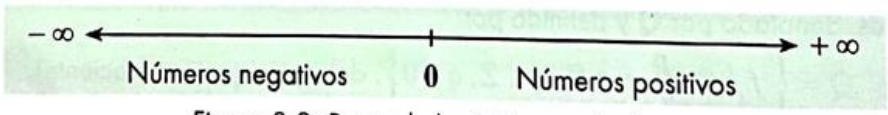


Figura 3.2: Recta de los Números Reales.

Si consideramos números enteros a la derecha de **0**, estamos hablando del conjunto $\mathbb{Z}^+$, mientras que los que se encuentran a la izquierda de **0**, representan el conjunto $\mathbb{Z}^-$. El cero no es positivo ni negativo.

Las mismas consideraciones se aplicarán para los números racionales, irracionales y reales en general. Dado que la cardinalidad de estos conjuntos es infinita, se utilizará el símbolo ∞ para representarla en la recta numérica.

Si se tratara de un valor tan grande y positivo como sea posible, entonces se lo representará con + ∞; mientras que si el valor es tan grande como sea posible, pero negativo, entonces se utilizará − ∞.

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

Ejemplo 3.1 Clasificación de números.

Dados los números reales: $\frac{3}{4}, \sqrt{3}, -30, 2\pi, 115$, identifique el subconjunto al cual pertenecen:

* $\frac{3}{4}$ es una fracción propia y por lo tanto un número racional ya que se puede escribir de la forma $\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.
* $\sqrt{3}$ y 2π son números irracionales ya que no pueden ser representados como una fracción entre dos números enteros.
* -30 es un número entero negativo y por lo tanto, un número racional.
* 115 es un número natural, entero positivo y por lo tanto, un número racional.

Número	$\frac{3}{4}$	$\sqrt{3}$	-30	2π	115
Subconjunto	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}$

Ejemplo 3.2 Relaciones entre conjuntos numéricos.

Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

a) Todos los números enteros son naturales.
b) 0 es un número entero positivo.
c) $[\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}] \rightarrow (\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing)$

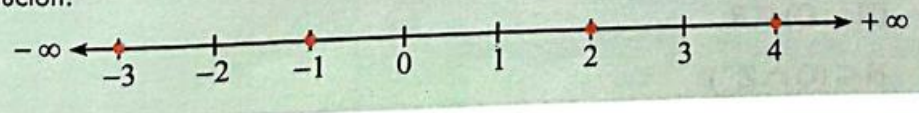
Solución:

a) Esta proposición es falsa. El número -3 es entero pero no es natural.
b) Esta proposición es falsa. El número 0 no es positivo ni negativo.
c) Esta proposición es verdadera. El antecedente de la condicional es falso, ya que $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} - \{0\}$ y el consecuente es verdadero, ya que los conjuntos numéricos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son disjuntos.

Ejemplo 3.3 Representación de números enteros en la recta real.

Represente en la recta real los números: $-3, -1, 2, 4$.

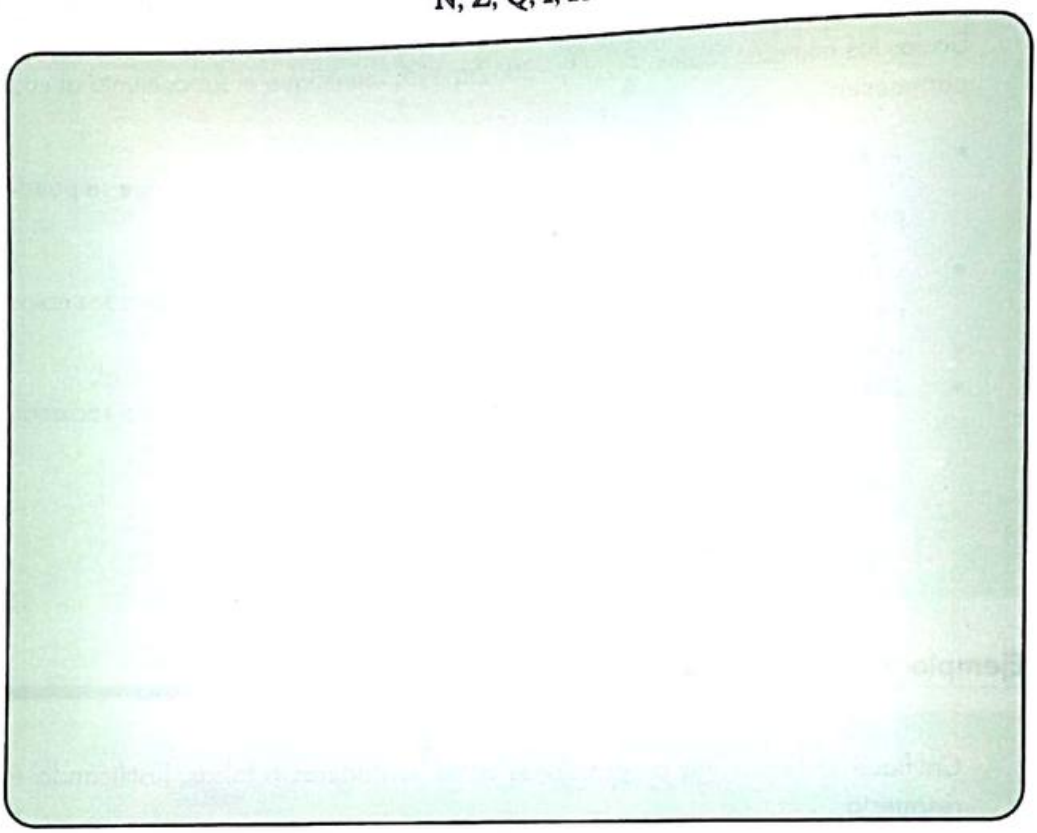
Solución:



Scanned by CamScanner

1) Represente en un diagrama de Venn los siguientes conjuntos numéricos:

$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{I}, \mathbf{R}$



2) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Escriba 1 en el recuadro si la proposición es verdadera y 0 si es falsa.

a) 2 es un número racional. ☐

b) π es un número racional. ☐

c) $\left(\frac{e\sqrt{3}}{7}\right)$ es un número real. ☐

d) 0 es un número natural. ☐

e) 0 es un número entero o no es un número racional. ☐

f) $\forall n \in \mathbb{R}$, si n es un número natural, entonces es racional. ☐

g) $\forall n \in \mathbb{R}$, si n es un número entero negativo, entonces es racional. ☐

h) $\exists n \in \mathbb{R}, n \in (\mathbf{Q} \cap \mathbf{I})$ ☐

i) $(\mathbf{N} \cup \mathbf{Q}) \subseteq \mathbf{R}$ ☐

j) $\mathbf{N} \subseteq (\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}^{-})$ ☐

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

3) Explique brevemente con un ejemplo, la utilidad de estudiar números racionales en la vida diaria.

4) Considere el siguiente predicado de tres variables y sus respectivos referenciales:

$$s(p,q,f):\ f=\frac{p}{q},\quad \text{Re}_p=\mathbb{Z},\quad \text{Re}_q=\mathbb{Z}-\{0\},\quad \text{Re}_f=\mathbb{Q}$$

Determine en cada caso, al menos 2 ternas (p, q, f) que cumplan con lo siguiente:

Ej) $s(p, q, 4) \equiv 1$

$s(8, 2, 4)$: $4=\frac{8}{2} \rightarrow s(8, 2, 4) \equiv 1$

$s(16, 4, 4)$: $4=\frac{16}{4} \rightarrow s(16, 4, 4) \equiv 1$

a) $s(p, q, 3) \equiv 1$

$\therefore 3=\frac{q}{3}$

b) $s(p, 3, f) \equiv 0$

$\therefore f=\frac{p}{3}$

c) $s(100, q, f) \equiv 0$

$F=\frac{100}{q}$

Scanned by CamScanner

3.2 Representación Decimal

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Representar un número racional en forma fraccionaria o decimal.
- Dada una representación decimal, determinar la fracción que le corresponde.
- Dado un número racional, representarlo en la recta real.
- Reconocer la diferencia entre la representación decimal de un número racional y uno irracional.

Los números reales pueden ser representados con cifras enteras y cifras decimales. Los números reales racionales tienen representaciones decimales con una cantidad finita de dígitos, o con cierto número de dígitos que aparecen indefinidamente siguiendo algún patrón de repetición.

Por ejemplo, es común escribir: $\frac{2}{5} = 0.4$ que tiene un solo decimal, pero también es correcto escribir $\frac{2}{5} = 0.40000...$, donde el 0 se repite de forma indefinida; $\frac{1}{6} = 0.166666...$, donde el dígito 6 se repite indefinidamente; $\frac{232}{99} = 2.343434...$ tiene los dígitos 3 y 4 repetidos en la secuencia decimal.

Los números reales irracionales tienen representaciones decimales que no terminan ni tienen un patrón de repetición. Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1.414213...$, $\pi = 3.14159...$, $e = 2.71828...$ En la práctica, los números irracionales generalmente son representados por aproximaciones. Se suele utilizar el símbolo $\approx$ (el cual se lee "es aproximadamente igual a"). Por ende, podemos escribir: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\pi \approx 3.1416$, $e \approx 2.72$.

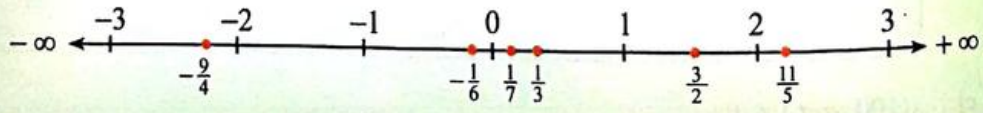
Para lograr la representación decimal, en el caso de números racionales, es suficiente dividir el numerador para el denominador.

Ejemplo 3.4 Representación decimal de números racionales.

$\frac{3}{2} = 1.5$ $\quad \frac{11}{5} = 2.2$ $\quad -\frac{9}{4} = -2.25$

$\frac{1}{3} = 0.3333...$ $\quad -\frac{1}{6} = -0.16666...$ $\quad \frac{1}{7} = 0.142857142857...$

Estos números pueden ser representados gráficamente en la recta real:



Cada vez que un número racional (fracción) se representa por medio de un número con infinita cantidad de decimales, estos últimos se muestran como la repetición sucesiva de una cierta cantidad finita de dígitos que se denomina período. Para evitar repetir los números, podemos utilizar "−" en la parte superior del período.

Scanned by CamScanner

En el ejemplo 3.4 se puede observar que:

NÚMERO RACIONAL	PERÍODO	REPRESENTACIÓN DECIMAL
$\frac{1}{3}$	3	$0.\overline{3}$
$-\frac{1}{6}$	6	$-0.1\overline{6}$
$\frac{1}{7}$	142857	$0.\overline{142857}$

Para transformar un decimal periódico en fracción, utilizaremos el siguiente procedimiento:

1. Denominar como x al número decimal periódico.
2. Localizar el período del número.
3. Llevar el punto decimal después del primer período, multiplicando al número x por la potencia de base diez, correspondiente a la cantidad de decimales recorridos.
4. Llevar el punto decimal antes del primer período, multiplicando al número por la potencia de base diez, correspondiente a la cantidad de decimales recorridos.
5. Restar las expresiones obtenidas en los numerales 3 y 4.
6. Despejar x.
7. Simplificar en caso de ser posible.

Utilizando el procedimiento anteriormente descrito, se pueden obtener las fracciones correspondientes a los tres números decimales periódicos de la siguiente tabla.

1.	$x = 0.3333...$	$x = 0.16666...$	$x = 0.142857142857...$
2.	Período: 3	Período: 6	Período: 142857
3.	$10^1 x = 3.3333...$	$10^2 x = 16.666...$	$10^6 x = 142857.142857...$
4.	$10^0 x = 0.3333...$	$10^1 x = 1.666...$	$10^0 x = 0.142857...$
5.	$9x = 3$	$90x = 15$	$999999x = 142857$
6.	$x = \frac{3}{9}$	$x = \frac{15}{90}$	$x = \frac{142857}{999999}$
7.	$x = \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{6}$	$x = \frac{1}{7}$

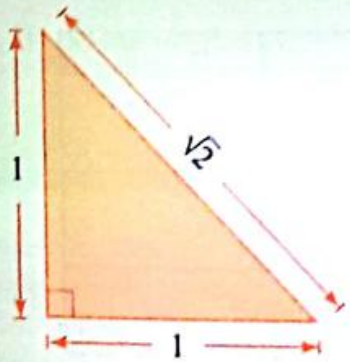
En caso de que el número decimal periódico posea parte entera, debe separársela de la parte decimal para aplicar el procedimiento anterior a esta última. Finalmente, se debe sumar la parte entera con la fracción obtenida, cuyo resultado será la representación fraccionaria de todo el número.

La suma de un número entero y una fracción irreducible proporciona la representación en forma mixta de un número racional. Así por ejemplo, el número $\frac{5}{4} = 1.25$ puede representarse como el número mixto $1\frac{1}{4} = 1 + 0.25$.

Scanned by CamScanner

Posteriormente, en la sección de sucesiones, verificaremos que un número decimal periódico puede representarse a través de una fracción.

Ejemplo 3.5 Representación decimal de números irracionales.

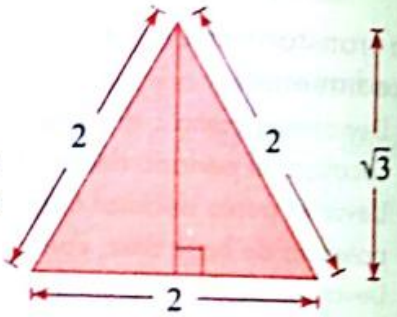


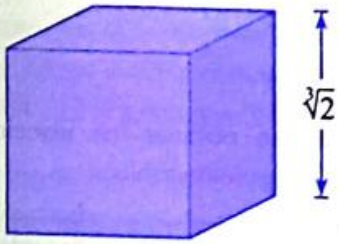
$\sqrt{2} = 1.414213562373095...$

Este número puede representar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos tienen medida igual a **1**.

$\sqrt{3} = 1.732050807568877...$

Este número puede representar la longitud de la altura de un triángulo equilátero cuyos lados miden **2** unidades.



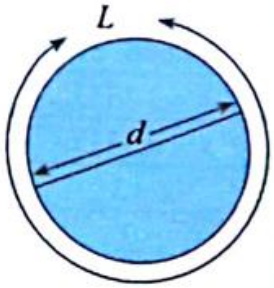


$\sqrt[3]{2} = 1.259921049894873...$

Este número puede representar la longitud de la arista de un cubo cuyo volumen es igual a **2** unidades cúbicas.

$\pi = 3.141592653589793...$

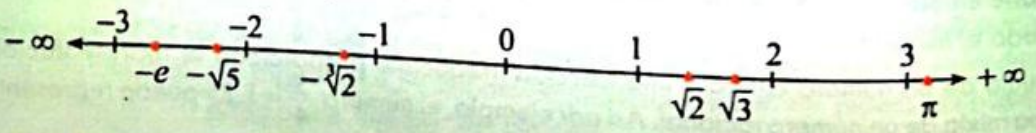
Este número resulta del cociente entre la longitud de una circunferencia y la medida de su diámetro.



$\pi = \frac{L}{d}$

Como se podrá apreciar, estos números forman parte del mundo que nos rodea, por lo que es necesario trabajar con ellos.

Los números irracionales pueden ser representados gráficamente en la recta real, a partir de su aproximación decimal.



Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

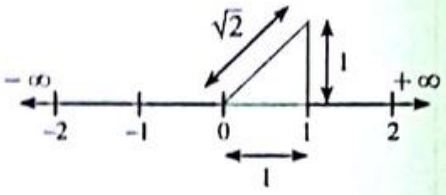
Existe un procedimiento interesante para graficar en la recta real los números irracionales, tal como se explica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6 Representación de números irracionales.

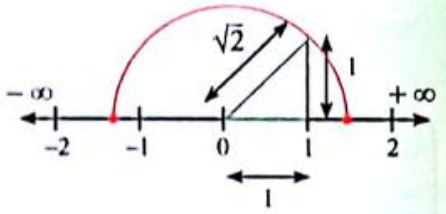
Represente gráficamente los números irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ en la recta numérica.

Solución:

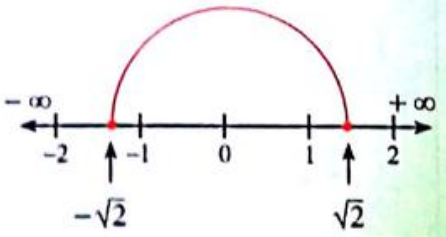
1. A partir del cero ubicado en la recta real, se construye un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 unidad, de manera que la hipotenusa del mismo mida $\sqrt{2}$ unidades.



2. Tomando como centro el cero de la recta real se grafica una semicircunferencia con longitud de radio igual a la medida de la hipotenusa del triángulo construido, esto es, $\sqrt{2}$ unidades.



3. La intersección obtenida entre la semicircunferencia y la recta real representará a la derecha de cero, al número irracional $\sqrt{2}$; mientras que la intersección ubicada a la izquierda, corresponderá al irracional $-\sqrt{2}$.



Scanned by CamScanner

1) Obtenga la representación decimal de los siguientes números racionales y grafíquelos en la recta numérica:

a) $\frac{8}{5}$ b) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{t}{2}$ si $t = 1.7$

2) Obtenga la fracción simplificada de los siguientes números racionales:

a) 3.5 b) 0.12 c) $0.\overline{12}$

3) Indique con un ✓ si el número es racional y con una **X** si es irracional.

a) 7.313131...

b) 0.505005000...

c) −3.54787878...

d) 5.070077000777...

Scanned by CamScanner

4) Exprese como número mixto el siguiente decimal periódico:

2.127272727...

5) Represente gráficamente el número $\sqrt{5}$ en la recta real, considerando un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2 unidades.

Scanned by CamScanner

3.3 Operaciones Binarias

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dado un conjunto y una operación definida sobre él, reconocer si es o no binaria interna.
- Dada una operación binaria interna, identificar qué propiedades cumple.

Algunas expresiones, tales como: $2 + 4 = 6$; $4 - 6 = -2$; $5 \times 7 = 35$; y, $20 \div 5 = 4$ tienen la particularidad de que si escogemos dos elementos de un conjunto, numérico en este caso, la operación genera un tercer número dentro o fuera del conjunto al cual se está haciendo referencia.

En general, las operaciones que toman dos elementos de un conjunto cualquiera y dan como resultado un tercer elemento se consideran **binarias**; sin embargo, si su resultado se encuentra en el mismo conjunto se denominan operaciones **binarias internas**.

Definición 3.1 (Operación binaria interna)

Sea un conjunto $S = \{a, b, c, ...\}$, la operación $*$ es una operación binaria interna en S, si y sólo si a cada par ordenado $(a, b) \in S \times S$, donde $a \in S$ y $b \in S$, le corresponde un elemento único $a*b \in S$, donde $a*b$ se lee "a operación b".

La operación binaria interna puede ser considerada como una función:

$$*: S \times S \mapsto S$$

En esta definición hay que tomar en cuenta lo siguiente:

- El orden de a y b es importante, porque (a, b) es un par ordenado y podría suceder que $a*b \neq b*a$.
- La operación tiene que estar definida para todos los pares ordenados (a, b).

3.3.1 Propiedades de las operaciones binarias internas

Las propiedades que se enunciarán a continuación pueden o no cumplirse, según sea el caso, sin perjuicio de que la operación sea binaria interna.

$\forall a, b \in S\,[a*b = b*a]$	Conmutativa
$\forall a, b, c \in S\,[a*(b*c) = (a*b)*c]$	Asociativa
$\exists\, n \in S\, \forall a \in S\,[a*n = n*a = a]$	Elemento neutro
$\forall a \in S\, \exists\, \tilde{a} \in S\,[a*\tilde{a} = \tilde{a}*a = n]$	Elemento inverso

Cuadro 3.1: Propiedades de las operaciones binarias internas.

La propiedad conmutativa indica que el orden de los operandos no es importante al realizar la operación.

La propiedad asociativa indica que se pueden agrupar en diferente forma los elementos de la operación.

Scanned by CamScanner

La propiedad de poseer elemento neutro n indica que al realizar la operación entre cualquier elemento del referencial y este elemento, o viceversa, no lo modifica al primero.

La propiedad de poseer elemento inverso $\tilde{a}$ indica que al realizar la operación entre cualquier elemento del referencial y este elemento, o viceversa, se obtiene el elemento neutro. Esta propiedad sólo deberá probarse en caso de existir elemento neutro; sin embargo, la existencia del elemento neutro no garantiza la existencia del inverso.

Ejemplo 3.7 Operación binaria interna y propiedades.

Sea el conjunto $\mathbb{Z}$ y la operación binaria $*$ definida en $\mathbb{Z}$, $a * b = a + 3b$.

Se verifica que:

$a + 3b \in \mathbb{Z}$, para cada elemento a, b de $\mathbb{Z}$. **Por lo tanto, la operación binaria es interna.**

Nótese que la operación binaria interna no cumple las siguientes propiedades:

Conmutativa, $a + 3b \neq b + 3a$. Basta mostrar el siguiente contraejemplo para $a = 1$ y $b = 2$; verificándose que $1 * 2 = 7$, pero $2 * 1 = 5$.

Asociativa, $a + 3(b + 3c) \neq (a + 3b) + 3c$. El contraejemplo podría ser $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$, en el cual $1 * (2 * 3) = 34$, mientras que $(1 * 2) * 3 = 16$.

Elemento neutro, $a * n = a + 3n$ y $n * a = n + 3a$, por lo tanto, $a * n \neq n * a$.

Elemento inverso, esta propiedad no tiene sentido probarla ya que no existe elemento neutro.

Ejemplo 3.8 Operación binaria interna.

Se define $S = \{▲, ■, ●\}$, y la operación $*$ sobre S mostrada en la siguiente tabla:

*	▲	■	●
▲	▲	■	●
■	●	▲	■
●	■	●	▲

En esta operación el resultado se obtiene combinando cada elemento que se encuentra debajo del símbolo de la operación $(*)$, con cada uno de los que se encuentran a la derecha de dicho símbolo. Así, ▲ * ■ = ■.

Scanned by CamScanner

De acuerdo a esto, se observa que cualquier combinación siempre dará un elemento de S. **Por lo tanto, la operación binaria es interna.**

Adicionalmente, se puede verificar que la operación no cumple la propiedad conmutativa [● * ■ ≠ ■ * ●]; no cumple la propiedad asociativa: [● * (▲ * ■) ≠ (● * ▲) * ■]; ni la del elemento neutro.

Con esto, se amplía la aplicación de las operaciones binarias internas a conjuntos abstractos.

Ejemplo 3.9 Operación binaria interna.

Dado el conjunto $A = \{\Psi, \Omega\}$ y la operación binaria $*$: $P(A) \times P(A) \mapsto P(A)$ definida sobre $P(A)$ en donde $P(A)$ es el conjunto potencia de A y $*$ es la operación de unión entre conjuntos:

a) Construya una tabla con los resultados de esta operación.
b) Justificando su respuesta, determine el valor de verdad de cada proposición:
   i) La operación binaria $*$ es interna.
   ii) La operación binaria $*$ tiene elemento neutro.

Solución:

a) Se obtienen los elementos del conjunto potencia para el conjunto A:

$$P(A) = \{\varnothing, \{\Psi\}, \{\Omega\}, A\}$$

La tabla sería la siguiente:

*	∅	{Ψ}	{Ω}	A
∅	∅	{Ψ}	{Ω}	A
{Ψ}	{Ψ}	{Ψ}	A	A
{Ω}	{Ω}	A	{Ω}	A
A	A	A	A	A

b) i) La operación binaria sí es interna, porque al seleccionar dos elementos del conjunto $P(A)$ y hacer la operación binaria entre ellos, se puede observar que el resultado pertenece al mismo conjunto $P(A)$, esto es, cumple con:

$$\forall\, a, b \in P(A)\,[a * b \in P(A)]$$

$\therefore$ La proposición es verdadera.

ii) La operación sí tiene elemento neutro. Si se selecciona cualquier elemento del conjunto $P(A)$ y se efectúa la operación con el elemento $\varnothing$, el resultado sería el mismo elemento sin importar el orden de los operandos.

$$\exists\, n \in P(A)\ \forall\, a \in P(A)\,[a * n = n * a = a];\ n = \varnothing$$

$\therefore$ La proposición es verdadera.

En el caso de que en el conjunto S se definan dos operaciones binarias internas, $*$ y $\#$, es posible hablar de una **propiedad distributiva**, si y sólo si:

$$\forall a, b, c \in S,\ a*(b \# c) = (a*b) \# (a*c)$$

Como el lector podrá recordar, en la teoría de proposiciones y conjuntos se hizo uso de esta propiedad.

Scanned by CamScanner

Autoevaluación

1) Sea el conjunto $S = \{a, b, c\}$ sobre el cual se define la operación binaria interna ∇ por medio de la siguiente tabla:

∇	a	b	c
a	b	a	a
b	b	c	b
c	a	b	c

A partir de los conjuntos $Re_x = Re_y = Re_z = S$, se define el predicado $p(x, y, z)$: $x \nabla y = z$. Obtenga $Ap(x, y, z)$.

2) Considere el conjunto S y la operación ∇ del numeral anterior. Indique el valor de verdad de cada proposición.

a) $(c \nabla c) = [(b \nabla c) \nabla c]$

b) La operación ∇ es conmutativa.

c) $[(c \nabla b) \nabla c] = (b \nabla b)$

d) $[(a \nabla b) \nabla (a \nabla c)] \neq (c \nabla b)$

e) $(a \nabla a) = [(b \nabla c) \nabla a]$

f) $[(a \nabla b) \nabla (a \nabla c)] \nabla (c \nabla b) \neq (c \nabla c)$

Scanned by CamScanner

3) Dado el conjunto $S = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ y $\otimes$ una operación binaria definida en S de la siguiente manera:

$\otimes$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Escriba 1 en el recuadro si la proposición es verdadera y 0 si es falsa:

a) La operación binaria $\otimes$ es interna. ☐
b) La operación es conmutativa. ☐
c) La operación tiene elemento neutro. ☐
d) $[(\clubsuit \otimes \diamondsuit) \otimes \clubsuit] = \clubsuit$ ☐
e) La operación no es asociativa. ☐

4) Sea el conjunto $S = \mathbf{Z}$ y sea $*$ una operación binaria tal que:

$$\forall a, b \in S \ [a * b = a + b + 2ab]$$

Entonces, $[2 * (5 * 1)] * [2 * ((-2) * 0)]$ es igual a _____

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

3.4 Operaciones entre Números Reales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Realizar operaciones de adición y multiplicación sobre $\mathbb{R}$.
- Aplicar propiedades de las operaciones de los números reales.
- Reconocer expresiones no definidas en $\mathbb{R}$.

Las operaciones de adición (+) y multiplicación (·) se definen en el conjunto de los números reales, tal como se describe a continuación:

* **Adición:**

  Es una operación binaria interna tal que $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto (a + b)$

  y cumple con las siguientes propiedades:

$\forall a \in \mathbf{R}\ \forall b \in \mathbf{R}\ (a+b=b+a)$	Conmutativa
$\forall a \in \mathbf{R}\ \forall b \in \mathbf{R}\ \forall c \in \mathbf{R}\ (a+(b+c)=(a+b)+c)$	Asociativa
$\exists!\ 0 \in \mathbf{R}\ \forall a \in \mathbf{R}\ (a+0=0+a=a)$	0 es el elemento neutro aditivo
$\forall a \in \mathbf{R}\ \exists b \in \mathbf{R}\ (a+b=b+a=0)$	b es el elemento inverso aditivo

* **Multiplicación:**

  Es una operación binaria interna tal que $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto (a \cdot b)$

  y cumple con las siguientes propiedades:

$\forall a \in \mathbf{R}\ \forall b \in \mathbf{R}\ (a \cdot b = b \cdot a)$	Conmutativa
$\forall a \in \mathbf{R}\ \forall b \in \mathbf{R}\ \forall c \in \mathbf{R}\ (a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$	Asociativa
$\exists!\ 1 \in \mathbf{R}\ \forall a \in \mathbf{R}\ (a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$	1 es el elemento neutro multiplicativo
$\forall (a \in \mathbf{R} \wedge \neg(a=0))\ \exists b \in \mathbf{R}\ (a \cdot b = b \cdot a = 1)$	b es el elemento inverso multiplicativo

A más de las propiedades anotadas, existe la **propiedad distributiva** para estas operaciones, la cual puede expresarse así:

$$\forall a, b, c \in \mathbf{R}\ [a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)]$$

Podemos definir las operaciones de sustracción (−) y división (÷) gracias a la existencia de los inversos aditivos y multiplicativos, respectivamente. Además, es importante anotar que existen ciertas expresiones que no están definidas en $\mathbb{R}$, algunas de ellas son:

* Raíces de índice par de números negativos; ej: $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$.
* Cocientes en que el divisor es cero; ej: $\frac{3}{0}$, $-\frac{10}{0}$.
* Potencias de base cero y exponente cero; ej: 0^0, $(2-2)^0$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.10 Operaciones entre números reales.

Determine los inversos aditivos de los siguientes números:

a) 25
b) $\sqrt{7}$
c) -36
d) $-\sqrt{5}$

Solución:

a) El inverso aditivo de 25 es -25, porque $25 + (-25) = 0$.
b) El inverso aditivo de $\sqrt{7}$ es $-\sqrt{7}$, porque $\sqrt{7} + (-\sqrt{7}) = 0$.
c) El inverso aditivo de -36 es 36, porque $-36 + 36 = 0$.
d) El inverso aditivo de $-\sqrt{5}$ es $\sqrt{5}$, porque $-\sqrt{5} + \sqrt{5} = 0$.

Ejemplo 3.11 Operaciones entre números reales.

Determine los inversos multiplicativos de los siguientes números:

a) 10
b) $\sqrt{3}$
c) -5
d) $-\frac{\sqrt{11}}{4}$

Solución:

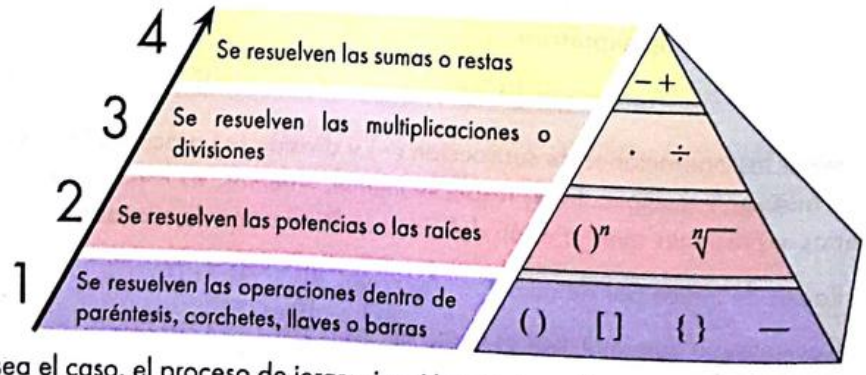
a) El inverso multiplicativo de 10 es $\frac{1}{10}$, porque $(10)\left(\frac{1}{10}\right) = 1$.

b) El inverso multiplicativo de $\sqrt{3}$ es $\frac{1}{\sqrt{3}}$, porque $(\sqrt{3})\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1$.

c) El inverso multiplicativo de -5 es $-\frac{1}{5}$, porque $(-5)\left(-\frac{1}{5}\right) = 1$.

d) El inverso multiplicativo de $-\frac{\sqrt{11}}{4}$ es $-\frac{4}{\sqrt{11}}$, porque $\left(-\frac{\sqrt{11}}{4}\right)\left(-\frac{4}{\sqrt{11}}\right) = 1$.

Para realizar operaciones numéricas, debe respetarse la jerarquía planteada a continuación, en cuanto a la prioridad para resolverlas.



Según sea el caso, el proceso de jerarquización puede aplicarse más de una vez.

Scanned by CamScanner

3.4 Operaciones entre Números Reales

Autoevaluación

1) Parafrasee las siguientes propiedades:

$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\ (a + b = b + a)$

$\exists!\ 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ (a + 0 = 0 + a = a)$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R}\ (a + b = b + a = 0)$

$\exists!\ 1 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ (a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$

$\forall\ (a \in \mathbb{R} \wedge \neg\ (a = 0))\ \exists\ b \in \mathbb{R}\ (a \cdot b = b \cdot a = 1)$

Scanned by CamScanner

2) Complete la siguiente tabla con el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de cada número propuesto.

	Número	Inverso aditivo	Inverso multiplicativo
a)	2		
b)	-5		
c)	$\frac{1}{5}$		
d)	-3.5		
e)	$\frac{12}{13}$		

3) Realice las operaciones indicadas en cada literal. Si se cumple la igualdad, coloque 1 al interior de los espacios en blanco, caso contrario escriba 0 y explique por qué no se cumple.

a) $\{1 + [3 + (8 \cdot 2)]\} = [(1 + 3) + (2 \cdot 8)]$

b) $3 \cdot [4 + (-5)] = \{3 \cdot 4 + (-5)\}$

c) $[2 \cdot 3] - 1 - \{3 - 2\} = 0$

d) $\{[1\,000 + (-1\,000 + 5)] \cdot (0.2)\} = 1$

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

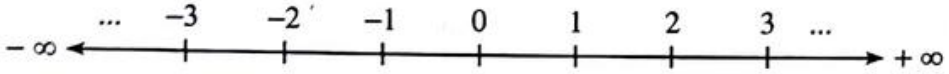
3.5 Relación de Orden

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar con sus propias palabras la relación de orden en los números reales.
- Interpretar la influencia de las operaciones de los números reales sobre las relaciones de orden.
- Comprender la tricotomía de los números reales.

3.5.1 Relación de Orden de Números Enteros



Observando la recta numérica se aprecia que los enteros están "ordenados", de tal modo que un número es mayor que otro mientras más a la derecha se encuentre de él.

Con el objeto de precisar este orden, se define una relación "mayor que" entre los elementos de $\mathbf{Z}$, que se simboliza por $>$.

Definición 3.2 (Orden en Z)

$$\forall a, b \in \mathbf{Z}\ (a > b) \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbf{Z}^+, (a = b + c)$$

Ejemplo 3.12 Orden en $\mathbf{Z}$.

$5 > 3 \Leftrightarrow 5 = 3 + 2$, siendo $2 \in \mathbf{Z}^+$

$-4 > -7 \Leftrightarrow -4 = -7 + 3$, siendo $3 \in \mathbf{Z}^+$

Otras relaciones que se deben considerar son: "menor que", cuyo símbolo es $<$; "menor o igual que", cuyo símbolo es $\leq$; "mayor o igual que", cuyo símbolo es $\geq$. Además, se puede observar que el conjunto $\mathbf{Z}$ cumple con las siguientes propiedades:

$\forall n \in \mathbf{Z}\ (n \leq n)$	Reflexiva
$\forall m, n, p \in \mathbf{Z}\ [(m \leq n) \wedge (n \leq p)] \Rightarrow (m \leq p)$	Transitiva
$\forall m, n \in \mathbf{Z}\ [(m \leq n) \wedge (n \leq m)] \Leftrightarrow (m = n)$	Antisimétrica

Cuadro 3.2: Propiedades de la Relación de Orden en $\mathbf{Z}$.

3.5.2 Relación de Orden de Números Reales

Se conoce que, en general $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$. Un problema interesante es cómo extender la relación de orden analizada previamente, al conjunto $\mathbf{R}$ formado por los números reales.

Scanned by CamScanner

A pesar de que la construcción rigurosa es un tanto complicada, en la práctica, a partir de la representación por medio de puntos en la recta numérica se puede observar que si el número b está situado a la derecha de a, se dice que $b > a$, o también que $a < b$.

Definición 3.3 (Tricotomía de los Números Reales)

Dados dos números reales, siempre es posible relacionar su orden, de tal manera que uno es mayor que el otro o son iguales.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}\,[(a > b) \veebar (a = b) \veebar (a < b)]$$

Además, se puede observar que el conjunto $\mathbb{R}$ cumple con las siguientes propiedades:

$\forall a \in \mathbb{R}\,(a \leq a)$	Reflexiva
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,[(a \leq b) \wedge (b \leq c)] \Rightarrow (a \leq c)$	Transitiva
$\forall a, b \in \mathbb{R}\,[(a \leq b) \wedge (b \leq a)] \Leftrightarrow (a = b)$	Antisimétrica

Cuadro 3.3: Propiedades de la Relación de Orden en $\mathbb{R}$.

Es importante analizar, a través de las siguientes propiedades, cómo influyen sobre la relación de orden las operaciones de la adición y la multiplicación de números reales.

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,(a \leq b) \Leftrightarrow [(a + c) \leq (b + c)]$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,[(a \leq b) \wedge (c > 0)] \Rightarrow (ac \leq bc)$
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,[(a \leq b) \wedge (c < 0)] \Rightarrow (ac \geq bc)$
4. $(ab = 0) \Leftrightarrow [(a = 0) \vee (b = 0)]$
5. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,[(ab = bc) \Leftrightarrow (a = c)], b \neq 0$
6. $\forall a, b \in \mathbb{R}\,(ab > 0) \Leftrightarrow [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$
7. $\forall a, b \in \mathbb{R}\,(ab < 0) \Leftrightarrow [(a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)]$
8. $\forall a \in \mathbb{R}\,(a^2 > 0) \Leftrightarrow (a \neq 0)$
9. $\forall a \in \mathbb{R}\,(a > 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} > 0\right)$
10. $\forall a \in \mathbb{R}\,(a < 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} < 0\right)$

Cabe mencionar que estas propiedades también se aplican a las otras relaciones de orden existentes ($<, >, \leq, \geq$).

Ejemplo 3.13 Relación de Orden.

Justificando su respuesta, califique cada proposición como verdadera o falsa:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-1} < \frac{40}{33}$

b) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,[(a \leq b) \wedge (c > 0)] \leftrightarrow (ac \leq bc)$

Scanned by CamScanner

Solución:

a) Nótese que:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3+2}{6}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{-1} = \frac{6}{5}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1} < \frac{40}{33} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{5} < \frac{40}{33} \quad \Rightarrow \quad 198 < 200$$

Puesto que $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1} < \frac{40}{33}$, la proposición es verdadera.

b) Al tratarse de una bicondicional, se debería cumplir la condicional en los dos sentidos. A continuación se proporciona un contraejemplo:

$$a = 1, b = 2, c = 0$$

Observe el valor de verdad de la condicional de proposiciones:

$$\underbrace{(ac \le bc)}_{1} \rightarrow [\underbrace{(a \le b)}_{1} \wedge \underbrace{(c > 0)}_{0}] \Leftrightarrow \underbrace{0}_{0}$$

∴ La proposición es falsa.

Ejemplo 3.14 Relación de Orden.

Justificando su respuesta, califique si la siguiente proposición es verdadera o falsa: "Entre dos números racionales siempre es posible tener otro número racional".

Solución:

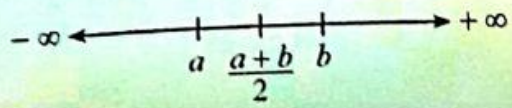
Sean los números racionales a y b, y suponiendo que $a < b$.

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + a < a + b \quad \Rightarrow \quad 2a < a + b$$
$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + b < b + b \quad \Rightarrow \quad a + b < 2b$$

Por ley de transitividad:

$$2a < a + b < 2b \quad \Rightarrow \quad a < \frac{a+b}{2} < b$$

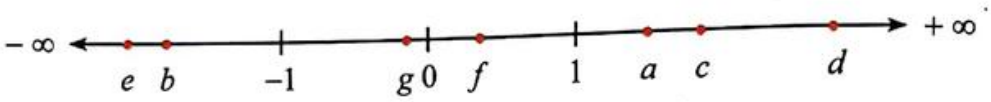
Entre los números racionales a y b existe el número $\frac{a+b}{2}$, el cual también es racional.



∴ La proposición es verdadera.

Scanned by CamScanner

1) Considere los números reales a, b, c, d, e, f, g ubicados en la recta numérica a ESCALA, como se muestra a continuación:



Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas colocando su valor de verdad en cada casilla. Puede valerse de una estimación de los valores de a, b, c, d, e, f y g para justificar su calificación.

a) $a > 0$

b) $b > 0$

c) $c > a$

d) $b > -1$

e) $ab < 0$

f) $\frac{1}{f} > f$

g) $f^2 > 0 \rightarrow f > 0$

h) $g^2 > 0 \rightarrow g > 0$

2) Suponga que usted tiene una amiga que es maratonista y le pide ayuda con un deber de investigación. Ella le pregunta acerca de la "Tricotomía de los Números Reales", y usted procede a explicarle con un ejemplo relacionado a su deporte. Escriba a continuación lo que usted le diría.

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

3) Dadas las siguientes proposiciones, demuéstrelas si son verdaderas o proporcione un contraejemplo si son falsas.

a) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \cdot y \geq 0) \leftrightarrow [(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)]$

b) $\forall a, b, x \in \mathbb{R} \quad [(x > b) \wedge (a > b)] \rightarrow (x > a)$

c) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x + y < 10) \leftrightarrow [(x < 5) \wedge (y < 5)]$

d) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \cdot y < 9) \rightarrow [(x < 9) \wedge (y < 9)]$

e) $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x > 0.\overline{15}) \rightarrow \left[\frac{1}{x} > 1\right]$

Scanned by CamScanner

3.6 Conceptos asociados a los Números Enteros

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dado un número entero, reconocer si es primo, compuesto, par o impar.
- Dado un conjunto de números enteros, determinar su Máximo Común Divisor y su Mínimo Común Múltiplo.

Definición 3.4 (Divisores y Múltiplos de un número entero)

Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cumplen la relación $c = a \cdot b$, entonces decimos que a y b son factores o divisores de c. En tal caso, c es múltiplo de a y b.

Ejemplo 3.15 Factores o Divisores y Múltiplos de un número.

-20 es múltiplo de 10 porque $-20 = (-2)(10)$.
2 es factor o divisor de -20 porque $-20 = (2)(-10)$.
5 y 7 son factores o divisores de 35, porque 35 es múltiplo de 5 y 7.

En muchas ocasiones, es necesario saber si un número entero divide a otro sin necesidad de efectuar la división. Para ello, se aplican las sencillas reglas o criterios de divisibilidad.

Un número entero es divisible por...

2: Si termina en cifra par.
3: Si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
4: Si sus dos últimas cifras son múltiplo de 4.
5: Si termina en 0 o en 5.
6: Si lo es por 2 y por 3 a la vez.
8: Si sus tres últimas cifras son múltiplo de 8.
9: Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
10: Si termina en 0.

Quizás le llame la atención que no se incluya la regla de divisibilidad por 7. Esto se debe a que su complejidad es poco práctica y resulta más fácil saber si el número es o no múltiplo de 7, realizando la división entre 7.

Se puede utilizar la notación $a \mid b$ para indicar que el número b es divisible por a. Por ejemplo $2 \mid 6$, $3 \mid 12$, $5 \mid 20$.

Definición 3.5 (Número Primo)

Un número entero positivo $p > 1$ es primo, si y sólo si sus únicos factores son exactamente 1 y p.

Notése que el número 1 no cumple con la definición 3.5.

El conjunto de los números primos es:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \ldots\}$$

Euclides fue el primero en demostrar que no existe un número primo mayor que todos los demás, es decir, la cantidad de números primos es infinita.

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

Muchos matemáticos han buscado, sin éxito, un método que sirva para determinar si un número es primo o no. En la actualidad, con la ayuda de las computadoras es factible tabular una gran cantidad de elementos de este conjunto P.

Definición 3.6 (Número Compuesto)

Un número entero positivo $n > 1$ es compuesto si y sólo si no es primo.

Teorema 3.1 (Teorema fundamental de la Aritmética)

Todo número compuesto se puede expresar de manera única como el producto de números primos.

En este punto podemos realizar una subclasificación del conjunto de números enteros positivos.

En el diagrama de Venn adjunto se muestra que el número 1 no es primo ni compuesto; y, que si el número entero positivo mayor que 1 no es primo, entonces es un número compuesto.

$Re = \{x/x \text{ es número entero positivo}\}$

Ejemplo 3.16 Números compuestos.

Descomponer los números 87, 105, 2 310 en sus factores primos.

Solución:

- Puesto que $8 + 7 = 15$ es múltiplo de 3, 87 también lo es. Efectuando la división por 3, el otro factor es 29, que es primo. Luego, $87 = (3)(29)$.
- Como 105 termina en 5, es divisible por 5. Efectuando la división por 5, el otro factor es 21, el cual se puede descomponer en sus factores 3 y 7. Luego, $105 = (3)(5)(7)$.
- Como 2 310 es un número más grande, lo iremos dividiendo sucesivamente entre todos los números primos menores que él, por los cuales sea divisible.

2310	2
1 155	3
385	5
77	7
11	11
1	

Luego, $2310 = (2)(3)(5)(7)(11)$.

Scanned by CamScanner

Definición 3.7 (Máximo Común Divisor (M.C.D.))

El M.C.D. de un conjunto de números enteros es el mayor entero positivo que es divisor de cada uno de los números del conjunto.

Ejemplo 3.17 Máximo Común Divisor.

* Considerando el ejemplo 3.16, el M.C.D. de los números 87, 105 y 2310 es 3.
* En el conjunto de los números 24, 36, 48:

$24 = (2^3)(3)$
$36 = (2^2)(3^2)$
$48 = (2^4)(3)$
M.C.D. : $(2^2)(3) = 12$

Una aplicación para el Máximo Común Divisor se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.18 Aplicación del Máximo Común Divisor.

Un vendedor dispone de 24, 36 y 48 unidades de tres artículos diferentes, respectivamente. Necesita elaborar paquetes por cada artículo, de tal forma que el número de unidades de todos los paquetes sea el mismo y el más grande posible.

El vendedor necesita calcular el número de unidades que debe tener cada paquete y cuántos paquetes por artículo obtendrá.

Solución:

Se necesita obtener un divisor de 24, 36 y 48 que sea el más grande posible. Del ejemplo anterior, este número es el 12.

Es decir, los paquetes deberán contener 12 unidades. Con lo cual, se obtienen 2, 3 y 4 paquetes para los diferentes artículos, respectivamente.

Definición 3.8 (Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.))

El m.c.m. de un conjunto de números enteros es el menor entero positivo que es el múltiplo de cada uno de los números dados.

Ejemplo 3.19 Mínimo Común Múltiplo.

* Considerando el ejemplo 3.16, el m.c.m. de los números 87, 105 y 2310 es 66 990.
* En el conjunto de los números 2, 6, 10:

$2 = 2$
$6 = (2)(3)$
$10 = (2)(5)$
m.c.m. : $(2)(3)(5) = 30$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.20 Aplicación del Mínimo Común Múltiplo.

Un fabricante tiene tres productos en su inventario, los cuales se revisan periódicamente cada 2, 6 y 10 semanas, respectivamente. El fabricante necesita calcular cuál será el mínimo tiempo que debe transcurrir en semanas para que la revisión de los tres productos coincida.

Solución:

Este es un problema del múltiplo más pequeño posible entre 2, 6 y 10. Del ejemplo anterior, este número es 30. Por lo tanto, cada 30 semanas los tres productos serán revisados al mismo tiempo.

Definición 3.9 (Números Pares e Impares)

Se dice que:

$$a \text{ es número Par} \Leftrightarrow a = 2n, n \in \mathbf{Z}$$
$$a \text{ es número Impar} \Leftrightarrow a = 2n+1, n \in \mathbf{Z}$$

Ejemplo 3.21 Números Pares e Impares.

12	es par porque	$12 = (2)(6)$
−5	es impar porque	$-5 = (2)(-3)+1$
0	es par porque	$0 = (2)(0)$
31	es impar porque	$31 = (2)(15)+1$
−140	es par porque	$-140 = (2)(-70)$
81	es impar porque	$81 = (2)(40)+1$

En los ejemplos 3.22 y 3.23 usaremos productos notables que se detallarán en la siguiente sección.

Ejemplo 3.22 Propiedades de Números Pares e Impares.

"Si a es un número natural impar, entonces su cubo también es natural impar".

Solución:

Vamos a utilizar el método de demostración directa.

Al ser a impar, podemos escribir $a = 2n - 1$, siendo n un número natural.

a es impar	$\Rightarrow a = 2n-1$	Definición de número impar
	$\Rightarrow a^3 = (2n-1)^3$	Cubo del binomio
	$\Rightarrow a^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1$	Manipulación algebraica
	$\Rightarrow a^3 = 2(4n^3 - 6n^2 + 3n) - 1$	Agrupación de términos
	$\Rightarrow a^3 = 2m - 1$	$m = 4n^3 - 6n^2 + 3n$ es un entero
	$\Rightarrow a^3$ es impar	Definición de número impar

Por lo que, efectivamente, a^3 es impar.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.23 Propiedades de Números Pares e Impares.

"Si a^2 es un número natural par, entonces a es natural par".

Solución:

Vamos a utilizar el método de demostración por contrarrecíproca.

La contrarrecíproca sería:

"Si a no es un número natural par, entonces a^2 no es natural par".

La cual se reescribe como:

"Si a es número natural impar, entonces a^2 es natural impar".

Al ser a natural impar, $a = 2n - 1$, siendo n un número natural, tenemos:

a es impar $\Rightarrow a = 2n-1$	Definición de número impar
$\Rightarrow a^2 = (2n-1)^2$	Cuadrado del binomio
$\Rightarrow a^2 = 4n^2 - 4n + 2 - 1$	Manipulación algebraica
$\Rightarrow a^2 = 2(2n^2 - 2n + 1) - 1$	Agrupación de términos
$\Rightarrow a^2 = 2m - 1$	$m = 2n^2 - 2n + 1$ es un entero
$\Rightarrow a^2$ es impar	Definición de número impar

Hemos demostrado que si a es un número impar, entonces a^2 es impar, cuya contrarrecíproca sería:

"Si a^2 no es un número natural impar, entonces a no es natural impar".

Es decir:

"Si a^2 es un número natural par, entonces a es natural par".

Lo cual verifica la demostración.

Ejemplo 3.24 Aplicación de números pares.

Demuestre por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Solución:

Supongamos que $\sqrt{2}$ no es un número irracional, es decir:

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$ siendo $q \neq 0$, con M.C.D.:1

$2 = \frac{p^2}{q^2}$	Elevando al cuadrado ambos miembros
$2q^2 = p^2$	Multiplicando ambos miembros por q^2
$p^2 = 2q^2, q^2 \in \mathbb{Z}$	Definición de número par
p^2 es par $\Rightarrow p$ es par	Propiedad de números pares
$p = 2k, k \in \mathbb{Z}$	Definición de número par
$q^2 = 2k^2$	Reemplazando en la segunda expresión
q^2 es par $\Rightarrow q$ es par	Propiedad de números pares

Ya que p y q son números pares entonces su M.C.D. no es 1, por lo tanto se llega a una contradicción, concluyendo que el supuesto de que $\sqrt{2}$ no es un número irracional no es válido, demostrándose así lo requerido.

Scanned by CamScanner

3.6 Conceptos asociados a los Números Enteros

Autoevaluación

1) Se presenta a continuación un grupo de números enteros. Clasifíquelos ubicando un visto en las casillas que corresponda.

	−3	−2	−1	1	2	4	5	7	11	12	100
Primo											
Compuesto											
Par											
Impar											

2) Considere el conjunto referencial Re = $\mathbb{Z}$ y los conjuntos A, B, C, D, E, F definidos de la siguiente manera:

$A = \{ x/x \text{ es múltiplo de } 2\}$ $B = \{ x/x \text{ es múltiplo de } 3\}$

$C = \{ x/x \text{ es múltiplo de } 6\}$ $D = \{ x/x \text{ es múltiplo de } 8\}$

$E = \{ x/x \text{ es múltiplo de } 12\}.$ $F = \{ x/x \text{ es múltiplo de } 5\}$

a) Justificando su respuesta, califique la siguiente proposición como verdadera o falsa:

$$(E \subseteq (C \cup F)) \wedge \neg (D \not\subseteq A) \wedge [(100\,001 \in F) \vee (A \cap B = C) \vee (E \not\subseteq B)]$$

Scanned by CamScanner

b) Realice un diagrama de Venn que represente a los conjuntos A, B, C y E.

3) Obtenga el Mínimo Común Múltiplo (m.c.m.) y el Máximo Común Divisor (M.C.D.) de los siguientes conjuntos de números.

a) A = {12, 15, 20}

b) B = {34, 17, 51}

c) C = {10, 100, 125}

4) Resuelva el siguiente problema de aplicación:

Tres jóvenes universitarios se encuentran de vacaciones. Uno de ellos visita la playa cada 6 días, otro, cada 9 días; y el tercero, cada 4 días. Si el 8 de febrero de 2016 habían coincidido en la playa, ¿cuál es la fecha más cercana en que volverán a coincidir los tres? Considere años bisiestos.

Scanned by CamScanner

3.7 Expresiones Algebraicas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una expresión algebraica, reconocer el coeficiente y el factor literal de cada uno de sus términos.
- Aplicar propiedades de las fracciones en la simplificación de expresiones algebraicas.
- Aplicar propiedades de los exponentes en la simplificación de expresiones algebraicas.
- Aplicar productos notables y descomposición en factores para la simplificación de expresiones algebraicas.
- Racionalizar expresiones algebraicas.

El álgebra elemental es la parte de la matemática que trata del cálculo con símbolos literales y con operaciones abstractas que generalizan las cuatro operaciones fundamentales.

El álgebra usa símbolos, en particular las letras del abecedario en español, con éstos, se efectúan las mismas operaciones que en Aritmética, es decir: $+, -, \cdot, \div$.

Definición 3.10 (Expresión algebraica)

Es la combinación de símbolos (números y letras), a través de las diferentes operaciones fundamentales. Los términos de la expresión algebraica corresponden a cada una de sus partes, las cuales están separadas entre sí por los signos + o −.

Ejemplo 3.25 Expresiones algebraicas.

$$15a^2b^3c^5 \qquad u^2v - uv^2$$
$$100m^7n^3p + 2m^6n^4p \qquad kpr - 3k^2p^3r^4 + 10k^5p^4r^3$$
$$-3x^2y^4z^3 \qquad 2cdf + 5c^5d^5f^5$$

En todo término se distingue el **coeficiente numérico** y el **factor literal**. En el término $-5x^2y^3z^4$, -5 es el coeficiente numérico, $x^2y^3z^4$ es el factor literal. En el factor literal, los números que se colocan en la parte superior derecha de las letras se denominan **exponentes** e indican el número de veces que se toman dichas letras como factores.

Si la expresión algebraica tiene un solo término se denomina **monomio**, si tiene dos términos se denomina **binomio**, si tiene tres términos se denomina **trinomio**. Si la expresión algebraica tiene en general más de un término, se denomina **polinomio**.

Se denominan **términos semejantes** a aquellos que tienen el mismo factor literal. Al reducir términos semejantes buscamos reemplazar a todos ellos por uno solo.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.26 Reducción de términos semejantes.

Los términos $5x^2y$, $-3x^2y$, $10x^2y$ y $6x^2y$ son semejantes. Una expresión algebraica que resulta al considerar todos los términos es $5x^2y - 3x^2y + 10x^2y + 6x^2y$. Al reducirla, el resultado es $18x^2y$.

Cuando se trabaja con expresiones algebraicas, es importante considerar que las letras representan números reales, por lo tanto deben ser tratadas como tales y pueden ser reemplazadas por números reales u otras expresiones algebraicas. Para efectos de la manipulación algebraica en este capítulo, se considerará que todas las expresiones estarán definidas en $\mathbb{R}$.

3.7.1 Propiedades de las fracciones

Anteriormente se definió que una fracción de la forma $\frac{a}{b}$ es un número racional, en el cual a es el numerador y b es el denominador de la fracción. Tanto a como b pertenecen al conjunto de los números enteros, con la restricción de que b no puede ser cero. Para manipular fracciones es necesario considerar las siguientes propiedades:

Sean: $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, f \neq 0$

1. $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (ad = bc)$
2. $\left(\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}\right)$
3. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}\right)$
4. $\left(\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\right)$
5. $\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}\right)$
6. $\left[\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \wedge \left(\frac{c}{d} = \frac{e}{f}\right)\right] \Rightarrow \left(\frac{a}{b} = \frac{e}{f}\right)$
7. $\left[\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right) \wedge (a \neq b)\right] \Rightarrow \left(\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}\right)$
8. $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}\right) \Rightarrow \left(\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}\right)$

Ejemplo 3.27 Operaciones con fracciones.

Calcule el valor numérico de: $\dfrac{1}{\dfrac{2}{2+\frac{3}{4}}+1}$

Solución:

$$\frac{1}{\frac{2}{2+\frac{3}{4}}+1} = \frac{1}{\frac{2}{\frac{8+3}{4}}+1} = \frac{1}{\frac{2}{\frac{11}{4}}+1} = \frac{1}{\frac{8}{11}+1} = \frac{1}{\frac{8+11}{11}} = \frac{1}{\frac{19}{11}} = \frac{11}{19}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.28 Operaciones con fracciones.

Calcule el valor numérico de: $\dfrac{1}{2-\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{6-0.875}}}$

Solución:

$$=\frac{1}{2-\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{6-\dfrac{875}{1000}}}} = \frac{1}{2-\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{6-\dfrac{7}{8}}}} = \frac{1}{2-\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{\dfrac{48-7}{8}}}} = \frac{1}{2-\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{\dfrac{41}{8}}}}$$

$$= \frac{1}{2-\dfrac{3}{4+\dfrac{40}{41}}} = \frac{1}{2-\dfrac{3}{\dfrac{164+40}{41}}} = \frac{1}{2-\dfrac{3}{\dfrac{204}{41}}} = \frac{1}{2-\dfrac{3(41)}{204}}$$

$$= \frac{1}{2-\dfrac{41}{68}} = \frac{1}{\dfrac{136-41}{68}} = \frac{1}{\dfrac{95}{68}} = \frac{68}{95}$$

Ejemplo 3.29 Operaciones con fracciones.

Calcule el valor numérico de: $\dfrac{0.\overline{75}\left(\frac{3}{5}\right)}{165}(11)$

Solución:

Nótese que:

$$0.\overline{75}=\frac{75}{99}=\frac{25}{33}=\frac{(5)(5)}{(3)(11)}$$

$$165=(11)(15)=(3)(5)(11)$$

Entonces:

$$\frac{0.\overline{75}\left(\frac{3}{5}\right)}{165}(11)=\frac{\left[\frac{(5)(5)}{(3)(11)}\right]\left(\frac{3}{5}\right)}{(3)(5)(11)}(11)=\frac{1}{(3)(11)}=\frac{1}{33}$$

Ejemplo 3.30 Operaciones con fracciones.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{x-y}}{\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{x+y}}$

Scanned by CamScanner

Solución:

$$\frac{\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x-y}}{\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}} = \frac{\frac{x(x-y)-y(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\frac{x(x+y)+y(x-y)}{(x-y)(x+y)}} = \frac{x^2-xy-xy-y^2}{x^2+xy+xy-y^2}$$

$$= \frac{x^2-2xy-y^2}{x^2+2xy-y^2}$$

Ejemplo 3.31 Operaciones con fracciones.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}}{1+\frac{1}{xy}} + \dfrac{y+1}{y+\frac{1}{x}} - 1$

Solución:

$$\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}}{1+\frac{1}{xy}} + \frac{y+1}{y+\frac{1}{x}} - 1 = \frac{\frac{x+1}{xy}}{\frac{xy+1}{xy}} + \frac{y+1}{\frac{xy+1}{x}} - 1 = \frac{x+1}{xy+1} + \frac{xy+x}{xy+1} - 1$$

$$= \frac{x+1+xy+x-xy-1}{xy+1} = \frac{2x}{xy+1}$$

3.7.2 Propiedades de los exponentes

Una potencia es una forma abreviada de escribir una multiplicación en que se repite un mismo factor un cierto número de veces.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

a^n: es la potencia
a: es la base
n: es el exponente

Si el exponente es fraccionario tenemos una expresión algebraica con radicales; por ejemplo $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$. En general, $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$.

Para simplificar expresiones que poseen exponentes, se deben respetar las siguientes leyes:

Sean $a \neq 0$, $b \neq 0$:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$
4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
5. $(a^n)^m = a^{nm}$
6. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$
7. $a^0 = 1$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.32 Operaciones con exponentes.

Simplificar la expresión algebraica: $\left[\sqrt[n+3]{\left(\sqrt[n-1]{x^2}\right)\left(\sqrt[n+1]{x^{-1}}\right)}\right]^{n^2-1}$

Solución:

$$\left[\sqrt[n+3]{\left(\sqrt[n-1]{x^2}\right)\left(\sqrt[n+1]{x^{-1}}\right)}\right]^{n^2-1} = \left[\sqrt[n+3]{\left(x^{\frac{2}{n-1}}\right)\left(x^{\frac{-1}{n+1}}\right)}\right]^{n^2-1}$$

$$= \left(x^{\frac{2(n+1)-(n-1)}{n^2-1}}\right)^{\frac{n^2-1}{n+3}}$$

$$= x^{\frac{2n+2-n+1}{n+3}} = x^{\frac{n+3}{n+3}} = x$$

Ejemplo 3.33 Operaciones con exponentes.

Simplificar la expresión algebraica: $\left(\dfrac{\sqrt{y^5}\left(\sqrt{z}\right)^3}{\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^5}\,y^2z^{-2}}}\right)^{-2}$

Solución:

$$\left(\frac{y^{\frac{5}{2}}z^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}}z^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-2} = \left(\frac{y^{\frac{5}{2}-\frac{2}{3}}z^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}}\right)^{-2} = \left(\frac{y^{\frac{11}{6}}z^{\frac{13}{6}}}{x^{\frac{9}{6}}}\right)^{-2} = \left(\frac{x^{\frac{9}{6}}}{y^{\frac{11}{6}}z^{\frac{13}{6}}}\right)^{2} = \frac{x^3}{y^{\frac{11}{3}}z^{\frac{13}{3}}}$$

Ejemplo 3.34 Operaciones con exponentes.

Simplificar la expresión algebraica: $\dfrac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}\,y^3z^{-3}}}{\sqrt{y}\left(\sqrt{z}\right)^3}$

Solución:

$$\frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}\,y^3z^{-3}}}{\sqrt{y}\left(\sqrt{z}\right)^3} = \frac{\left(x\,x^{\frac{1}{2}}y^3z^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^3} = \frac{\left(x^{1+\frac{1}{2}}y^3z^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left(x^{\frac{3}{2}}y^3z^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}yz^{-1}}{y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}}}$$

$$= x^{\frac{1}{2}}y^{1-\frac{1}{2}}z^{-1-\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{5}{2}} = \left(xyz^{-5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{xy}{z^5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3.7.3 Productos notables

Los productos notables son multiplicaciones cuyo resultado puede escribirse directamente, sin hacer paso a paso la multiplicación. Son como las tablas de multiplicar del álgebra elemental.

Scanned by CamScanner

Los principales productos notables son:

- Multiplicación de un monomio por un binomio

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$x(y-z) = xy - xz$$

- Cuadrado de la suma de dos monomios

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

- Cuadrado de la diferencia de dos monomios

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

- Cuadrado de un trinomio

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

- Cuadrado de un polinomio de cuatro términos

$$(w+x+y+z)^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2wx + 2wy + 2wz + 2xy + 2xz + 2yz$$

- Producto de la suma por la diferencia de dos monomios

$$(x-y)(x-y) = x^2 - y^2$$

- Producto de dos binomios con un término común

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

- Cubo de la suma de dos monomios

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

- Cubo de la diferencia de dos monomios

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

- Cubo de un trinomio

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz$$

- Productos que desembocan en la suma o diferencia de cubos perfectos

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

- Cociente de la diferencia de cuadrados perfectos entre la suma o diferencia de sus raíces cuadradas

$$\frac{x^2-y^2}{x+y} = x-y$$

$$\frac{x^2-y^2}{x-y} = x+y$$

Scanned by CamScanner

● ● Cociente de la diferencia de potencias pares entre la suma o diferencia de sus raíces ● ●

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - x^2y^{n-3} + xy^{n-2} - y^{n-1}$$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

● ● Cociente de la suma o diferencia de cubos perfectos entre la suma o diferencia de sus raíces cúbicas ● ●

$$\frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2$$

$$\frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2$$

● ● Cociente de la suma o diferencia de potencias impares entre la suma o diferencia de sus raíces ● ●

$$\frac{x^m + y^m}{x + y} = x^{m-1} - x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 - \ldots + x^2y^{m-3} - xy^{m-2} + y^{m-1}$$

$$\frac{x^m - y^m}{x - y} = x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \ldots + x^2y^{m-3} + xy^{m-2} + y^{m-1}$$

Los productos notables pueden facilitar cálculos aritméticos, como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.35 Aplicación de productos notables.

Determine el valor de:

a) 41^2
b) 98^2
c) $(18)(22)$

Solución:

a) $41^2 = (40 + 1)^2 = (40)^2 + (2)(40)(1) + (1)^2 = 1\,600 + 80 + 1$
$= 1\,681$

b) $98^2 = (100 - 2)^2 = (100)^2 - (2)(100)(2) + (2)^2 = 10\,000 - 400 + 4$
$= 9\,604$

c) $(18)(22) = (20 - 2)(20 + 2) = (20)^2 - (2)^2 = 400 - 4$
$= 396$

Scanned by CamScanner

3.7.4 Descomposición en factores

Esta sección es muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, por cuanto en cálculos y operaciones algebraicas siempre está presente.

Aunque nos anticipamos a un estudio detallado de polinomios que se desarrollará en el siguiente capítulo, tratar este tema ahora se vuelve necesario para la mejor comprensión de los próximos conceptos.

Tradicionalmente, a esta sección se la conoce como **factorización** y en algunas ocasiones inclusive, se numeran y clasifican casos para la ejecución de la misma, quizás de manera innecesaria.

Sin embargo, todos los "casos" no son más que la descomposición de un polinomio, o de manera más general, de una expresión, en factores. Factorizar la expresión E se reduce a obtener las nuevas expresiones F_1 y F_2 tales que:

$$E = F_1 \cdot F_2$$

En una analogía con la descomposición de un número compuesto en sus factores primos, puede observarse que: tomando $E = 48$, y $F_1 = 3$, se tiene que $\frac{48}{3} = 16$, entonces $E = (16)(3)$. Si se realizan descomposiciones sucesivas se llega a que $E = 2^4 \cdot 3$.

Para factorizar una expresión E entonces, basta conseguir alguna expresión F_1 tal que la división $\frac{E}{F_1}$ sea exacta (tenga residuo 0). Luego, asignándose como cociente a F_2, se tiene que:

$$\frac{E}{F_1} = F_2 \quad \rightarrow \quad E = F_1 \cdot F_2$$

De esta manera, puede observarse por ejemplo, que la división del polinomio $x^2 + 2x - 3$ para $x + 3$, cuya base conceptual se estudiará en el capítulo 4 de este libro, es exacta:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - 3 & x + 3 \\ \hline -x^2 - 3x & x - 1 \\ \hline -x - 3 & \\ x + 3 & \\ \hline (0) & \end{array}$$

Por tanto, $\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} = x - 1$. Luego, $x^2 + 2x - 3$ puede expresarse como: $(x + 3)(x - 1)$.

Como otro ejemplo aplicativo, se puede considerar que el número $E = 4$ también puede expresarse como $E = (2\sqrt{2})(\sqrt{2})$; en analogía, existen infinitas formas de factorizar una expresión, lo único que se debe asegurar es que la división sea exacta.

Scanned by CamScanner

Así, se puede eventualmente factorizar $x-1$. Observe lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} x-1 & \sqrt{x}+1 \\ (0) & \sqrt{x}-1 \end{array}$$

Comprobándose que $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$, por tanto esta expresión puede factorizarse como:

$$x-1=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$$

Note además que la expresión anterior $x-1$ también puede ser dividida para el binomio $\sqrt[3]{x}-1$, tal como se presenta a continuación:

$$\begin{array}{r|l} x-1 & \sqrt[3]{x}-1 \\ (0) & (\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1 \end{array}$$

Verificándose que $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1$, por tanto esta expresión puede factorizarse como:

$$x-1=(\sqrt[3]{x}-1)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)$$

Con lo cual puede concluirse que la misma expresión admite al menos dos formas diferentes de descomposición factorial:

Descomposición en dos factores (ambos binomios)	Descomposición en dos factores (un binomio y un trinomio)
$x-1=(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$	$x-1=(\sqrt[3]{x}-1)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)$

Se sugiere al lector que para la expresión dada se propongan nuevas descomposiciones en factores que tengan diferentes características.

Resulta claro que, todas las expresiones correspondientes a los productos notables pueden ser usadas como expresiones de factorización si las leemos de derecha a izquierda.

Scanned by CamScanner

A continuación se detallan algunas expresiones que generalmente se utilizan para realizar descomposiciones de expresiones, que en su momento, el lector tendrá la posibilidad de demostrar y generalizar.

Factorización de binomios

Diferencia de cuadrados perfectos

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Suma o diferencia de cubos perfectos

$$x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

Diferencia de potencias pares iguales

$$x^n - y^n = (x - y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$$

Suma o diferencia de potencias impares iguales

$$x^m + y^m = (x + y)\left(x^{m-1} - x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 - \ldots - x^2y^{m-3} + xy^{m-2} - y^{m-1}\right)$$

$$x^m - y^m = (x - y)\left(x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \ldots + x^2y^{m-3} + xy^{m-2} + y^{m-1}\right)$$

Factorización de trinomios

Trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Trinomio de la forma: $x^2 + (a + b)\,x + ab$

$$x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)(x + b)$$

Factorización de polinomios

Factor común

$$xy + xz = x\,(y + z)$$

$$xy - xz = x\,(y - z)$$

Factor común por agrupación de términos

Los términos de un polinomio se pueden agrupar de manera tal, que cada dos de ellos tengan un factor común.

Un posible ejemplo es:

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by)$$

$$= x\,(a + b) + y\,(a + b)$$

$$ax + bx + ay + by = (x + y)\,(a + b)$$

Cubo perfecto de binomios

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$$

$$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.36 Factorización.

A continuación se ilustra la operatividad de los casos de factorización:

1) $16a^2 - 49b^4 = (4a + 7b^2)(4a - 7b^2)$

2) $p + q = (\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q})[(\sqrt[3]{p})^2 - \sqrt[3]{pq} + (\sqrt[3]{q})^2]$

3) $w^6 - 216z^3 = (w^2 - 6z)(w^4 + 6w^2z + 36z^2)$

4) $x^5 + 32 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$

5) $m^7 - 1 = (m - 1)(m^6 + m^5 + m^4 + m^3 + m^2 + m + 1)$

6) $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a - 3b)^2$

7) $$\begin{aligned} 36(m+n)^2 - 121(m-n)^2 &= [6(m+n) + 11(m-n)][6(m+n) - 11(m-n)] \\ &= (6m + 6n + 11m - 11n)(6m + 6n - 11m + 11n) \\ &= (17m - 5n)(17n - 5m) \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} 49m^4 - 151m^2n^4 + 81n^8 &= 49m^4 - 151m^2n^4 + 81n^8 + 25m^2n^4 - 25m^2n^4 \\ &= (49m^4 - 126m^2n^4 + 81n^8) - 25m^2n^4 \\ &= (7m^2 - 9n^4)^2 - 25m^2n^4 \\ &= (7m^2 - 9n^4 + 5mn^2)(7m^2 - 9n^4 - 5mn^2) \\ &= (7m^2 + 5mn^2 - 9n^4)(7m^2 - 5mn^2 - 9n^4) \end{aligned}$$

9) $a^2 - 66a + 1080 = (a - 30)(a - 36)$

10) $$\begin{aligned} 18x^2 - 13x - 5 &= \frac{(18x - 18)(18x + 5)}{18} \\ &= (x - 1)(18x + 5) \end{aligned}$$

11) $x^9 - 18x^6y^5 + 108x^3y^{10} - 216y^{15} = (x^3 - 6y^5)^3$

12) $$\begin{aligned} x^2 - ax - bx + ab &= (x^2 - ax) - (bx - ab) \\ &= x(x - a) - b(x - a) \\ &= (x - a)(x - b) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.37 Descomposición en factores.

Descomponga en cuatro factores la expresión:

$$a^2b^2(b - a) + b^2c^2(c - b) + a^2c^2(a - c)$$

Scanned by CamScanner

Solución:

$$\begin{aligned}
a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c) &= a^2b^3-a^3b^2+b^2c^3-b^3c^2+a^3c^2-a^2c^3\\
&= (a^2b^3-a^2c^3)-(b^3c^2-b^2c^3)-(a^3b^2-a^3c^2)\\
&= a^2(b^3-c^3)-b^2c^2(b-c)-a^3(b^2-c^2)\\
&= a^2(b-c)(b^2+bc+c^2)-b^2c^2(b-c)-a^3(b-c)(b+c)\\
&= (b-c)[a^2b^2+a^2bc+a^2c^2-b^2c^2-a^3b-a^3c]\\
&= (b-c)[(a^2b^2-a^3b)+a^2c(b-a)-c^2(b^2-a^2)]\\
&= (b-c)[a^2b(b-a)+a^2c(b-a)-c^2(b+a)(b-a)]\\
&= (b-c)(b-a)[a^2b+a^2c-c^2(b+a)]\\
&= (b-c)(b-a)[a^2b+a^2c-bc^2-ac^2)]\\
&= (b-c)(b-a)[a^2b-bc^2+a^2c-ac^2)]\\
&= (b-c)(b-a)[b(a^2-c^2)+ac(a-c)]\\
&= (b-c)(b-a)[b(a+c)(a-c)+ac(a-c)]
\end{aligned}$$

$$a^2b^2(b-a)+b^2c^2(c-b)+a^2c^2(a-c) = (b-c)(b-a)(a-c)(ab+bc+ac)$$

Ejemplo 3.38 Productos notables y factorización.

Simplifique la expresión algebraica: $\dfrac{m^2-1}{m^2+m-2}$

Solución:

$$\frac{m^2-1}{m^2+m-2} = \frac{(m+1)(m-1)}{(m+2)(m-1)} = \frac{m+1}{m+2}$$

Ejemplo 3.39 Productos notables y factorización.

Simplifique la expresión algebraica: $\dfrac{6xy-3x^2}{3x^2-13xy+14y^2}$

Solución:

$$\frac{6xy-3x^2}{3x^2-13xy+14y^2} = \frac{3x(2y-x)}{(3x-7y)(x-2y)} = \frac{-3x(x-2y)}{(3x-7y)(x-2y)} = \frac{-3x}{3x-7y}$$

Ejemplo 3.40 Productos notables y factorización.

Simplifique la expresión algebraica: $\dfrac{6m^3-3m^2n}{21mn+7n^2} + \dfrac{6m^2+24mn}{6mn+2n^2}$

Solución:

$$\frac{6m^3-3m^2n}{21mn+7n^2} + \frac{6m^2+24mn}{6mn+2n^2} = \left[\frac{6m^3-3m^2n}{21mn+7n^2}\right]\left[\frac{6mn+2n^2}{6m^2+24mn}\right]$$

$$= \left[\frac{3m^2(2m-n)}{7n(3m+n)}\right]\left[\frac{2n(3m+n)}{6m(m+4n)}\right] = \frac{m(2m-n)}{7(m+4n)}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.41 Productos notables y factorización.

Simplifique la expresión algebraica: $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}}$

Solución:

$$\frac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}} = \frac{\dfrac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}}{\dfrac{1-x-(1+x)}{(1-x)(1+x)}} = \frac{1+2x+x^2-(1-2x+x^2)}{-x-x}$$

$$= \frac{1+2x+x^2-1+2x-x^2}{-2x} = \frac{4x}{-2x} = -2$$

Ejemplo 3.42 Productos notables y factorización.

Simplifique la expresión algebraica:

$$\left(\frac{1}{a^2+3a+2}+\frac{1}{a^2+5a+6}-\frac{1}{a^2+4a+3}\right)\div\left(\frac{1}{a+3}\right)$$

Solución:

$$= \left[\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}-\frac{1}{(a+1)(a+3)}\right]\cdot(a+3)$$

$$= \frac{(a+3)+(a+1)-(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)}\cdot(a+3) = \frac{a+3+a+1-a-2}{(a+1)(a+2)} = \frac{a+2}{(a+1)(a+2)} = \frac{1}{a+1}$$

Ejemplo 3.43 Productos notables y factorización.

Simplifique la expresión algebraica:

$$\frac{xy}{x^2y^2+4xy+3}+\frac{1}{x^2y^2+5xy+6}+\frac{1}{x^2y^2+3xy+2}$$

Solución:

$$= \frac{xy}{(xy+1)(xy+3)}+\frac{1}{(xy+2)(xy+3)}+\frac{1}{(xy+1)(xy+2)}$$

$$= \frac{xy(xy+2)+(xy+1)+(xy+3)}{(xy+1)(xy+2)(xy+3)} = \frac{(xy)^2+2xy+2xy+4}{(xy+1)(xy+2)(xy+3)}$$

$$= \frac{(xy+2)^2}{(xy+1)(xy+2)(xy+3)} = \frac{xy+2}{(xy+1)(xy+3)}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.44 Productos notables y factorización.

Simplifique la expresión algebraica: $\dfrac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{x-\dfrac{x-2}{x+1}}}$

Solución:

$$=\frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{\dfrac{x(x+1)-x+2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{\dfrac{x^2+x-x+2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-\dfrac{x^2+2}{\dfrac{x^2+2}{x+1}}}$$

$$=\frac{x-1}{x+2-(x+1)}=\frac{x-1}{x+2-x-1}=x-1$$

Ejemplo 3.45 Productos notables y factorización.

Simplifique la siguiente expresión algebraica:

$$\left(\frac{2x^2-5x-3}{x^2-9}\right)\left[\left(\frac{x^2+6x+9}{1+2x}\right)\div\left(\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}\right)\right]$$

Solución:

$$=\left[\frac{(x-3)(2x+1)}{(x+3)(x-3)}\right]\cdot\left[\frac{(x+3)^2}{1+2x}\right]\div\left[\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+3)}\right]=(x+3)\cdot\frac{(x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{(x+1)(x+3)}{x-3}$$

Ejemplo 3.46 Productos notables y factorización.

Simplifique la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}$$

Solución:

$$=\frac{(a+2)(a+3)(a+4)+a(a+3)(a+4)+a(a+1)(a+4)+a(a+1)(a+2)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a+4)\left[(a+2)+a\right]+a(a+1)\left[(a+4)+(a+2)\right]}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{2(a+1)(a+3)(a+4)+2a(a+1)(a+3)}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}$$

$$= \frac{2(a+1)(a+3)[(a+4)+a]}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)} = \frac{2(2a+4)}{a(a+2)(a+4)} = \frac{2(2)(a+2)}{a(a+2)(a+4)} = \frac{4}{a(a+4)}$$

Ejemplo 3.47 Productos notables y factorización.

Simplifique la siguiente expresión algebraica:

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$$

Solución:

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{(a-b)^2}$$

$$= \left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}\right)\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{(a-b)^2} = \left[a\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)-b\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\right]\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{(a-b)^2}$$

$$= \left[(a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\right]\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{(a-b)^2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{(a-b)} = \frac{a-b}{a-b} = 1$$

3.7.5 Racionalización

Racionalizar el denominador de una fracción es convertir una fracción cuyo denominador es irracional en una fracción equivalente, cuyo denominador sea racional. Cuando se racionaliza el denominador irracional de una fracción, desaparece todo signo radical del mismo.

Ejemplo 3.48 Racionalización.

Racionalice la siguiente expresión: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Solución:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.49 Racionalización.

Racionalice la siguiente expresión: $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{7-3}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$$

Ejemplo 3.50 Racionalización.

Racionalice la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{7}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}}=\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}}\cdot\frac{\sqrt{14}-\sqrt{21}}{\sqrt{14}-\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{21}}{14-21}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{21}}{-7}=\frac{\sqrt{21}-\sqrt{14}}{7}$$

Ejemplo 3.51 Racionalización.

Racionalice la siguiente expresión:

$$\frac{2a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$$

Solución:

$$\frac{2a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{2a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{2a\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$$

Ejemplo 3.52 Racionalización.

Racionalice la siguiente expresión:

$$\frac{x^9(1-x)}{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^5}}$$

Solución:

$$\frac{x^9-x^{10}}{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^5}}\cdot\frac{\sqrt{x^6}-\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^{10}}}{\sqrt{x^6}-\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^{10}}}=\frac{\left(x^9-x^{10}\right)\left(\sqrt{x^6}-\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^{10}}\right)}{\sqrt{x^9}+x^5}$$

Scanned by CamScanner

$$=\frac{(x^9-x^{10})\left(\sqrt{x^6}-\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^{10}}\right)}{\sqrt{x^9}+x^5}\cdot\frac{\sqrt{x^9}-x^5}{\sqrt{x^9}-x^5}$$

$$=\frac{(x^9-x^{10})\left(\sqrt{x^6}-\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^{10}}\right)\left(\sqrt{x^9}-x^5\right)}{x^9-x^{10}}$$

$$=\left(\sqrt{x^6}-\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^{10}}\right)\left(\sqrt{x^9}-x^5\right)$$

Ejemplo 3.53 Racionalización.

Simplifique la expresión algebraica, si $a\in(0,1)$

$$\left(\sqrt{a^{-2}-1}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}+\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)$$

Solución:

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1-a}{\sqrt{(1+a)(1-a)}-(1-a)}+\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{\left(\sqrt{1-a}\right)^2}{\sqrt{1+a}\sqrt{1-a}-\left(\sqrt{1-a}\right)^2}+\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\cdot\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)\left(\frac{1+\cancel{a}+2\sqrt{1+a}\sqrt{1-a}+1-\cancel{a}}{\cancel{1}+a-\cancel{1}+a}\right)=\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)\left(\frac{2+2\sqrt{1-a^2}}{2a}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)=\left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{1-a^2}+1}{a}\right)=\frac{\cancel{1}-a^2-\cancel{1}}{a^2}=-1$$

Scanned by CamScanner

1) A continuación, se presentan ciertos ERRORES MATEMÁTICOS comunes. Analice las expresiones y proponga un contraejemplo para cada caso.

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 3x^2 + 5x = 8x^3$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2$

c) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2 - 16} = a - 4$

d) $\forall (a, b, c, d \in \mathbb{R}^+) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

e) $\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge a > 0 \quad \frac{a+b}{a} = b$

f) $\forall a, b \in \mathbb{R}^- \quad \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Scanned by CamScanner

2) Un estudiante de Cálculo de Variable Real está realizando su tarea sobre derivación. Continúe con el proceso de simplificación en la parte derecha de cada igualdad, hasta obtener una expresión más sencilla.

a) $\frac{d}{dx}[g(x)]=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+5}\right)$

b) $\frac{d}{dx}[f(x)]=\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

3) Simplifique la siguiente expresión:

$$F=\left[\frac{1}{\sqrt{343}}\left(\sqrt[5]{(7)^{3.\overline{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{(x-2)^2}{x^2+x-6}+\frac{5x^2}{x^3+3x^2}\right)\right]^3$$

Scanned by CamScanner

3.8 Razones y Proporciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Calcular la razón entre dos cantidades diferentes de cero.
- Calcular la proporción entre dos cantidades diferentes de cero.
- Analizar la relación entre dos magnitudes por medio de una regla de tres simple directa o inversa.
- Analizar la relación entre más de dos magnitudes por medio de una regla de tres compuesta.

3.8.1 Razones

Cuando se desea relacionar dos cantidades, se lo puede hacer con las operaciones de resta o división. El primer tipo de comparación para determinar el mayor a partir de la diferencia entre dos números se refiere a una relación aditiva; y, el segundo tipo para determinar la cantidad de veces que el mayor contiene al menor o viceversa, se refiere a una relación multiplicativa.

Definición 3.11 (Razones)

Una razón es una relación multiplicativa entre dos cantidades, p y q, diferentes de cero. Simbólicamente se la puede representar así:

$$\frac{p}{q},\quad p:q,\quad p \text{ es a } q$$

Por ejemplo, si en un aula se tienen 12 varones y 16 mujeres, se dirá que la razón entre el número de hombres y el de mujeres es de $\frac{3}{4}$, 3:4 o que 3 es a 4, lo cual se obtiene generando una fracción irreducible entre las cantidades especificadas, concluyéndose que por cada 3 hombres hay 4 mujeres.

Ejemplo 3.54 Razones.

Si en el mes de junio ya han transcurrido 10 días, determine la razón entre los días transcurridos y los que aún faltan para culminar ese mes.

Solución:

Recordando que el mes de junio tiene 30 días, la cantidad de días que faltan para que termine el mes es 20. Por lo tanto, la razón solicitada es:

$$\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$$

3.8.2 Proporciones

Cuando se indicó anteriormente sobre la razón entre el número de varones y mujeres en el aula, se pudo haber indicado $\frac{3}{4}$ o $\frac{24}{32}$ o $\frac{60}{80}$. Puesto que estas razones son iguales, es necesario definir el concepto de proporción.

Scanned by CamScanner

Definición 3.12 (Proporciones)

Se denomina proporción al conjunto de dos razones iguales. Si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son dos razones iguales, la proporción entre las cuatro cantidades diferentes de cero es:

$$\frac{p}{q}=\frac{r}{s};\quad p:q::r:s;\quad p \text{ es a } q, \text{ como } r \text{ es a } s$$

Nótese que en toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$ps = qr$$

Ejemplo 3.55 Proporciones.

Si la cantidad de abonados de una operadora telefónica y la cantidad de abonados de su competencia están en razón de 3 a 2, determine la cantidad de abonados de la primera operadora conociendo que la segunda tiene 1 500 000 abonados.

Solución:

Basta plantear la proporción: $\frac{3}{2}=\frac{n}{1\,500\,000}$

Utilizando las propiedades de las fracciones, se despeja:

$$n=\frac{(3)(1\,500\,000)}{2}=2\,250\,000$$

La primera operadora telefónica tiene 2 250 000 abonados.

Varias aplicaciones de las proporciones incluyen casos como la distribución de utilidades entre dos socios, la elaboración a escala de una casa con las medidas reales y las de una maqueta, o la cantidad de días que necesitan cierto número de obreros para construir un puente, por citar algunos ejemplos.

3.8.3 Proporcionalidad directa entre dos cantidades

Existen situaciones de la vida cotidiana en las que se presenta una proporcionalidad directa entre dos cantidades, si al multiplicar o dividir una de ellas por cierto valor, la otra queda también multiplicada o dividida por ese mismo valor, tales como:

- Cantidad de teléfonos a adquirir y el precio de cada uno.
- Número de ejercicios de matemáticas y el tiempo que se requiere invertir para resolverlos.
- Población de una ciudad y la cantidad de buses para su transportación.
- Porciones necesarias de ingredientes de una receta y el número de personas para las cuales se la va a preparar.

Scanned by CamScanner

3.8.4 Regla de tres directa

Se utiliza para resolver situaciones en las cuales se tiene una proporcionalidad directa entre las cantidades que se analizan.

Ejemplo 3.56 Regla de tres directa.

Si 3 sandías cuestan \$5, determine el precio de 24 sandías.

Solución:

Se plantea una regla de tres directa:

$$\begin{matrix}\uparrow 3 \text{ sandías} \\ \uparrow 24 \text{ sandías}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\uparrow \$5 \\ \uparrow x\end{matrix} \qquad \frac{x}{5}=\frac{24}{3} \rightarrow x=\frac{(24)(5)}{3}=40$$

∴ Las 24 sandías costarán \$40.

3.8.5 Porcentajes

El cálculo del porcentaje está enmarcado en el concepto de proporcionalidad. Por ejemplo, si en un aula de clases hay 10 varones y 15 mujeres, se puede afirmar que se tiene un 40% de varones (10 de 25) y un 60% de mujeres (15 de 25).

Ejemplo 3.57 Porcentajes.

Un trabajador percibe \$10 por cada hora trabajada de lunes a viernes y tiene un beneficio del 50% adicional a ese valor en sábados, domingos y feriados. Suponga que él trabajó un domingo durante 10 horas y un lunes de feriado por 6 horas, determine el valor total que percibirá por estos 2 días.

Solución:

Se indica que por cada hora el trabajador obtiene un beneficio especial del 50% adicional, esto es, (10)(1.50) = \$15. Entre el domingo y el lunes de feriado el trabajador invirtió un total de 16 horas. Ahora se aplica una regla de tres directa:

$$\begin{matrix}\uparrow 1 \text{ hora} \\ \uparrow 16 \text{ horas}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\uparrow \$15 \\ \uparrow x\end{matrix} \qquad \frac{x}{15}=\frac{16}{1} \rightarrow x=\frac{(16)(15)}{1}=240$$

∴ El valor que recibirá el trabajador es de \$240.

3.8.6 Proporcionalidad inversa entre dos cantidades

Si al incrementar en cierto valor una cantidad de análisis, la otra cantidad disminuye su valor (o viceversa), se tendrá una proporcionalidad inversa. Ejemplos de estas situaciones, se evidencian al relacionar:

- El tiempo en realizar una obra y el número de trabajadores involucrados.
- La velocidad de un vehículo y el tiempo que demora en trasladarse de un lugar a otro.
- La cantidad de miembros de una familia y las porciones de comida a repartirles.

Scanned by CamScanner

3.8.7 Regla de tres inversa

Se utiliza para resolver situaciones en las cuales existe una proporcionalidad inversa entre las cantidades que se analizan.

Ejemplo 3.58 Regla de tres inversa.

Si 12 obreros realizan un trabajo en 20 días, determine la cantidad de días que demorarán 10 obreros en realizar dicho trabajo con el mismo nivel de productividad.

Solución:

Se plantea una regla de tres inversa:

$$\downarrow \begin{matrix} 12 \text{ obreros} \\ 10 \text{ obreros} \end{matrix} \qquad \uparrow \begin{matrix} 20 \text{ días} \\ x \end{matrix} \qquad \frac{x}{20} = \frac{12}{10} \rightarrow x = \frac{(12)(20)}{10} = 24$$

Luego, 10 obreros se demorarán 24 días para realizar el trabajo con el mismo nivel de productividad.

3.8.8 Regla de tres compuesta

Cuando se analizan solamente relaciones entre dos magnitudes, se plantean reglas de tres simples (directas o inversas); sin embargo, habrán circunstancias en las cuales tengan que relacionarse más de dos magnitudes, dando lugar a reglas de tres compuestas.

Ejemplo 3.59 Regla de tres compuesta.

Cincuenta excursionistas tienen provisiones para 20 días consumiendo 3 raciones diarias. Si las raciones se disminuyen en 1/3 y se aumentan 10 excursionistas, ¿cuántos días durarán las provisiones?

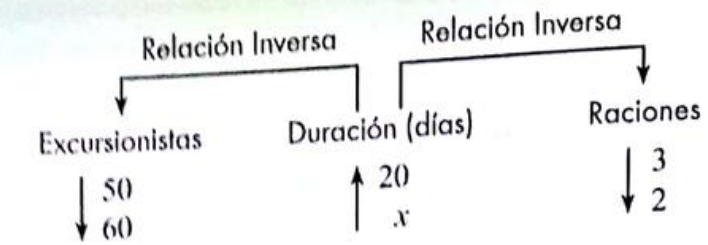
Solución:

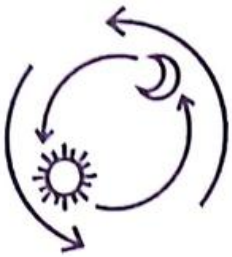
Como se indica que las raciones se disminuyen en 1/3, quiere decir que ahora se tendrán 2/3 de las raciones originales, esto es, 2 raciones diarias.

Se trata de una regla de tres compuesta:

- Si aumenta el número de excursionistas, quiere decir que las raciones diarias deberían disminuir. Se tiene una relación inversa entre estas 2 cantidades.
- Si el tiempo (en días) de duración de las provisiones aumenta, las raciones diarias deberían disminuir. O, habrán más raciones, si se tuvieran menos días de consumo. Se tiene una relación inversa entre estas 2 cantidades.

Scanned by CamScanner





$$\frac{x}{20} = \frac{50}{60} \cdot \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot 20$$

$$x = 25$$

Considerando las nuevas condiciones (disminución de raciones y aumento de excursionistas), las provisiones durarán 25 días.

Ejemplo 3.60 Regla de tres compuesta.

En un plan de vivienda en Guayaquil, una empresa constructora ha contratado 50 obreros que fabrican 4 casas diarias trabajando 8 horas durante cada día. Si la demanda de casas aumentó en 25% y las horas de trabajo diario disminuyen en 50%, ¿cuántos obreros adicionales debe contratar la empresa para cubrir la nueva demanda?

Solución:

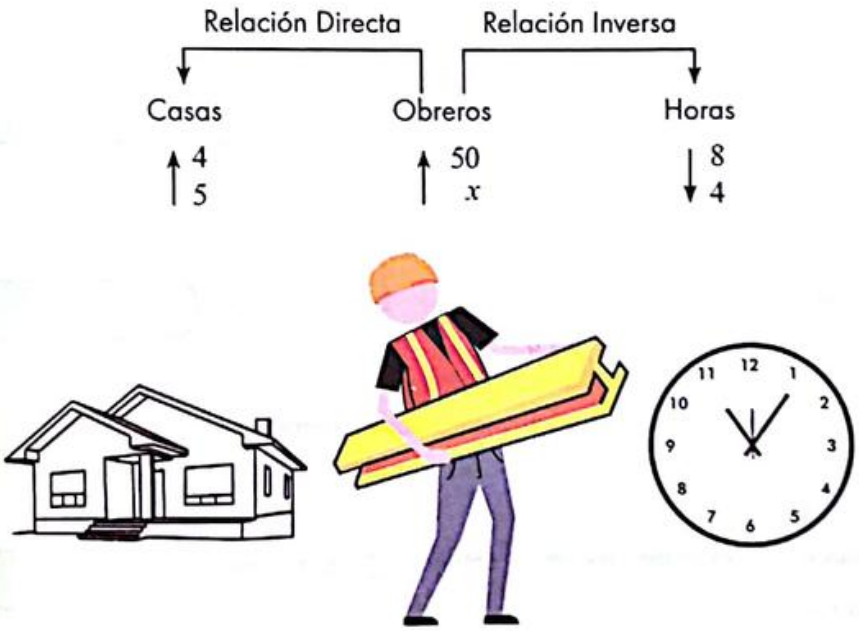
Como se indica que la demanda de casas aumentó en 25%, quiere decir que ahora se tendrá 1 más de la demanda inicial, esto es, 5 casas en total. Si las horas de trabajo diario disminuyen en 50%, quiere decir que ahora se trabajará la mitad del tiempo, esto es, 4 horas diarias.

Scanned by CamScanner

Se trata de una regla de tres compuesta:

- Si la cantidad de obreros aumenta trabajando al mismo ritmo diario, quiere decir que el número de casas a construir, también debería aumentar. O, cuando el número de obreros disminuye, también lo hace la cantidad de casas. Se tiene una relación directa entre estas 2 cantidades.

- Si la cantidad de obreros aumenta para construir la misma cantidad de casas, el tiempo en horas para construirlas debería disminuir. O, con menos obreros se necesita invertir más tiempo en construcción. Se tiene una relación inversa entre estas 2 cantidades.



$$\frac{x}{50}=\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{4}$$

$$x=\frac{5}{4}\cdot 2\cdot 50$$

$$x=125$$

Se necesitan 125 obreros en total para cubrir la nueva demanda. Como en la pregunta se indica la cantidad de obreros adicionales, la respuesta es 75, ya que se tenían 50 obreros inicialmente.

Scanned by CamScanner

1) Utilizando regla de tres directa, pruebe lo siguiente:

Si P es el "T por ciento" de C, entonces P está dado por la expresión: $P = \frac{C \cdot T}{100}$.

2) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas.

a) Si se tiene una razón $\frac{p}{q}$ tal que $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$ entonces se puede concluir que $p = 3$ y $q = 2$.

b) Una razón es una relación multiplicativa entre dos cantidades cualesquiera p y q.

c) Sea $R = \frac{p}{q}$ la razón "p es a q", entonces $\frac{1}{R}$ es la razón "q es a p".

d) El 33% de $45\frac{5}{11}$ es 15.

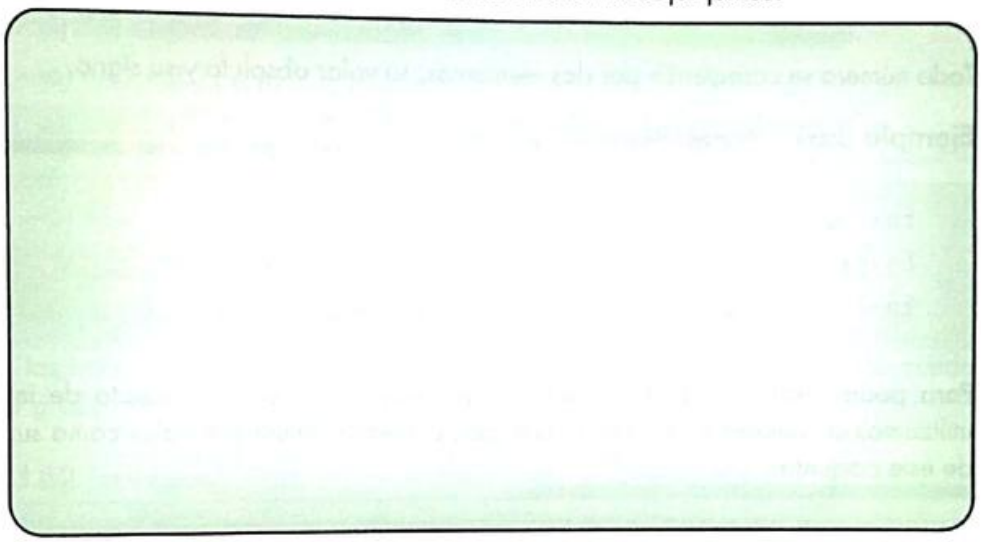
3) En cada casillero, coloque una D si la proporcionalidad entre las cantidades implícitas es directa o una I si la proporcionalidad es inversa.

a) Rapidez de un vehículo y la distancia que se puede recorrer en dos horas.
b) Duración de raciones alimenticias y personas por alimentar.
c) Capacidad de almacenamiento en un disco duro e información por guardar.
d) Cantidad de materias que se estudia y tiempo disponible para cada una.
e) Precio de un ramo de rosas y número de rosas en el ramo.

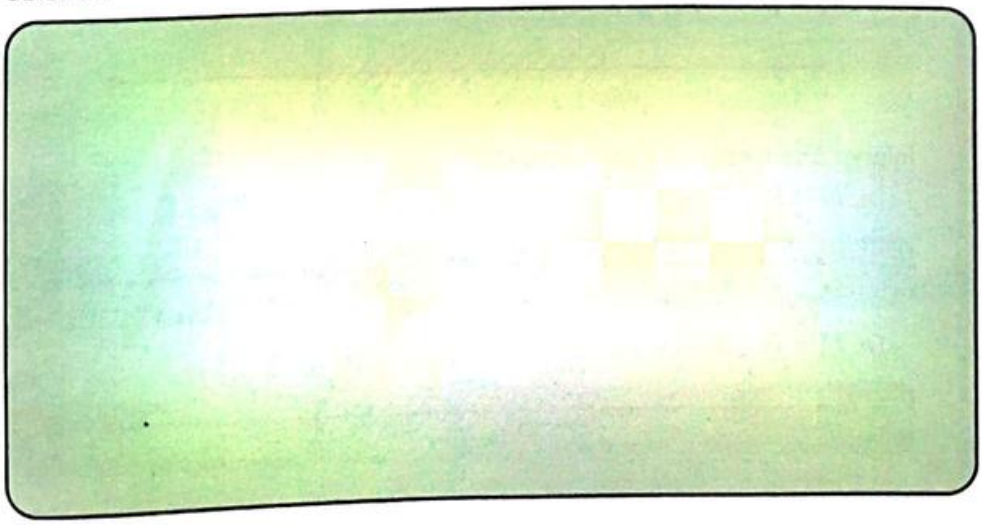
Scanned by CamScanner

4) Resuelva los siguientes problemas de aplicación.

a) Un estudiante está planificando su tiempo ya que debe hacer 180 ejercicios de matemáticas, relativamente sencillos, en 3 días. Para su fortuna, lo ayudará su prima que prácticamente tiene las mismas destrezas matemáticas que él. La última vez él hizo 60 ejercicios y se demoró 2 días, trabajando dos horas diarias. ¿Cuántas horas al día durante los 3 días deberán trabajar juntos?



b) Un agricultor disponía de 12 hectáreas para el cultivo de arroz que sembrando a una densidad de 90 kg de semillas por hectárea, le generaba una ganancia G. Hace poco, ha cedido 3 hectáreas del terreno a su hijo para que se inicie en el trabajo. Suponiendo que el agricultor aumenta la densidad a 100 kg de semillas por hectárea, ¿cuál sería la ganancia (en términos de G) que teóricamente debería obtener?



Scanned by CamScanner

3.9 Valor Absoluto

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dado un número real, obtener su valor absoluto.
- Interpretar el concepto de valor absoluto como la distancia entre dos números reales.
- Representar intervalos sobre la recta real.
- Dado un intervalo, identificar si es abierto, cerrado, semiabierto o semicerrado.
- Aplicar las propiedades del valor absoluto.

Todo número se caracteriza por dos elementos: su valor absoluto y su signo.

Ejemplo 3.61 Valor absoluto.

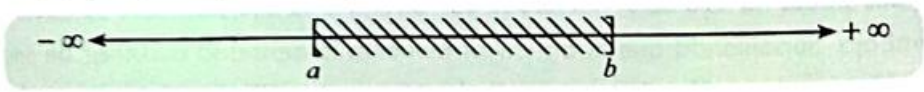
En el entero -5, el valor absoluto es 5 y el signo es negativo.
En el entero 7, el valor absoluto es 7 y el signo es positivo.
En el entero 0, el valor absoluto es 0 y no tiene signo.

Para poder definir el valor absoluto es necesario conocer el concepto de intervalo. Si utilizamos el conjunto de los números reales, podemos definir intervalos como subconjuntos de este conjunto.

Tipos de intervalo

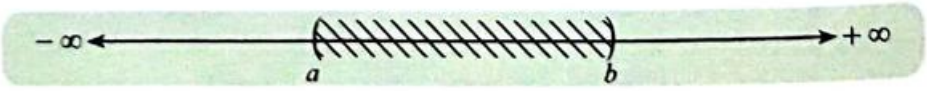
Intervalo cerrado

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



Intervalo abierto

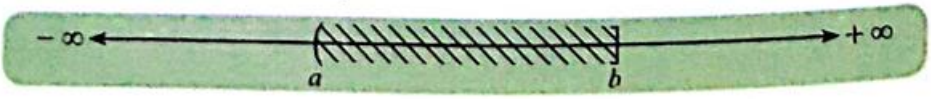
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



Intervalo semiabierto / semicerrado

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$



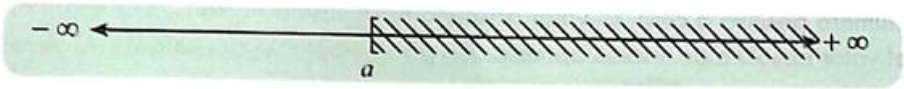
Scanned by CamScanner

Intervalo con extremo infinito

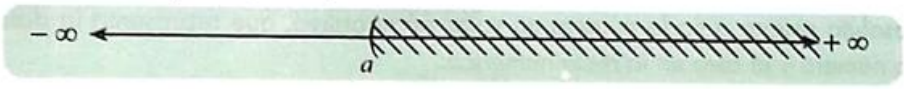
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$



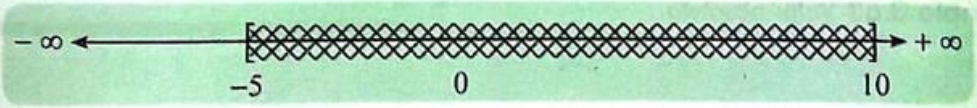
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$



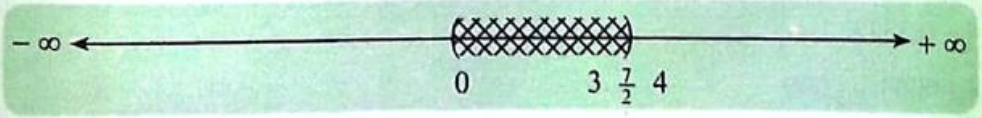
Dado que los intervalos son subconjuntos de los Números Reales, también se los puede representar gráficamente sobre la recta real como se muestra a continuación.

Ejemplo 3.62 Intervalos.

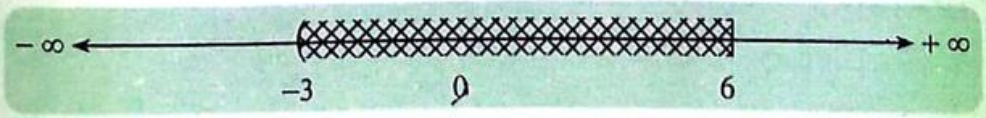
$[-5, 10] = \{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x \leq 10\}$



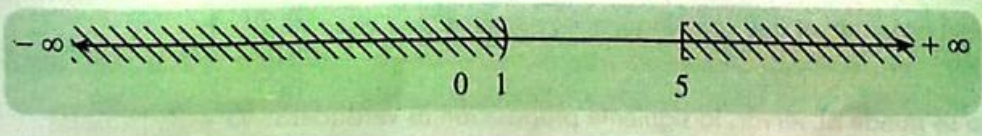
$\left(0, \frac{7}{2}\right) = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 7/2\}$



$(-3, 6] = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 6\}$

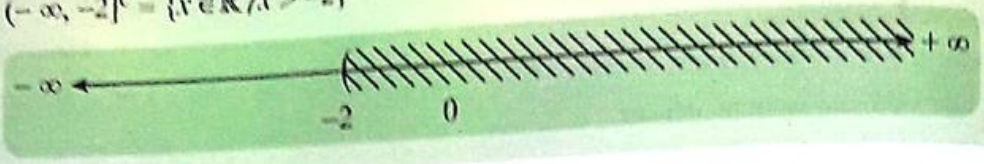


$[1, 5)^c = \{x \in \mathbb{R} / (x < 1) \vee (x \geq 5)\}$



Scanned by CamScanner

$(-\infty, -2]^c = \{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$



Definición 3.13 (Valor Absoluto)

El valor absoluto de un número x se representa por $|x|$ y es un número no negativo, tal que:

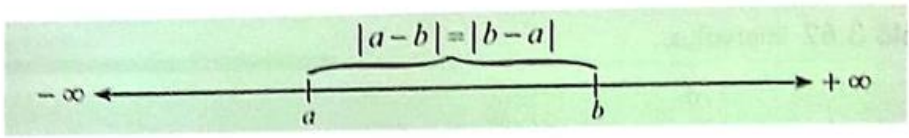
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Si x es un número positivo o cero, su valor absoluto es el mismo número. Si x es un número negativo, el valor absoluto de x es su opuesto. Así por ejemplo, el opuesto de -2 será 2.

Puede también observar que $\sqrt{x^2} = |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

El valor absoluto asigna a cada número un valor no negativo, que representa la distancia entre dicho número y el cero en la recta numérica.

Si se calcula el valor absoluto de la diferencia entre dos números reales, éste representa la distancia que hay entre ellos. En general si $a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b|$ es la distancia entre a y b.



Ejemplo 3.63 Valor absoluto.

$|-\pi| = \pi$

$\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$|-0.3333...| = \frac{1}{3}$

$|1\,000| = 1\,000$

$|-332.87| = 332.87$

$\sqrt{3^2} = |3| = 3$

$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

$|5 - 3| = |3 - 5| = 2$

En este último ejercicio se observa que la distancia entre 3 y 5 es 2, indistintamente del orden en el que se coloquen los números.

Como se puede observar, la siguiente proposición es verdadera: $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| \geq 0$.

Scanned by CamScanner

Las siguientes propiedades del valor absoluto resultan ser de mucha utilidad en el trabajo con números reales:

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que:

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$
4. $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$

A continuación demostraremos la propiedad 2.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$$

Aplicando la definición del valor absoluto:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \begin{cases} \frac{a}{b}\ , & \frac{a}{b} \geq 0 \\ -\frac{a}{b}\ , & \frac{a}{b} < 0 \end{cases}$$

Caso 1: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b}, \frac{a}{b} \geq 0$

a) $(a \geq 0) \wedge (b > 0)$

$|a| = a \wedge |b| = b$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$$

b) $(a \leq 0) \wedge (b < 0)$

$|a| = -a \wedge |b| = -b$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{-|a|}{-|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

Scanned by CamScanner

Caso 2: $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b}, \frac{a}{b} < 0$

a) $(a > 0) \wedge (b < 0)$

$|a| = a \wedge |b| = -b$

$\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = -\frac{|a|}{-|b|} = \frac{|a|}{|b|}$

b) $(a < 0) \wedge (b > 0)$

$|a| = -a \wedge |b| = b$

$\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = -\frac{-|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$

A continuación demostraremos la propiedad 3, también conocida como **desigualdad triangular**:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Aplicando la definición del valor absoluto:

$$|a+b| = \begin{cases} a+b & , a+b \geq 0 \\ -(a+b) & , a+b < 0 \end{cases}$$

a) $(a \geq 0) \wedge (b \geq 0)$

$a+b \geq 0$

$|a+b| = a+b$

$|a| = a \wedge |b| = b$

$|a+b| = |a| + |b|$

b) $(a < 0) \wedge (b < 0)$

$a+b < 0$

$|a+b| = -(a+b)$

$|a| = -a \wedge |b| = -b$

$|a+b| = -a-b = |a| + |b|$

c) $(a \geq 0) \wedge (b \leq 0)$

1. $|a| \geq |b|$

$a+b \geq 0$

$|a+b| = a+b$

$|a| = a \wedge |b| = -b$

$|a+b| = |a| - |b| \leq |a| + |b|$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Scanned by CamScanner

2. $|a| \leq |b|$
   $a+b<0$
   $|a+b| = -(a+b) = -a-b$
   $|a| = a \wedge |b| = -b$
   $|a+b| = -|a|+|b| \leq |a|+|b|$
   $|a+b| \leq |a|+|b|$

d) $a \leq 0 \wedge b \geq 0$

1. $|a| \geq |b|$
   $a+b<0$
   $|a+b| = -(a+b) = -a-b$
   $|a| = -a \wedge |b| = b$
   $|a+b| = |a|-|b| \leq |a|+|b|$
   $|a+b| \leq |a|+|b|$

2. $|a| \leq |b|$
   $a+b \geq 0$
   $|a+b| = a+b$
   $|a| = -a \wedge |b| = b$
   $|a+b| = -|a|+|b| \leq |a|+|b|$
   $|a+b| \leq |a|+|b|$

Ejemplo 3.64 Aplicación del valor absoluto.

a) $|(5)(-4)| = |5||-4|$
$|-20| = (5)(4)$
$20 = 20$

b) $\left|-\frac{7}{2}\right| = |-1|\left|\frac{7}{2}\right|$
$\left|-\frac{7}{2}\right| = (1)\left(\frac{7}{2}\right)$
$\frac{7}{2} = \frac{7}{2}$

Scanned by CamScanner

c) $\left|\frac{1}{4}-\frac{4}{5}\right| \leq \left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{4}{5}\right|$

$$\left|-\frac{11}{20}\right| \leq \frac{1}{4}+\frac{4}{5}$$

$$\frac{11}{20} \leq \frac{21}{20}$$

d) $\left|-3-\frac{1}{2}\right| \geq \left||-3|-\left|\frac{1}{2}\right|\right|$

$$\left|-\frac{7}{2}\right| \geq \left|3-\frac{1}{2}\right|$$

$$\frac{7}{2} \geq \frac{5}{2}$$

Ejemplo 3.65 Valor Absoluto en Operaciones Binarias Internas.

Sea el conjunto $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $*$ una operación binaria definida en S, tal que:

$$a * b = 2-||a|-|b||$$

Justificando su respuesta, determine si:

a) $*$ es una operación binaria interna.
b) $*$ es conmutativa.
c) $*$ es asociativa.
d) La operación tiene elemento neutro.
e) La operación posee la propiedad del elemento inverso.

Solución:

La tabla que representa la operación sería la siguiente:

*	−2	−1	0	1	2
−2	2	1	0	1	2
−1	1	2	1	2	1
0	0	1	2	1	0
1	1	2	1	2	1
2	2	1	0	1	2

Scanned by CamScanner

a) Se puede observar que $\forall a, b \in S\ (a * b) \in S$ es decir, se trata de una operación binaria interna.

$\therefore$ La proposición es verdadera.

b) Considere la propiedad conmutativa: $\forall a, b \in S\ (a * b) = (b * a)$.

$$2 - |\,|a| - |b|\,| = 2 - |\,|b| - |a|\,|$$
$$|\,|a| - |b|\,| = |\,|b| - |a|\,|$$
$$\sqrt{(|a| - |b|)^2} = \sqrt{(|a| - |b|)^2}$$
$$|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = |b|^2 - 2|b||a| + |a|^2$$
$$|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2$$

$\therefore$ La proposición es verdadera.

c) Considere la terna de valores $0, -1, 1$, la cual constituye un contraejemplo.

$$(0 * -1) * 1 \neq 0 * (-1 * 1)$$
$$1 * 1 \neq 0 * 2$$
$$2 \neq 0$$

$\therefore$ La proposición es falsa.

d) Se puede observar que la operación binaria interna $*$ no cumple con la propiedad del elemento neutro. Nótese que no existen operandos tales que al realizar la operación con algún valor negativo, también se obtengan valores negativos.

$\therefore$ La proposición es falsa.

e) Como la operación binaria interna $*$ no tiene elemento neutro, tampoco posee la propiedad del elemento inverso.

$\therefore$ La proposición es falsa.

Scanned by CamScanner

1) Una con líneas cada conjunto de la columna izquierda con su respectiva notación de intervalo ubicado a la derecha.

a) $\{x \in \mathbb{R} / x < 0 \vee x \geq 3\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{2}{5} < x \leq \frac{1}{2}\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq e\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq e \wedge x > 0\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{2}{5} \leq x < \frac{1}{2}\right\}$

$(-\infty, e]$

$[0, 3)^c$

$\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$

$\left[-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$

$(0, e]$

2) Determine el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $|1 - |3 - 5| - |1 - 7||$

b) $|\pi - 8| + \pi$

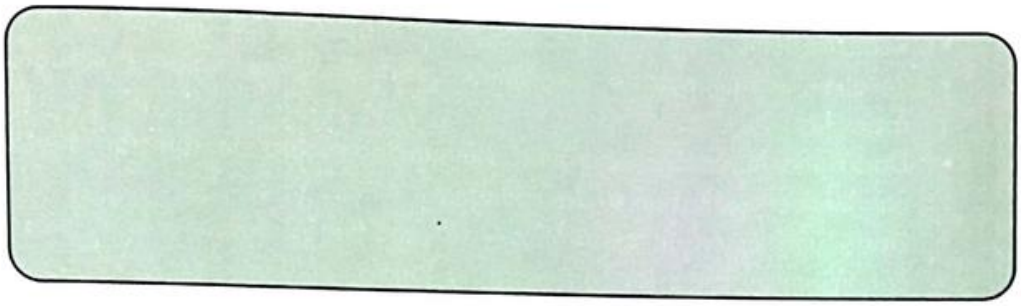
3) Descomponga las siguientes expresiones que contienen valor absoluto:

a) $|x - 3|$

b) $|1 - x| + 2$

Scanned by CamScanner

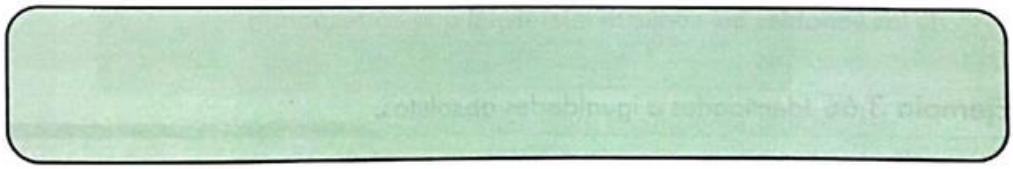
c) $\frac{x-5}{|x-5|},\ x \neq 5$



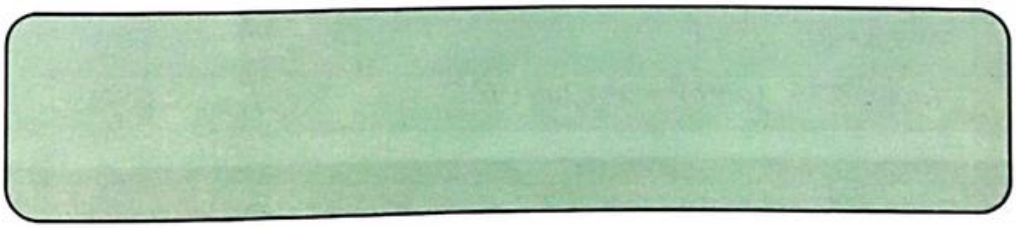
4) Califique como verdaderas o falsas las siguientes proposiciones, justificando su respuesta:

a) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ (|3a| = 3|a|)$

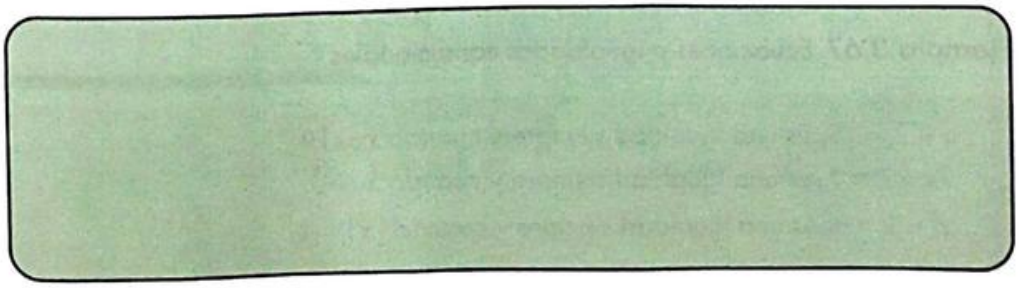
b) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \ (|a+b| = |a| + |b|)$



c) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \ (|a-b| > ||a| - |b||)$



d) $\forall a \in \mathbb{R}^-\ \ \forall b \in \mathbb{R}^+\ \ \left(\frac{1+\sqrt{a^2b}}{a\sqrt{b}-1} = -1\right);\ a\sqrt{b} \neq 1$



Scanned by CamScanner

3.10 Ecuaciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar con sus propias palabras la diferencia entre ecuación e identidad.
- Realizar demostraciones aplicando propiedades de las igualdades.
- Resolver ecuaciones de tipo lineal, cuadrática, con valor absoluto y con radicales.
- Dada una ecuación cuadrática, determinar el tipo de solución que tendrá mediante el análisis de su discriminante.
- Dada una ecuación cuadrática con parámetros desconocidos, establecer condiciones sobre estos parámetros en función del tipo de solución requerido.
- Analizar soluciones extrañas de las ecuaciones con radicales.
- Plantear y resolver problemas basados en ecuaciones.

Una igualdad es un enunciado que establece que dos expresiones matemáticas tienen el mismo valor. Existen dos tipos de igualdades: absolutas y condicionales.

Definición 3.14 (Identidad)

Una identidad o igualdad absoluta, es una proposición que compara dos expresiones matemáticas con el símbolo "=" y es verdadera para todos los valores de las variables del conjunto referencial que corresponda.

Ejemplo 3.66 Identidades o igualdades absolutas.

$5^{-2} = \frac{1}{25}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad x^0 = 1$

$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Definición 3.15 (Ecuación)

Una ecuación o igualdad condicional, es aquella que es verdadera sólo para algún o algunos elementos del conjunto referencial que corresponda.

Ejemplo 3.67 Ecuaciones o igualdades condicionales.

$x - 2 = 17$, es una igualdad siempre y cuando $x = 19$.
$3x + 2 = 7$, es una igualdad siempre y cuando $x = \frac{5}{3}$.
$x^2 - 1 = 0$, es una igualdad siempre y cuando $|x| = 1$.

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

Los valores de la incógnita x que hacen que la ecuación se convierta en una proposición verdadera, se denominan **soluciones o raíces** de la misma. El proceso de determinar las soluciones se denomina resolución de la ecuación.

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución. En la resolución de la ecuación intentamos determinar una que sea más simple y equivalente, en la cual aparezca la incógnita sólo en uno de los lados de la igualdad.

Una ecuación puede representarse como un predicado $p(x)$, cuyo conjunto referencial es el conjunto de números reales, a no ser que se especifique otro conjunto. El conjunto de verdad $Ap(x)$ está conformado por la(s) solución(es) de dicha ecuación.

Las expresiones que están a ambos lados del símbolo igual son los miembros de la ecuación: primer miembro el de la izquierda, segundo miembro el de la derecha.

Expresión 1 = Expresión 2

En las siguientes propiedades tanto x como y pueden representar expresiones algebraicas desde las más sencillas hasta las más complejas:

1.	$\forall x, y \in \mathbb{R}\ [(x = y) \Leftrightarrow (y = x)]$
2.	$\forall x, y \in \mathbb{R} \wedge \forall c \in \mathbb{R}\ [(x = y) \Leftrightarrow (x + c = y + c)]$
3.	$\forall x, y \in \mathbb{R} \wedge \forall c \in \mathbb{R}\ [(x = y) \Rightarrow (xc = yc)]$
4.	$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge \forall n \in \mathbb{Z}\ [(x = y) \Rightarrow (x^n = y^n)]$
5.	$\forall x, y \in \mathbb{R}\ [(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)]$

Cuadro 3.4: Propiedades de las igualdades entre expresiones algebraicas.

Ejemplo 3.68 Propiedades de las ecuaciones.

Analice el siguiente razonamiento, en el cual se concluye que todo número real es igual a cero; $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ \forall b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$.

$a = b$
$a^2 = ab$
$a^2 - b^2 = ab - b^2$
$(a - b)(a + b) = b(a - b)$
$a + b = b$
$a = 0$

¿Dónde está el error?
a) En multiplicar por a.
b) En restar b^2.
c) En la simplificación.

Solución:
El error está en la simplificación, pues como $a = b \Rightarrow a - b = 0$.

Scanned by CamScanner

Podemos identificar distintos tipos de ecuaciones. En esta sección vamos a tratar las siguientes: lineales, cuadráticas, con valor absoluto y con radicales.

3.10.1 Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal o de primer grado, corresponde al tipo más simple de ecuación, pudiendo ser reducida a un predicado de la forma:

$$p(x): ax + b = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

donde x es la incógnita cuyo valor hay que determinar.

La solución de la ecuación anterior la obtenemos así:

$ax + b = 0$	Consideramos la expresión original.
$ax + b - b = 0 - b$	Sumamos el inverso aditivo de b a ambos miembros.
$ax + 0 = -b$	Reducimos la expresión.
$ax = -b$	Propiedad del neutro aditivo.
$\left(\frac{1}{a}\right) ax = \left(\frac{1}{a}\right)(-b)$	Efectuamos el producto por el inverso multiplicativo de a.
$(1)(x) = -\frac{b}{a}$	Simplificamos la expresión.
$x = -\frac{b}{a}$	Propiedad del neutro multiplicativo.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x): ax + b = 0$, $Ap(x) = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Ejemplo 3.69 Ecuaciones lineales.

Si $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x): 7x - 5 = 4x + 7$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$7x - 5 = 4x + 7$	Consideramos la expresión original.
$7x - 5 + 5 = 4x + 7 + 5$	Sumamos 5 a ambos miembros de la ecuación.
$7x = 4x + 12$	Reducimos la expresión.
$7x - 4x = 4x - 4x + 12$	Restamos $4x$ a ambos miembros de la ecuación.
$3x = 12$	Reducimos la expresión.
$\left(\frac{1}{3}\right) 3x = \left(\frac{1}{3}\right) 12$	Efectuamos el producto con el inverso multiplicativo de 3.

Scanned by CamScanner

$x = 4$ Despejamos la incógnita x.

Comprobamos el valor de x:

$p(4): 7(4) - 5 = 4(4) + 7$

$23 = 23$

$\therefore p(4) \equiv 1$

Se concluye que $Ap(x) = \{4\}$.

Ejemplo 3.70 Ecuaciones lineales.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x): \dfrac{3 - \dfrac{2 + \dfrac{2-x}{3}}{3}}{2} = 1$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$$3 - \frac{2 + \frac{2-x}{3}}{3} = 2$$

$$3 - \frac{\frac{6+2-x}{3}}{3} = 2$$

$$3 - \frac{\frac{8-x}{3}}{3} = 2$$

$$3 - \frac{8-x}{9} = 2$$

$$\frac{27-8+x}{9} = 2$$

$$19 + x = 18$$

$$x = -1$$

Comprobando, tenemos que:

$$p(-1): \frac{3 - \frac{2 + \frac{2-(-1)}{3}}{3}}{2} = \frac{3 - \frac{2 + \frac{3}{3}}{3}}{2} = \frac{3 - \frac{2+1}{3}}{2} = \frac{3 - \frac{3}{3}}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore p(-1) \equiv 1$

Se concluye que $Ap(x) = \{-1\}$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.71 Ecuaciones lineales.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $\dfrac{x+a}{2a+b} + \dfrac{x+b}{a+2b} = 2$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Considere que $a \neq -b/2$, $a \neq -2b$, $a \neq -b$ y determine $Ap(x)$.

Solución:

$$\frac{(x+a)(a+2b)+(x+b)(2a+b)}{(2a+b)(a+2b)} = 2$$

$$(x+a)(a+2b)+(x+b)(2a+b) = 2(2a+b)(a+2b)$$

$$ax+2bx+a^2+2ab+2ax+bx+2ab+b^2 = 4a^2+8ab+2ab+4b^2$$

$$3ax+3bx+a^2+4ab+b^2 = 4a^2+10ab+4b^2$$

$$x(3a+3b) = 3a^2+6ab+3b^2$$

$$x = \frac{3a^2+6ab+3b^2}{3a+3b} = \frac{3(a^2+2ab+b^2)}{3(a+b)}$$

$$x = \frac{(a+b)^2}{a+b}$$

$$x = a+b$$

Comprobando, tenemos que:

$$p(a+b)\text{: } \frac{(a+b)+a}{2a+b} + \frac{(a+b)+b}{a+2b} = \frac{2a+b}{2a+b} + \frac{a+2b}{a+2b} = 1+1 = 2$$

$$\therefore p(a+b) \equiv 1$$

Se concluye que $Ap(x) = \{a+b\}$.

3.10.2 Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática o de segundo grado es aquella que puede representarse con un predicado de la forma:

$$p(x) : ax^2+bx+c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

donde x es la incógnita cuyo valor hay que determinar.

Se pueden determinar las soluciones de la ecuación cuadrática mediante una rápida descomposición en factores o por la fórmula general.

En el primer caso, se trata de expresar el miembro izquierdo de la ecuación cuadrática como el producto de dos factores lineales, y se igualan a cero estos factores. Las nuevas ecuaciones que resultan son lineales y se las puede resolver separadamente, como se describió en la subsección anterior. Finalmente, las soluciones de estas ecuaciones se unen para conformar el conjunto de verdad de la ecuación cuadrática dada.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.72 Resolución de una ecuación cuadrática: Descomposición en factores.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $x^2 + 5x - 6 = 0$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$x^2 + 5x - 6 = 0$

$(x + 6)(x - 1) = 0$

$(x + 6 = 0) \vee (x - 1 = 0)$

$(x = -6) \vee (x = 1)$

Comprobando, tenemos que:

$p(-6) : (-6)^2 + 5(-6) - 6 = 36 - 30 - 6 = 0$

$\therefore p(-6) \equiv 1$

$p(1) : (1)^2 + 5(1) - 6 = 1 + 5 - 6 = 0$

$\therefore p(1) \equiv 1$

En consecuencia, $Ap(x) = \{-6, 1\}$.

Ejemplo 3.73 Resolución de una ecuación cuadrática: Descomposición en factores.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $3x^2 - 11x + 6 = 0$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$$\frac{(3x-9)(3x-2)}{3} = 0$$

$(x - 3)(3x - 2) = 0$

$(x - 3 = 0) \vee (3x - 2 = 0)$

$\left(x = 3\right) \vee \left(x = \frac{2}{3}\right)$

Comprobando, tenemos que:

$p(3) : 3(3)^2 - 11(3) + 6 = 3(9) - 11(3) + 6 = 27 - 33 + 6 = 0$

$\therefore p(3) \equiv 1$

$$p\left(\frac{2}{3}\right) : 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 11\left(\frac{2}{3}\right) + 6 = \frac{4}{3} - \frac{22}{3} + 6 = \frac{4 - 22 + 18}{3} = 0$$

$\therefore p\left(\frac{2}{3}\right) \equiv 1$

Se concluye que $Ap(x) = \left\{\frac{2}{3}, 3\right\}$.

Scanned by CamScanner

Mediante la fórmula general, las soluciones de la ecuación cuadrática también pueden obtenerse algebraicamente de la manera siguiente:

$ax^2 + bx + c = 0$	Tomando la ecuación original.
$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$	Factor común a.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	Producto de ambos miembros por $\frac{1}{a}$.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$	Compleción del trinomio cuadrado perfecto.
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	Descomposición en factores.
$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$	Extracción de raíz cuadrada a ambos miembros.
$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Despejando x.
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Simplificando y reduciendo.

Fórmula General

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac \quad \text{(Discriminante)}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Interpretación del discriminante de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

- Si el discriminante es mayor que cero, existen dos soluciones reales y diferentes.
- Si el discriminante es igual a cero, hay una solución real duplicada.
- Si el discriminante es menor que cero, no existe solución real.

Ejemplo 3.74 Resolución de una ecuación cuadrática: Fórmula general.

Caso: Dos soluciones reales diferentes

Sea Re = $\mathbb{R}$ y $p(x) : 3x^2 - 5x + 1 = 0$, determine A$p(x)$.
En este caso, $a = 3$, $b = -5$, $c = 1$.

Scanned by CamScanner

El discriminante $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(1) = 13$.

Puesto que $13 > 0$, significa que hay 2 raíces reales y diferentes.

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \quad ; \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$$

Comprobando, tenemos que:

$$p\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right): 3\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{12}(25 + 10\sqrt{13} + 13) - \frac{25}{6} - \frac{5}{6}\sqrt{13} + 1$$

$$= \frac{25}{12} + \frac{5}{6}\sqrt{13} + \frac{13}{12} - \frac{25}{6} - \frac{5}{6}\sqrt{13} + 1$$

$$= \frac{25 + 13 - 50 + 12}{12}$$

$$= 0$$

$$p\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right): 3\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{12}(25 - 10\sqrt{13} + 13) - \frac{25}{6} + \frac{5}{6}\sqrt{13} + 1$$

$$= \frac{25}{12} - \frac{5}{6}\sqrt{13} + \frac{13}{12} - \frac{25}{6} + \frac{5}{6}\sqrt{13} + 1$$

$$= \frac{25 + 13 - 50 + 12}{12}$$

$$= 0$$

Entonces, $Ap(x) = \left\{\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right\}$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.75 Resolución de una ecuación cuadrática: Fórmula general.

Caso: Una solución real repetida

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : 16x^2 - 24x + 9 = 0$, determine $\text{A}p(x)$.
En este caso, $a = 16$, $b = -24$, $c = 9$.

El discriminante $b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4(16)(9) = 0$, significa que hay una raíz real duplicada.

$$x_{1,2} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(16)(9)}}{2(16)}$$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{32}$$

$$x_{1,2} = \frac{24}{32}$$

Simplificando, tenemos que:

$$x_1 = x_2 = \frac{3}{4}$$

Comprobando, tenemos que:

$$p\left(\frac{3}{4}\right) : 16\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 24\left(\frac{3}{4}\right) + 9 = 16\left(\frac{9}{16}\right) - 18 + 9 = 0$$

Por lo tanto, $\text{A}p(x) = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Ejemplo 3.76 Resolución de una ecuación cuadrática: Fórmula general.

Caso: No existen soluciones reales

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : 3x^2 - 4x + 2 = 0$, determine $\text{A}p(x)$.
En este caso, $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$.

El discriminante $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(3)(2) = -8$.

Puesto que $-8 < 0$, significa que no hay raíces reales.

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

- Para este problema, $\text{A}p(x) = \varnothing$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.77 Ecuaciones cuadráticas.

Contrario a los ejemplos anteriores, la ecuación cuadrática puede tener parámetros desconocidos, los cuales se determinan con condiciones sobre el discriminante de la ecuación.

Así, si se tiene la ecuación $2x^2 - kx + 5 = 0$ y se requiere que tenga una solución real duplicada (solución real única), su discriminante debe igualarse a cero.

Esto es $k^2 - 4(2)(5) = 0$. Se obtiene que $k = \pm 2\sqrt{10}$.

$\therefore$ La ecuación cuadrática dada tiene solución única si y sólo si $k \in \{-2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}\}$.

En este último ejemplo, también se pueden obtener condiciones para k si se requiere que la ecuación cuadrática tenga dos soluciones reales diferentes, o no tenga solución en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.78 Ecuaciones cuadráticas.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$, determine los valores de p para que la ecuación:

$$3x^2 + (p+1)x + 24 = 0, x \in \mathbb{R}$$

tenga dos raíces tales que la una sea el doble de la otra.

Solución:

Por la fórmula general: $x = \dfrac{-(p+1) \pm \sqrt{(p+1)^2 - 288}}{6}$

Por condición del problema:

$$\frac{-(p+1) - \sqrt{(p+1)^2 - 288}}{6} = 2\left[\frac{-(p+1) + \sqrt{(p+1)^2 - 288}}{6}\right]$$

$$-(p+1) - \sqrt{(p+1)^2 - 288} = -2(p+1) + 2\sqrt{(p+1)^2 - 288}$$

Esto es: $(p+1) = 3\sqrt{(p+1)^2 - 288}$.

Elevando al cuadrado: $(p+1)^2 = 9[(p+1)^2 - 288]$.

Simplificando, se obtiene: $(p+1)^2 = 324$.

Esto es: $p + 1 = \pm 18 \Rightarrow (p = 17 \vee p = -19)$.

Ejemplo 3.79 Ecuaciones cuadráticas.

Si $a^2 + 2ab + b^2 + a + b = 12$; y, a y b son números reales negativos, ¿cuál es el valor de $a + b$?

Scanned by CamScanner

Solución:

Puesto que: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Tenemos entonces: $(a+b)^2 + (a+b) = 12$, es decir: $(a+b)^2 + (a+b) - 12 = 0$.

Si se realiza el cambio de variable: $u = a + b$.

La ecuación se transforma en: $u^2 + u - 12 = 0$.

La cual es una ecuación de segundo grado o cuadrática que se puede descomponer en factores así:

$(u+4)(u-3) = 0$

$(u+4=0) \vee (u-3=0)$

$(u=-4) \vee (u=3)$

Resolviendo la ecuación original: $[(a+b)+4][(a+b)-3] = 0$.

Con lo cual: $(a+b=-4) \vee (a+b=3)$.

Ahora bien, como a y b son números reales negativos, entonces $(a+b)$ también debe ser un número real negativo. Por lo tanto, $a+b=-4$.

Cuando el discriminante no es negativo, suele ser útil tener expresiones para sumar o multiplicar las raíces reales existentes.

Suma Algebraica de las Raíces de la Ecuación Cuadrática

La suma de las raíces de la ecuación cuadrática viene dada por: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Fórmula General

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} \therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Producto Algebraico de las Raíces de la Ecuación Cuadrática

El producto de las raíces de la ecuación cuadrática viene dado por: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Fórmula General

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.80 Ecuaciones cuadráticas.

Determine el valor de k en la ecuación $2x^2 - 5x = x^2 + 3x - k + 1$ para que la suma de sus soluciones sea el triple de su producto.

Solución:

La ecuación cuadrática será: $x^2 - 8x + (k-1) = 0$, cuyos coeficientes son: $a = 1$, $b = -8$, $c = k - 1$.

Según la condición del problema:

$$-\frac{b}{a} = 3\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$-\frac{-8}{1} = 3\left(\frac{k-1}{1}\right)$$

$$8 = 3k - 3$$

$$k = \frac{11}{3}$$

La ecuación cuadrática quedaría así: $x^2 - 8x + 8/3 = 0$, con discriminante positivo. Adicionalmente, se cumple que $x_1 + x_2 = 8$ y $x_1 \cdot x_2 = 8/3$, verificándose lo requerido.

3.10.3 Ecuaciones con valor absoluto

Una ecuación con valor absoluto es una expresión algebraica que incluye el valor absoluto y que en su forma más simple puede representarse con uno de los siguientes predicados:

$p(x)$: $\lvert ax + b\rvert + c = 0$	$a, b, c \in \mathbf{R}$
$p(x)$: $\lvert ax^2 + bx + c\rvert + d = 0$	$a, b, c, d \in \mathbf{R}$

Aunque pueden darse expresiones más complejas, con el propósito de utilizar las propiedades del valor absoluto, en esta sección se ilustrará un ejemplo de cada forma. Ecuaciones más avanzadas requieren combinar métodos gráficos y propiedades para su solución, lo cual se estudiará en capítulos posteriores.

Ejemplo 3.81 Ecuaciones con valor absoluto.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbf{R}$ y $p(x)$: $5 - |x - 1| = 3$, determine $\mathrm{A}p(x)$.

Solución:

$\lvert x - 1\rvert = 5 - 3$	Despejamos el valor absoluto.
$\lvert x - 1\rvert = 2$	Simplificamos.
$(x - 1 = -2) \vee (x - 1 = 2)$	Aplicamos la definición del valor absoluto.
$(x = -1) \vee (x = 3)$	Despejando x.

Scanned by CamScanner

Comprobando, tenemos que:

$p(-1)$: $5 - |-2| = 5 - 2 = 3$ $\therefore p(-1) \equiv 1$

$p(3)$: $5 - |2| = 5 - 2 = 3$ $\therefore p(3) \equiv 1$

Por lo tanto, $Ap(x) = \{-1, 3\}$.

Ejemplo 3.82 Ecuaciones cuadráticas y con valor absoluto.

Sea $Re = \mathbf{R}$ y $p(x) : 2x^2 - 3|x| = x$, determine $Ap(x)$.

Solución:

Se deben resolver dos ecuaciones cuadráticas, aplicando la definición de valor absoluto:

$$[(2x^2 - 3x = x) \wedge (x \geq 0)] \quad \vee \quad [(2x^2 + 3x = x) \wedge (x < 0)]$$

$$[(2x^2 - 4x = 0) \wedge (x \geq 0)] \quad \vee \quad [(2x^2 + 2x = 0) \wedge (x < 0)]$$

$$[(2x\,(x - 2) = 0) \wedge (x \geq 0)] \quad \vee \quad [(2x\,(x + 1) = 0) \wedge (x < 0)]$$

$$\{[(x = 0) \vee (x = 2)] \wedge (x \geq 0)\} \quad \vee \quad \{[(x = 0) \vee (x = -1)] \wedge (x < 0)\}$$

$$[(x = 0) \vee (x = 2)] \quad \vee \quad (x = -1)$$

Al realizar la verificación:

$p(0)$: $2(0)^2 - 3|0| = 0$ $\therefore p(0) \equiv 1$

$p(2)$: $2(2)^2 - 3|2| = 2$ $\therefore p(2) \equiv 1$

$p(-1)$: $2(-1)^2 - 3|-1| = -1$ $\therefore p(-1) \equiv 1$

Se concluye que $Ap(x) = \{-1, 0, 2\}$.

3.10.4 Ecuaciones con radicales

Una ecuación con radicales es una expresión algebraica en la cual la variable x aparece bajo una raíz. Si la raíz es cuadrada, un procedimiento razonable consiste en elevar al cuadrado el miembro que posea el radical para eliminarlo. Sin embargo, con este procedimiento la ecuación no siempre se transforma en una ecuación equivalente, ya que para que dos ecuaciones sean equivalentes se necesita que tengan exactamente las mismas soluciones.

Ejemplo 3.83 Ecuaciones con radicales.

Sea $Re = \mathbf{R}$ y $p(x) : \sqrt{x + 13} - \sqrt{7 - x} = 2$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$\sqrt{x + 13} = 2 + \sqrt{7 - x}$ Transponemos uno de los términos radicales.

Scanned by CamScanner

$x+13=4+4\sqrt{7-x}+7-x$	Elevamos al cuadrado cada miembro.
$2x+2=4\sqrt{7-x}$	Simplificamos la expresión.
$x+1=2\sqrt{7-x}$	Multiplicamos por $\frac{1}{2}$ ambos miembros.
$x^2+2x+1=4(7-x)$	Elevamos al cuadrado cada miembro.
$x^2+6x-27=0$	Simplificamos la expresión.
$(x+9)(x-3)=0$	Descomponemos en factores.
$(x+9=0)\vee(x-3=0)$	Igualamos a cero los factores.
$(x=-9)\vee(x=3)$	Despejamos la incógnita.

Comprobando, tenemos que:

$p(-9):\sqrt{-9+13}-\sqrt{7+9}=\sqrt{4}-\sqrt{16}=-2\neq 2 \quad \therefore p(-9)\equiv 0$

$p(3):\sqrt{3+13}-\sqrt{7-3}=\sqrt{16}-\sqrt{4}=2=2 \quad \therefore p(3)\equiv 1$

Con lo cual, $Ap(x)=\{3\}$.

El valor de -9 corresponde a la denominada "solución extraña", ya que es solución de la ecuación cuadrática, pero no de la ecuación con el radical; estas dos ecuaciones no son equivalentes, lo cual hace que se presenten soluciones extrañas.

Ejemplo 3.84 Ecuaciones con radicales.

Sea $Re=\mathbf{R}$ y $p(x):\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+1}$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})^2=(\sqrt{2x+1})^2$	Elevamos al cuadrado cada miembro.
$x+2\sqrt{x}\sqrt{x+1}+x+1=2x+1$	Aplicamos producto notable.
$2\sqrt{x}\sqrt{x+1}=0$	Simplificamos cada expresión.
$4x(x+1)=0$	Elevamos al cuadrado cada miembro.
$(4x=0)\vee(x+1=0)$	Igualamos a cero los factores.
$(x=0)\vee(x=-1)$	Despejamos la incógnita.

Comprobando, tenemos que:

$p(0):\sqrt{0}+\sqrt{1}=\sqrt{0+1} \quad \therefore p(0)\equiv 1$

$p(-1):\sqrt{-1}+\sqrt{-1+1}=\sqrt{-2+1} \quad \therefore p(-1)\equiv 0$

Note que esta última expresión no está definida en $\mathbf{R}$ y corresponde a la denominada "solución extraña". Con lo cual $Ap(x)=\{0\}$.

Scanned by CamScanner

3.10.5 Planteo de ecuaciones

Una de las aplicaciones más importantes que se derivan del estudio del álgebra es la solución de problemas de las ciencias de la ingeniería, la economía, la administración, las finanzas, la medicina, y otros de la vida cotidiana, los cuales pueden plantearse en términos algebraicos y resolverse con las técnicas anteriormente estudiadas.

Considere las siguientes reglas básicas para la resolución de problemas de enunciado verbal:

- **Lectura y compresión del enunciado del problema:** Antes de iniciar la resolución de un problema, es necesario que hayamos comprendido bien su enunciado. Lea cuidadosamente el problema tantas veces como sea necesario, para aclarar dudas sobre lo que se pide resolver y cómo se relaciona la información dada.
- **Designación de la(s) incógnita(s) del problema:** Para designar la(s) incógnita(s) debemos prestar atención a la pregunta que se formula en el problema. Sin embargo, es conveniente también tener presente las relaciones existentes entre los datos y la incógnita, pues ello puede permitir plantear una ecuación más simple. Generalmente, las incógnitas se representan con letras minúsculas del alfabeto español.
- **Traducción del texto del problema al lenguaje matemático:** Exprese en términos algebraicos las relaciones enunciadas verbalmente en el problema.
- **Expresión de relaciones por medio de ecuaciones:** Identifique la(s) condición(es) del problema que relaciona(n) dos o más de las expresiones establecidas en el paso anterior. Plantee una ecuación (o ecuaciones) que exprese(n) las condiciones del problema.
- **Resolución de las ecuaciones y análisis de las soluciones obtenidas:** Resuelva la(s) ecuación(es) y verifique que sus soluciones satisfagan al problema original. Escriba la respuesta en la forma de un enunciado que responda a la pregunta que se planteó en el problema.

Si el caso amerita, se puede realizar un gráfico del problema a resolver.

Ejemplo 3.85 Problema de planteo de ecuaciones.

Un estudiante debe leer una novela en una semana. Entre lunes y martes lee $\frac{1}{5}$ del libro y el miércoles lee $\frac{1}{3}$ del resto. Si para los restantes días de la semana todavía le quedan 64 páginas de lectura, ¿cuál es el número total de páginas del libro?

Solución:

x : número total de páginas del libro.

$\frac{1}{5}x$: número de páginas leídas entre lunes y martes.

El resto es la diferencia entre el número total de páginas y lo que leyó entre lunes y martes. Por lo tanto, el miércoles el estudiante lee: $\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}x\right)$. Los restantes días de la semana el estudiante lee: 64 páginas.

Scanned by CamScanner

Según las condiciones del problema, se puede plantear en función de las páginas leídas la siguiente ecuación:

$\left(\frac{1}{5}\right)x+\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{5}x\right)+64=x$	Planteo de la ecuación.
$\left(\frac{1}{5}\right)x+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)x+64=x$	Reducción de términos.
$\left(\frac{1}{5}\right)x+\left(\frac{4}{15}\right)x+64=x$	Producto de fracciones.
$x-\left(\frac{1}{5}\right)x-\left(\frac{4}{15}\right)x=64$	Transposición de términos.
$15x-3x-4x=(64)(15)$	m.c.m. entre 5 y 15.
$8x=960$	Simplificación.
$x=120$	Despejando x.

Análisis de la solución obtenida:

Entre el lunes y el martes leyó $\frac{1}{5}$ de 120 páginas, es decir, 24 páginas.

El miércoles leyó $\frac{1}{3}$ de 96 páginas, es decir, 32 páginas.

Los restantes días leyó 64 páginas.

El total de páginas leídas es la suma de 24, 32, 64, es decir, 120.

Ejemplo 3.86 Problema de planteo de ecuaciones.

Una solución de sal se hizo al 10% y otra al 25%. ¿Cuántos litros de cada una se deben mezclar para obtener 20 litros de solución al 16% de sal?

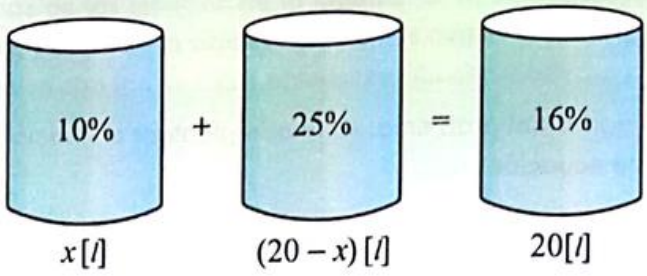
Solución:

x: número de litros al 10%.
$20-x$: número de litros al 25%.

La cantidad de sal en la mezcla final debe ser igual a la suma de las cantidades de sal que hay en las soluciones iniciales. La cantidad de sal en cada solución es el porcentaje dado del número de litros en cada una de ellas.

Scanned by CamScanner

$$10\% \text{ de } x + 25\% \text{ de } (20 - x) = 16\% \text{ de } 20$$



$0.1x + (0.25)(20 - x) = (0.16)(20)$ Planteo de la ecuación.

$0.1x + 5 - 0.25x = 3.2$ Producto.

$-0.15x = -1.8$ Reducción de términos semejantes.

$$x = \frac{\frac{18}{10}}{\frac{15}{100}} = \frac{\frac{6}{1}}{\frac{5}{10}}$$ Simplificación.

$x = 12$ Despejando x.

Análisis de la solución obtenida:

10% de 12 = 1.2 litros.
25% de 8 = 2 litros.
1.2 + 2 = 16% de 20 = 3.2 litros.

Por lo tanto, se deben mezclar 12 litros de la solución al 10% con 8 litros de la solución al 25% para obtener 20 litros de una solución al 16%.

Ejemplo 3.87 Problema de planteo de ecuaciones.

David puede pintar una habitación en 6 horas. Su amigo José puede pintar la misma habitación en 8 horas. ¿Cuánto demorarán en pintarla si trabajan juntos?

Solución:

x: número de horas que demoran en pintarla juntos.

En 1 hora : David pinta $\frac{1}{6}$ de la habitación.

José pinta $\frac{1}{8}$ de la habitación.

David y José juntos pintan $\frac{1}{x}$ de la habitación.

Como la suma de las partes que realizan por separado debe ser igual a la parte del trabajo que realizan trabajando juntos, entonces se tiene la siguiente ecuación:

Scanned by CamScanner

$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{1}{x}$	Planteo de la ecuación.
$4x+3x=24$	m.c.m. entre 6, 8 y x es $24x$.
$7x=24$	Reducción de términos semejantes.
$x=\frac{24}{7}$	Despejando x.
$x=3\frac{3}{7}$	Expresando x como número mixto.

Análisis de la solución obtenida:

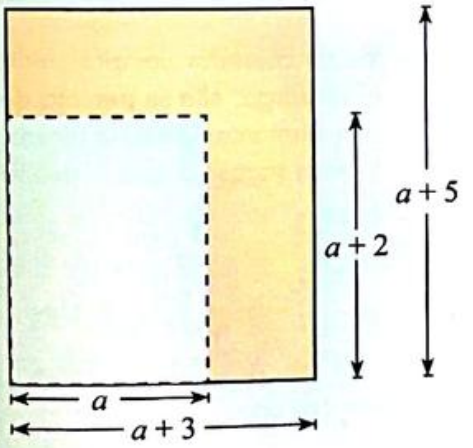
Trabajando juntos, David y José demoran $3\frac{3}{7}$ horas en pintar la habitación.

Ejemplo 3.88 Problema de planteo de ecuaciones.

El largo de un rectángulo excede a su ancho en 2 pies. Si cada dimensión fuese incrementada en 3 pies, el área se incrementaría en 51 pies^2. Determine las dimensiones iniciales y finales del rectángulo.

Solución:

Se tienen dos situaciones diferentes, las cuales se pueden representar así:



Ancho 1: a
Ancho 2: $a+3$

Largo 1: $a+2$
Largo 2: $(a+2)+3=a+5$

Área 1 $= a(a+2)$
Área 2 $= a(a+2)+51$

Por condición del problema:

$$\begin{aligned} a(a+2)+51 &= (a+3)(a+5) \\ a^2+2a+51 &= a^2+8a+15 \\ -6a &= -36 \\ 6a &= 36 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

Dimensiones:

Ancho 1: $a = 6$ pies

Largo 1: $a + 2 = 6 + 2 = 8$ pies

Ancho 2: $a + 3 = 6 + 3 = 9$ pies

Largo 2: $a + 2 + 3 = a + 5 = 6 + 5 = 11$ pies

Se puede comprobar que: Área 2 = Área 1 + 51.

Ejemplo 3.89 Problema de planteo de ecuaciones.

La suma de dos cifras de un número entero positivo es 9. Si al invertir el orden de las cifras se obtiene un segundo número que excede en 9 al cuádruplo del número original, determine el número original.

Solución:

Sea u la cifra de las unidades y d la cifra de las decenas.
Según las condiciones del problema, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} u + d = 9 \\ 10u + d = 4(10d + u) + 9 \end{cases}$$

Al despejar una de las variables en la primera ecuación y reemplazarla en la segunda ecuación, se obtiene $u = 8$, $d = 1$. Por lo tanto, el número es 18.

Análisis de la solución obtenida:

La suma de las cifras 1 y 8 efectivamente es 9; al invertir el número se obtiene 81, el cual excede en 9 unidades al número $72 = 4\,(18)$, es decir $81 = 4\,(18) + 9$.

Ejemplo 3.90 Problema de planteo de ecuaciones.

Para la preparación del menú semanal, la dueña de un comedor compró cierto número de sacos de papas por un total de $240; sin embargo, ella se percata de que si hubiera comprado tres sacos adicionales, por la misma cantidad de dinero, cada saco le habría costado $4 menos. Determine cuántos sacos compró la dueña del comedor y su precio unitario.

Solución:

Sean: x: cantidad de sacos.
y: precio de cada saco.

Se plantea la ecuación para el total pagado por los sacos comprados:
$xy = 240;\ x > 0$ e $y > 0$ (I)

Según la condición dada en el problema, se cumple que:
$(x + 3)(y - 4) = 240$ (II)

Relacionando (I) y (II), se obtiene:
$\left(\frac{240}{y} + 3\right)(y - 4) = 240$

Scanned by CamScanner

Luego, resolviendo la ecuación:

$(240 + 3y)(y - 4) = 240\,y$
$240y - 960 + 3y^2 - 12y = 240y$
$3y^2 - 12y - 960 = 0$
$y^2 - 4y - 320 = 0$
$(y - 20)(y + 16) = 0$

Con lo cual: $(y = 20) \vee (y = -16)$

Dado que $(y > 0)$, entonces el precio de cada saco está dado por \$20.

Finalmente, a partir de (I), se puede obtener la cantidad de sacos comprados:

$x = \frac{240}{y} = \frac{240}{20} = 12$, es decir, 12 sacos.

A partir de estos resultados, se establece que la dueña compró 12 sacos de papas por un precio unitario de \$20.

Ejemplo 3.91 Problema de planteo de ecuaciones.

Hace 4 años, la edad de Hernán era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 2 años. Determine la edad actual de Hernán.

Solución:

x:	edad actual de Hernán.
$x - 4$:	edad de Hernán hace 4 años.
$x + 2$:	edad de Hernán dentro de 2 años.

Según las condiciones del problema, se puede plantear la siguiente ecuación:

$x - 4 = \sqrt{x + 2}$	Planteo de la ecuación.
$x^2 - 8x + 16 = x + 2$	Elevando al cuadrado.
$x^2 - 9x + 14 = 0$	Simplificación.
$(x - 7)(x - 2) = 0$	Descomposición en factores.
$(x - 7 = 0) \vee (x - 2 = 0)$	Propiedad de números reales.
$(x = 7) \vee (x = 2)$	Soluciones.

Análisis de las soluciones obtenidas:

La respuesta $x = 2$ no tiene validez en el contexto del problema. La respuesta $x = 7$ significa que hace 4 años, Hernán tenía 3 años y dicho valor es la raíz cuadrada de 9, que es la edad que él tendrá dentro de 2 años. Luego, la edad actual de Hernán es 7 años.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.92 Problema de planteo de ecuaciones.

Danilo tiene cierta cantidad de dinero. Si comprara 10 lápices, le sobrarían $10. Si comprara 4 cuadernos, le sobrarían $20. Pero si comprara 4 lápices y 3 cuadernos, le sobrarían $10.

Determine la cantidad de dinero que tiene Danilo y el costo de cada lápiz y cada cuaderno.

Solución:

Sean las incógnitas:

x: costo de cada lápiz.

y: costo de cada cuaderno.

Según las condiciones del problema, la cantidad de dinero que tiene Danilo se puede expresar de tres formas diferentes:

$$\underbrace{10x + 10}_{\text{Compra de lápices}} = \underbrace{4y + 20}_{\text{Compra de cuadernos}} = \underbrace{4x + 3y + 10}_{\text{Compra de lápices y cuadernos}}$$

$$\text{(I)} \qquad\qquad \text{(II)} \qquad\qquad \text{(III)}$$

Se plantea una ecuación con las expresiones (I) y (III):

$$10x + 10 = 4x + 3y + 10$$
$$6x - 3y = 0$$

Se plantea otra ecuación con las expresiones (II) y (III):

$$4y + 20 = 4x + 3y + 10$$
$$4x - y = 10$$

Despejamos y de la segunda ecuación:

$$y = 4x - 10$$

Y luego reemplazando en la primera ecuación, para resolverla:

$$6x - 3(4x - 10) = 0$$
$$6x - 12x + 30 = 0$$
$$-6x = -30$$
$$x = 5$$

Volviendo a la expresión de y:

$$y = 4(5) - 10$$
$$y = 10$$

El costo de cada lápiz es de $5. El costo de cada cuaderno es de $10. La cantidad de dinero que tiene Danilo es de: $4x + 3y + 10 = \$60$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.93 Problema de planteo de ecuaciones.

Una inversionista con \$70 000 decide colocar parte de su dinero en un banco que paga 12% anual, y el resto en otro banco que paga 8% anual. Si ella desea obtener una ganancia total del 9% anual, ¿cuánto debe colocar en cada inversión?

Solución:

La pregunta planteada es acerca de dos cantidades de dinero: el capital a invertir al 12% y el capital a invertir al 8%.

Sea x: cantidad en dólares que será invertida al 12%.
$70\,000 - x$: cantidad en dólares que será invertida al 8%.

Se puede construir la siguiente tabla:

Capital (\$)	Tasa	Tiempo (años)	Interés (\$)
x	$12\% = 0.12$	1	$0.12\,x$
$70\,000 - x$	$8\% = 0.08$	1	$0.08\,(70\,000 - x)$
70 000	$9\% = 0.09$	1	$0.09\,(70\,000) = 6\,300$

Ya que el interés total de las inversiones es igual a $0.09(70\,000) = 6\,300$, debemos plantear la ecuación:

$$0.12x + 0.08\,(70\,000 - x) = 6\,300$$

Con lo cual se deduce que:

$$x = 17\,500$$

Por lo tanto, la inversionista debe colocar:
\$17 500 al 12%; y,
\$70 000 – \$17 500 = \$52 500 al 8%.

Finalmente, comprobamos la respuesta:

El interés en el primer banco después de un año es $(0.12)(17\,500) = \$2\,100$.
El interés en el segundo banco después de un año es $(0.08)(52\,500) = \$4\,200$.
El interés anual total asciende a \$6 300, que es la cantidad requerida y es la suma de los intereses que se obtendría al invertir el capital en cada banco.

Scanned by CamScanner

1) Explique con sus propias palabras la diferencia entre una ecuación y una identidad.

2) Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa y justifique su respuesta.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (xy = 4) \rightarrow [\,(x = 4) \vee (y = 4)]$$

3) Dado el conjunto $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

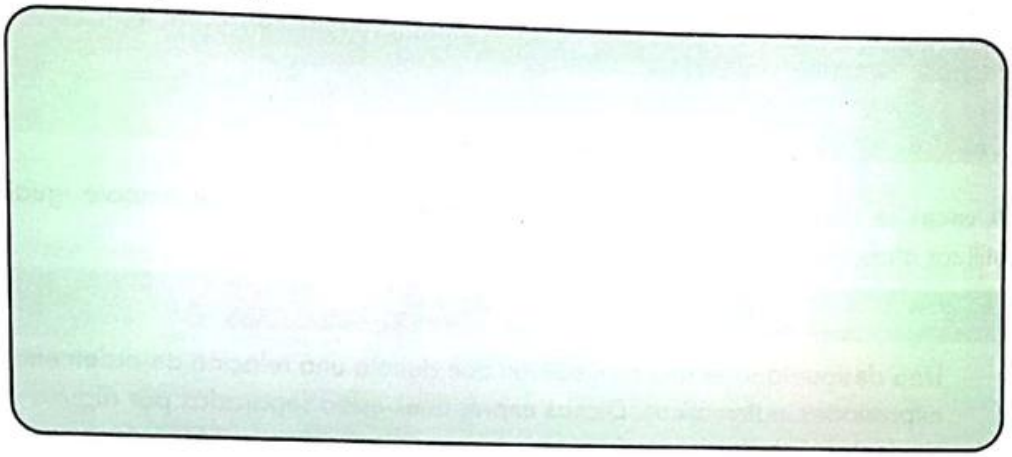
a) $p(x)$: $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{x}{6} - 5$

b) $q(x)$: $x(x-3) - 2\left(\frac{3}{2} - x\right) = (1+x)\,x - x^2$

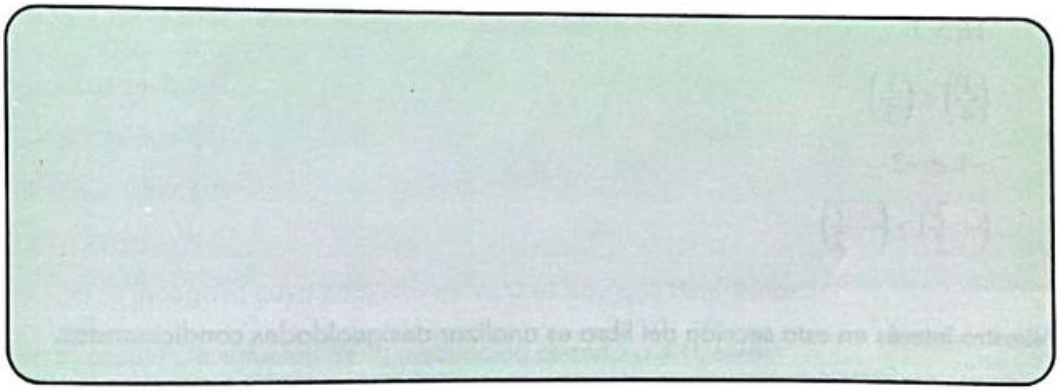
c) $s(x)$: $\sqrt[3]{\sqrt{2-x} - 1} = 1$

Scanned by CamScanner

d) $t(x) : |x - 2| = 1 - 2x$

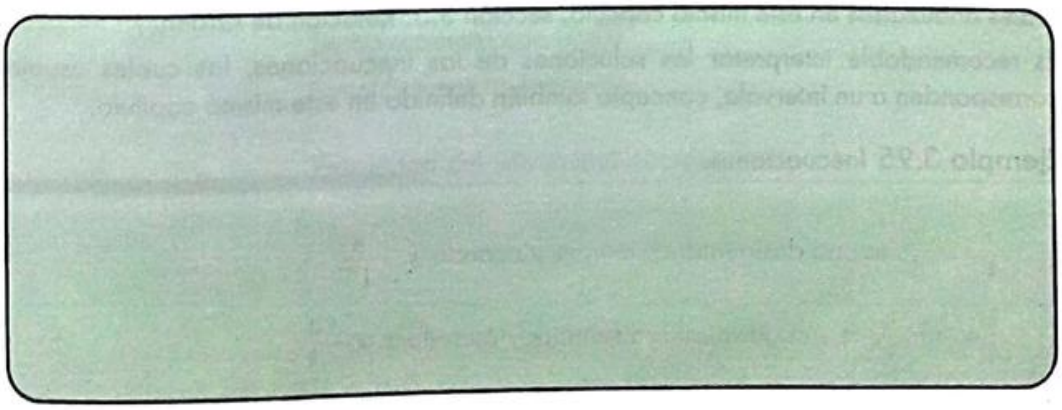


4) Determine los posibles valores del número natural m, para que la ecuación cuadrática $2x^2 + mx + 2 = 0$ tenga solución única.



5) Resuelva el siguiente problema:

Un grupo de amigos deben repartirse cierta cantidad de dinero. La primera vez que lo intentan, se reparten \$8 por persona y les sobra \$4. En un segundo intento, se reparten \$9 cada uno pero ahora les falta \$3. Determine la cantidad de dinero a repartirse.



Scanned by CamScanner

3.11 Inecuaciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar con sus propias palabras la diferencia entre inecuación y desigualdad.
- Realizar demostraciones aplicando propiedades de las desigualdades.
- Resolver inecuaciones de tipo lineal, cuadrática y con valor absoluto.
- Plantear y resolver problemas basados en inecuaciones.

A veces se dan condiciones en las que, en lugar de aparecer el símbolo igual, hay que utilizar otros símbolos denominados de desigualdad.

Definición 3.16 (Desigualdad)

Una desigualdad es una proposición que denota una relación de orden entre dos expresiones matemáticas. Dichas expresiones están separadas por alguno de los siguientes símbolos: $>, <, \leq, \geq$.

Ejemplo 3.94 Desigualdades.

$16 > 7$

$\left(\frac{1}{4}\right) < \left(\frac{1}{3}\right)$

$-1 \geq -2$

$\left(-\frac{3}{2}\right) \geq \left(-\frac{7}{2}\right)$

Nuestro interés en esta sección del libro es analizar desigualdades condicionadas.

Definición 3.17 (Inecuación)

Una inecuación es una desigualdad condicionada y resolverla significa determinar todos los elementos del conjunto referencial que la satisfacen.

La resolución de una inecuación involucra la aplicación de las propiedades de los números reales analizadas en este mismo capítulo, sección 3.5: Relación de Orden.

Es recomendable interpretar las soluciones de las inecuaciones, las cuales usualmente corresponden a un intervalo, concepto también definido en este mismo capítulo.

Ejemplo 3.95 Inecuaciones.

$\frac{3}{4}x > \frac{2}{5}$, es una desigualdad siempre y cuando $x > \frac{8}{15}$.

$\frac{1}{4}x > -\frac{1}{3}$, es una desigualdad siempre y cuando $x > -\frac{4}{3}$.

Scanned by CamScanner

$2x+2 \geq x-1$, es una desigualdad siempre y cuando $x \geq -3$.

$x-\frac{3}{2} \leq \frac{x}{3}-7$, es una desigualdad siempre y cuando $x \leq -\frac{33}{4}$.

$x^2 < 0$ es una desigualdad que no la satisface número real alguno.

Una inecuación puede representarse como un predicado $p(x)$, cuyo conjunto referencial es el conjunto de los números reales, a no ser que se especifique otro conjunto. La(s) solución(es) de dicha inecuación conforma(n) su conjunto de verdad $Ap(x)$.

Por lo tanto, podemos tener inecuaciones: lineales, cuadráticas, con valor absoluto, en forma similar a la sección anterior.

3.11.1 Inecuaciones lineales

Una inecuación lineal es aquella que puede representarse con un predicado definido en el conjunto de los reales, mediante uno de los siguientes casos:

1. $p(x)$: $ax+b>0$
2. $p(x)$: $ax+b<0$
3. $p(x)$: $ax+b \geq 0$
4. $p(x)$: $ax+b \leq 0$

$a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

donde x es la incógnita cuyo conjunto de valores hay que determinar.

En el caso 1, la solución de la inecuación cuando $a \neq 0$, será:

$ax+b>0$	Consideramos la expresión original.
$ax+b-b>0-b$	Sumamos el inverso aditivo de b a ambos miembros.
$ax+0>-b$	Reducimos la expresión.
$ax>-b$	Propiedad del neutro aditivo.
$\left(\frac{1}{a}\right)ax>\left(\frac{1}{a}\right)(-b)$	Efectuamos el producto con el inverso multiplicativo de a. Se ha supuesto que $a>0$.
$(1)(x)>-\frac{b}{a}$	Simplificamos la expresión.
$x>-\frac{b}{a}$	Propiedad del neutro multiplicativo.

En el caso 1: $Ap(x)=\left(-\frac{b}{a},+\infty\right)$ cuando $a>0$

En el caso 2: $Ap(x)=\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right)$ cuando $a>0$

Scanned by CamScanner

En el caso 3: $Ap(x) = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ cuando $a > 0$

En el caso 4: $Ap(x) = \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$ cuando $a > 0$

Nótese que si $a < 0$, al multiplicar la desigualdad por $\frac{1}{a}$, la inecuación cambia la relación de orden y los intervalos obtenidos hubiesen sido $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$, $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$, y $\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$, respectivamente.

Ejemplo 3.96 Inecuaciones lineales.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y el predicado $p(x)$: $4x + 3 \geq 12x - 13$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$4x - 12x \geq -3 - 13$	Se suman los inversos aditivos de 3 y $12x$.
$-8x \geq -16$	Reducimos la expresión.
$x \leq 2$	Multiplicamos por el inverso multiplicativo de -8.

Con lo cual $Ap(x) = (-\infty, 2]$.

Ejemplo 3.97 Inecuaciones lineales.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $\frac{1}{3}(3x - 2) < \frac{x}{8} + 2$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$x - \frac{2}{3} < \frac{x}{8} + 2$	Desarrollamos el producto indicado.
$24x - 16 < 3x + 48$	m.c.m. entre 3 y 8 es 24.
$21x < 64$	Simplificamos la expresión.
$x < \frac{64}{21}$	Despejamos la incógnita x.

De donde, $Ap(x) = \left\{x / x \in \left(-\infty, \frac{64}{21}\right)\right\}$.

3.11.2 Inecuaciones cuadráticas

Una inecuación cuadrática es aquella que puede ser reducida a un predicado definido en el conjunto de los números reales, mediante uno de los siguientes casos:

1. $p(x) : ax^2 + bx + c > 0$
2. $p(x) : ax^2 + bx + c < 0$
3. $p(x) : ax^2 + bx + c \geq 0$
4. $p(x) : ax^2 + bx + c \leq 0$

$a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

donde x es la incógnita cuyo valor hay que determinar.

Scanned by CamScanner

En algunos casos, se pueden obtener las soluciones de una inecuación cuadrática mediante descomposición en factores o mediante la fórmula general.

El objetivo es expresar la inecuación en función de un producto de dos factores y luego separarlos en dos inecuaciones lineales. Para el efecto, debemos recordar las siguientes reglas:

- Un producto de dos factores es positivo si ambos factores poseen signos iguales.
- Un producto de dos factores es negativo si ambos factores poseen signos diferentes.

Estas propiedades de las desigualdades pueden resumirse en la siguiente tabla:

1.	$\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy > 0) \equiv [(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)]$
2.	$\forall x, y \in \mathbb{R}, (xy < 0) \equiv [(x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0)]$

Cuadro 3.5: Propiedades de las desigualdades.

En el caso 1, la solución de la inecuación sería:

$(x - x_1)(x - x_2) > 0$

$[(x - x_1 > 0) \wedge (x - x_2 > 0)] \vee [(x - x_1 < 0) \wedge (x - x_2 < 0)]$

En este punto se puede observar que tenemos cuatro inecuaciones lineales, las cuales pueden ser resueltas con el método indicado en la subsección anterior. Debe recordarse que la conjunción de predicados involucra la intersección entre sus conjuntos de verdad; y, la disyunción de predicados involucra la unión de sus conjuntos de verdad.

Si las inecuaciones tienen los símbolos $\leq$ o $\geq$, al resolver la inecuación lineal se debe incluir el extremo del intervalo en las desigualdades precedentes.

En resumen, las inecuaciones cuadráticas pueden resolverse utilizando dos métodos. El primero consiste en la aplicación de propiedades de desigualdades, como ya se mencionó previamente, mientras que el segundo involucra la determinación de valores críticos, tal como se observará en los ejemplos 3.98 y 3.99, respectivamente.

Ejemplo 3.98 Inecuaciones cuadráticas.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : x^2 - x - 2 \geq 0$, determine $Ap(x)$.

Solución:

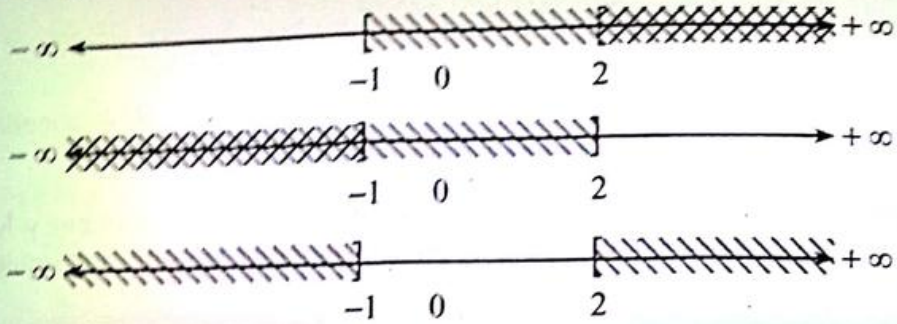
$(x - 2)(x + 1) \geq 0$

$[(x - 2 \geq 0) \wedge (x + 1 \geq 0)] \vee [(x - 2 \leq 0) \wedge (x + 1 \leq 0)]$

$[(x \geq 2) \wedge (x \geq -1)] \vee [(x \leq 2) \wedge (x \leq -1)]$

Scanned by CamScanner

Al representar gráficamente en la recta real:



Con lo cual, $Ap(x) = \{x/x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)\}$.

Ejemplo 3.99 Inecuaciones cuadráticas.

Sea $Rc = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 2} < 0$, determine $(Ap(x))^c$.

Solución:

Descomponiendo en factores el numerador del miembro de la izquierda, tenemos: $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x-2}$ de donde se obtienen los valores críticos, al igualar a cero cada factor; es decir: $x = 3, x = -2$ y $x = 2$.

En la siguiente tabla se analizan los intervalos, sin incluir los valores críticos y se aplica la Ley de los Signos de la multiplicación y de la división.

Intervalo:	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x-2}$	$\dfrac{(-)(-)}{(-)} = -$	$\dfrac{(-)(+)}{(-)} = +$	$\dfrac{(-)(+)}{(+)} = -$	$\dfrac{(+)(+)}{(+)} = +$
Solución:	$(-\infty, -2)$	$\varnothing$	$(2, 3)$	$\varnothing$

De la tabla anterior se obtiene $Ap(x) = (-\infty, -2) \cup (2, 3)$.
Por lo tanto, $(Ap(x))^c = [-2, 2] \cup [3, +\infty)$.

3.11.3 Inecuaciones con valor absoluto

Para resolver este tipo de inecuaciones se pueden aplicar propiedades directas del valor absoluto, las cuales se deducen a continuación.

Considere los siguientes predicados:

1. $p(x)$: $|x| < a, a \geq 0$

Aplicando la definición del valor absoluto:

$$[(x < a) \wedge (x \geq 0)] \vee [(-x < a) \wedge (x < 0)]$$

$$[(x < a) \wedge (x \geq 0)] \vee [(x > -a) \wedge (x < 0)]$$

Scanned by CamScanner

Podemos observar en la recta numérica, que:

$[0 \leq x < a] \vee [-a < x < 0]$

Por lo tanto, $Ap(x) = \{x / -a < x < a\}$.

2. $p(x)$: $|x| > a, a \geq 0$

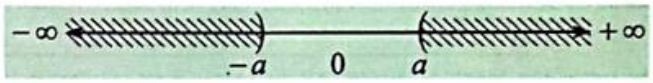
Aplicando la definición del valor absoluto:

$$[(x > a) \wedge (x \geq 0)] \vee [(-x > a) \wedge (x < 0)]$$

$$[(x > a) \wedge (x \geq 0)] \vee [(x < -a) \wedge (x < 0)]$$

Podemos observar en la recta numérica que:

$[(x > a) \vee (x < -a)]$



Por lo tanto, $Ap(x) = \{x / (x > a) \vee (x < -a)\}$.

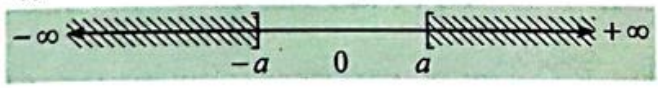
Se puede generalizar para los casos:

3. $p(x)$: $|x| \leq a, a \geq 0$

$Ap(x) = \{x / -a \leq x \leq a\}$

4. $p(x)$: $|x| \geq a, a \geq 0$

$Ap(x) = \{x / (x \geq a) \vee (x \leq -a)\}$



Si $a < 0$:

1. $p(x)$: $|x| < a$

Como el valor absoluto de un número no puede ser negativo, la inecuación no tiene solución.

2. $p(x)$: $|x| > a$

Un valor absoluto siempre es mayor que un número negativo, por lo cual, la inecuación tiene como solución el conjunto de los números reales.

Scanned by CamScanner

Expresiones como $|x| \geq 0$, $|x| \leq 0$, $|x| > 0$ y $|x| < 0$, se resuelven empleando las propiedades del valor absoluto. El lector puede verificar que la solución de estas inecuaciones es $\mathbb{R}$, $\{0\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$ y $\varnothing$, respectivamente.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $|x - a| \leq b$

$$-b \leq x - a \leq b$$

$$a - b \leq x \leq a + b$$

$$Ap(x) = [a - b, a + b]$$

Ejemplo 3.100 Inecuaciones con valor absoluto.

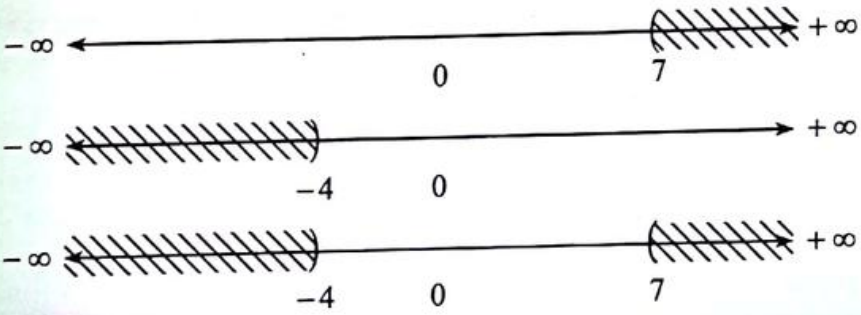
Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $|2x - 3| > 11$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$[(2x - 3) > 11] \vee [(2x - 3) < -11]$ Propiedades del valor absoluto.

$(2x > 14) \vee (2x < -8)$ Simplificamos la expresión.

$(x > 7) \vee (x < -4)$ Despejamos la incógnita.



De donde $Ap(x) = \{x / (x < -4) \vee (x > 7)\}$.

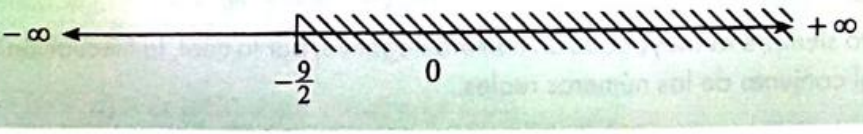
Ejemplo 3.101 Inecuaciones con valor absoluto.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $|x + 2| \leq \frac{5}{2}$, determine $Ap(x)$.

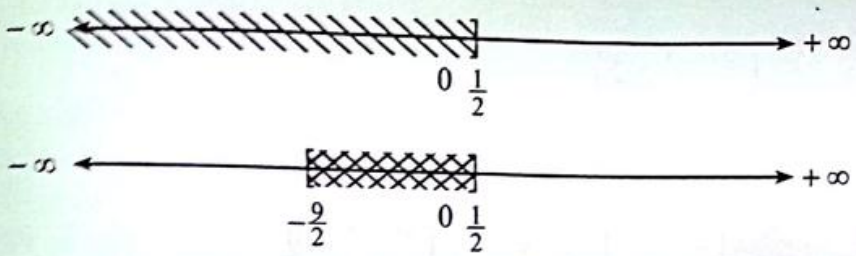
Solución:

$-\frac{5}{2} \leq x + 2 \leq \frac{5}{2}$ Propiedades del valor absoluto.

$-\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ Simplificamos la expresión y despejamos la incógnita.



Scanned by CamScanner



Por lo tanto, $Ap(x) = \left\{x / -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$.

Ejemplo 3.102 Inecuaciones con valor absoluto.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $||2x + 1| - 5x| \leq -2$, determine $Ap(x)$.

Solución:

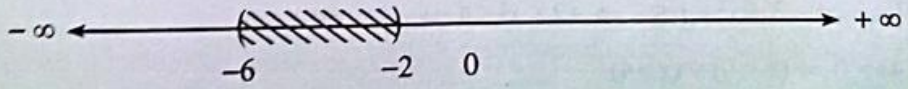
En este caso no hay necesidad de resolver la expresión, ya que $Ap(x) = \varnothing$.

Ejemplo 3.103 Inecuaciones con valor absoluto.

Sea $Re = \mathbb{R}$, $p(x)$: $|x + 4| < 2$ y $q(x)$: $|x| \geq 3$, determine $Ap(x) \cap Aq(x)$.

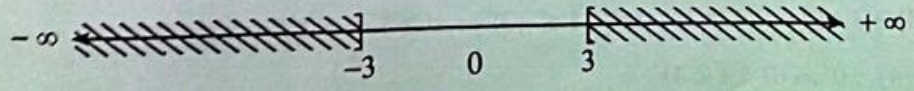
Solución:

$|x + 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x + 4 < 2 \Leftrightarrow -6 < x < -2$



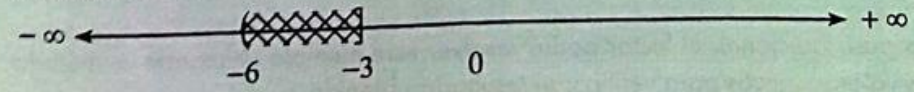
$Ap(x) = (-6,-2)$

$|x| \geq 3 \Leftrightarrow (x \geq 3) \vee (x \leq -3)$



$Aq(x) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

Intersecando los conjuntos de verdad obtenidos, se tiene:



Luego, $Ap(x) \cap Aq(x) = (-6, -3]$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.104 Inecuaciones con valor absoluto.

Sea Re = ℝ, determine el conjunto de verdad del predicado:

$$p(x): \left|\frac{2x-1}{x}\right| > 2$$

Solución:

$$\left(\frac{2x-1}{x} > 2\right) \quad \vee \quad \left(\frac{2x-1}{x} < -2\right)$$

$$\left(\frac{2x-1}{x} - 2 > 0\right) \quad \vee \quad \left(\frac{2x-1}{x} + 2 < 0\right)$$

$$\left(\frac{-1}{x} > 0\right) \quad \vee \quad \left(\frac{4x-1}{x} < 0\right)$$

$$\left(x < 0\right) \quad \vee \quad \left(0 < x < \frac{1}{4}\right)$$

Por lo tanto, $Ap(x) = (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Ejemplo 3.105 Inecuaciones cuadráticas con valor absoluto.

Sea Re = ℝ, determine el conjunto de verdad del predicado:

$$p(x): \frac{|x^2-1|-3}{x^2-4x} \leq 0$$

Solución:

$$\frac{|x^2-1|-3}{x^2-4x} \leq 0 \equiv \overbrace{[(|x^2-1|-3 \leq 0) \wedge (x^2-4x) > 0)]}^{\text{Caso 1}} \vee \overbrace{[(|x^2-1|-3 \geq 0) \wedge (x^2-4x) < 0)]}^{\text{Caso 2}}$$

Caso 1:

$|x^2-1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x^2-1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

$x(x-4) > 0 \Rightarrow (x < 0) \vee (x > 4)$

Entonces, la primera parte de la solución sería: $-2 \leq x < 0$

Caso 2:

$|x^2-1| \geq 3 \Rightarrow (x^2-1 \geq 3) \vee (x^2-1 \leq -3) \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2 \vee x \leq -2$

$x(x-4) < 0 \Rightarrow (0 < x < 4)$

Entonces, la segunda parte de la solución sería: $2 \leq x < 4$.

Por lo tanto, $Ap(x) = [-2, 0) \cup [2, 4)$.

Como paso adicional, el lector podrá resolver este ejemplo utilizando el método de los valores críticos para verificar el resultado obtenido.

Scanned by CamScanner

3.11.4 Planteo de inecuaciones

Para interpretar problemas que involucran plantear inecuaciones, debemos tomar en cuenta las siguientes equivalencias:

- Las expresiones del tipo: al menos, por lo menos, como mínimo, cuanto menos, se traducen con la relación $\geq$.
- Las expresiones del tipo: a lo más, cuanto mucho, como máximo, a lo sumo, se traducen con la relación $\leq$.

El resto del planteamiento es similar al que se indicó para las ecuaciones.

Ejemplo 3.106 Problema de planteo de inecuaciones.

Jenny quiere invertir \$50 000. Ella puede escoger el banco A que ofrece un interés anual del 8%, o con un mayor riesgo, escoger el banco B que ofrece un interés anual del 10%.

¿Qué cantidad mínima deberá invertir en el banco B, de modo que reciba una rentabilidad anual total de al menos \$4 400?

Solución:

x: cantidad en dólares invertida en el banco B.
$50\,000 - x$: cantidad en dólares invertida en el banco A.

Según la condición del problema:

Rentabilidad en banco B (al 10%) + rentabilidad en banco A (al 8%) $\geq 4\,400$.

$$0.1x + 0.08\,(50\,000 - x) \geq 4\,400$$

$$0.1x + 4\,000 - 0.08x \geq 4\,400$$

$$0.02x \geq 400$$

$$x \geq 20\,000$$

Análisis de la solución obtenida:

Jenny debe invertir al menos \$20 000 en el banco B para obtener la rentabilidad deseada.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.107 Problema de planteo de inecuaciones.

El propietario de un edificio de departamentos puede alquilar todas las 50 habitaciones si el alquiler mensual es de \$120 por departamento. Por cada incremento de \$5 en la mensualidad del alquiler, un departamento quedará vacante sin posibilidad alguna de alquilarse.

¿Cuál es el valor máximo de alquiler que deberá fijarse para obtener un ingreso mensual de al menos \$6 000?

Solución:

x: número de incrementos de \$5.
Ingresos: (precio de la habitación)(número de habitaciones).

El ingreso mensual viene dado por:

$$I = (120 + 5x)(50 - x)$$

Debe cumplirse que los ingresos superen los \$6 000, así:

$$(120 + 5x)(50 - x) \geq 6\,000$$

$$6\,000 - 120x + 250x - 5x^2 \geq 6\,000$$

$$-5x^2 + 130x \geq 0$$

$$x^2 - 26x \leq 0$$

$$x(x - 26) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 26$$

Análisis de la solución obtenida:

El valor máximo que debe fijarse es $120 + 5(26) = \$250$; para este caso el ingreso será $I = (250)(50 - 26) = \$6\,000$.

En el instante en que el valor del alquiler se incremente a \$255, el ingreso sería: $I = (255)(50 - 27) = \$5\,865$, que es un valor menor a las expectativas del propietario del edificio.

Scanned by CamScanner

3.11 Inecuaciones

Autoevaluación

1) Escriba la palabra que hace falta en cada recuadro:

Una inecuación es una _____ _____ y resolverla significa determinar todos los elementos del _____ _____ que la satisfacen.

2) Las inecuaciones son muy comunes en la vida diaria. Escriba 4 frases que incluyan inecuaciones de manera implícita.

3) Sea el conjunto referencial $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$, determine el conjunto $A^C p(x)$ si se conoce que $p(x) : \frac{2x+1}{3} \leq \frac{4x+3}{2} - \frac{1}{3}$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.107 Problema de planteo de inecuaciones.

El propietario de un edificio de departamentos puede alquilar todas las 50 habitaciones si el alquiler mensual es de $120 por departamento. Por cada incremento de $5 en la mensualidad del alquiler, un departamento quedará vacante sin posibilidad alguna de alquilarse.

¿Cuál es el valor máximo de alquiler que deberá fijarse para obtener un ingreso mensual de al menos $6 000?

Solución:

x: número de incrementos de $5.
Ingresos: (precio de la habitación)(número de habitaciones).

El ingreso mensual viene dado por:

$$I = (120 + 5x)(50 - x)$$

Debe cumplirse que los ingresos superen los $6 000, así:

$$(120 + 5x)(50 - x) \geq 6\,000$$

$$6\,000 - 120x + 250x - 5x^2 \geq 6\,000$$

$$-5x^2 + 130x \geq 0$$

$$x^2 - 26x \leq 0$$

$$x(x - 26) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 26$$

Análisis de la solución obtenida:

El valor máximo que debe fijarse es $120 + 5(26) = \$250$; para este caso el ingreso será $I = (250)(50 - 26) = \$6\,000$.

En el instante en que el valor del alquiler se incremente a $255, el ingreso sería: $I = (255)(50 - 27) = \$5\,865$, que es un valor menor a las expectativas del propietario del edificio.

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

3.11 Inecuaciones

Autoevaluación

1) Escriba la palabra que hace falta en cada recuadro:

Una inecuación es una _____ _____ y resolverla significa determinar todos los elementos del _____ _____ que la satisfacen.

2) Las inecuaciones son muy comunes en la vida diaria. Escriba 4 frases que incluyan inecuaciones de manera implícita.

3) Sea el conjunto referencial Re = $\mathbb{R}$, determine el conjunto $A^C p(x)$ si se conoce que $p(x) : \frac{2x+1}{3} \leq \frac{4x+3}{2} - \frac{1}{3}$

Scanned by CamScanner

4) Dado el conjunto $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y el predicado $q(x)$: $x^2 - 8x \leq 20$, determine $Aq(x)$.

5) Resuelva el siguiente problema de aplicación:

Esperanza quiere construir un tablero rectangular de un material muy especial, pero costoso. Sus dimensiones deben ser de 50 *cm* de ancho y largo no menor a 70 *cm*. Además, cada 35 centímetros cuadrados del material cuestan $2. ¿Entre qué valores puede escoger ella para el largo del tablero, si no quiere gastar más de $300?

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

3.12 Inducción Matemática

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar con sus propias palabras los axiomas de Peano.
- Dada una propiedad de los números naturales, demostrarla aplicando el teorema de inducción.

Cuando se quiere demostrar propiedades, se puede considerar que de la certeza de una proposición general se puede pasar a la certeza de las correspondientes proposiciones particulares, y, al revés, de la certeza de una o varias proposiciones particulares se puede pasar a la certeza de la correspondiente proposición general o generalización. El primer caso conlleva a un proceso de razonamiento lógico que se denomina deducción o proceso deductivo, mientras que el segundo caso se conoce como proceso inductivo o inducción.

Si decimos que: "Todos los números enteros pares son divisibles por 2", estamos exponiendo una proposición general, a partir de la cual se puede particularizar, por ejemplo, la proposición: "El número 124 es divisible por 2".

Si por ejemplo, aceptamos como cierta la proposición general de que: "Todos los alemanes son rubios", la veracidad de la afirmación correspondiente a la particularización: "Helmut es alemán y por consiguiente es rubio" es un proceso de deducción. Evidentemente, la certeza depende de que sea cierta la proposición general de la que se ha partido. En cambio, el proceso contrario, en el que partiríamos de la veracidad de la proposición: "Helmut es alemán y rubio", no nos permitiría afirmar la veracidad de la proposición general: "Todos los alemanes son rubios", pero tampoco negarla.

En esta sección veremos que mediante la Inducción Matemática es posible demostrar propiedades de los números naturales a partir de unos postulados denominados Axiomas de Peano.

3.12.1 Axiomas de Peano

El conjunto de los números naturales puede ser construido a partir de cinco axiomas o postulados propuestos por el matemático italiano Peano.

- 1 es natural.
- Si n es un número natural, entonces $n + 1$ también es un número natural (denominado el sucesor de n).
- 1 no es sucesor de número natural alguno, ya que es el primer elemento del conjunto.

Scanned by CamScanner

- Si los sucesores de dos números naturales n y m son iguales, entonces n y m son números naturales iguales.
- Si un conjunto de números contiene al 1 y a los sucesores de cada uno de sus elementos, entonces contiene a todos los números naturales.

Este último postulado se conoce como Axioma de Inducción, y permite probar resultados con los números naturales, generalizando situaciones particulares.

3.12.2 Teorema de inducción

Si en efecto logramos evidenciar que una propiedad que se verifica para un número natural n se verifica para su sucesor o número siguiente $n + 1$, cualquiera que sea n, entonces podemos afirmar que tal propiedad se verifica desde e incluyendo n hasta el infinito. Si sabemos, además, que se verifica para el primero de los números naturales, que no es sucesor de ningún otro, entonces hay que concluir que la propiedad se verifica para todo elemento de $\mathbb{N}$.

Es decir, para probar que una propiedad se cumple en todos los números naturales, basta comprobar primero que se cumple para el 1 y a continuación, suponer que se cumple para un natural n, y a partir de esta suposición, deducir que se ha de cumplir para el natural siguiente $n+1$.

Teorema 3.2 (Teorema de inducción)

Si $p(n)$ es una propiedad sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, tal que:

$p(1) \equiv 1$ (Caso base)

$\forall n\,[\,p(n) \Rightarrow p(n+1)]$ (Paso inductivo)

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}\ p(n) \equiv 1$, es decir, $Ap(n) = \mathbb{N}$

Ejemplo 3.108 Demostración utilizando el teorema de inducción.

Demostrar que para todo número natural n se cumple la siguiente propiedad:

$$p(n)\colon 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

Solución:

1) $p(1)$: $1 = (1)^2$

$1 = 1 \quad \therefore \quad p(1) \equiv 1$

2) p.d. $\forall n[\,p(n) \Rightarrow p(n+1)]$

Hipótesis: $p(n)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

Tesis: $p(n+1)$: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$

Scanned by CamScanner

$$\overbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2}^{p(n)}$$
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+[2(n+1)-1]=n^2+[2(n+1)-1]$$
$$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)$$
$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2}_{p(n+1)}$$
$$\therefore\ \forall n[\,p(n)\Rightarrow p(n+1)]\equiv 1$$

Ejemplo 3.109 Demostración utilizando el teorema de inducción.

Demostrar que para todo número natural n se cumple la siguiente propiedad:

$$q(n):\ 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solución:

1) $q(1):\ 1^2=\dfrac{(1)(1+1)(2(1)+1)}{6}$

$$1^2=\frac{(1)(2)(3)}{6}$$
$$1=1 \qquad \therefore \qquad q(1)\equiv 1$$

2) p.d. $\quad \forall n[\,q(n)\Rightarrow q(n+1)]$

Hipótesis: $q(n)$: $\quad 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Tesis: $\quad q(n+1)$: $\quad 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\overbrace{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}^{q(n)}$$
$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$=\frac{(n+1)}{6}[n(2n+1)+6(n+1)]$$
$$=\frac{(n+1)}{6}[2n^2+7n+6]$$
$$=\frac{(n+1)}{6}\,\frac{[(2n+4)(2n+3)]}{2}$$
$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}_{q(n+1)}$$
$$\therefore\ \forall n[\,q(n)\Rightarrow q(n+1)]\equiv 1$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.110 Demostración utilizando el teorema de inducción.

Demostrar que para todo número natural n si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, se cumple la siguiente propiedad:

$$r(n): a^n < b^n$$

Solución:

1) $r(1): a^1 < b^1 \equiv a < b$

Esto es verdad por condición del problema. $\therefore \quad r(1) \equiv 1$

2) p.d. $\quad \forall n[r(n) \Rightarrow r(n+1)]$

Hipótesis: $\quad a^n < b^n$

Tesis: $\quad a^{n+1} < b^{n+1}$

Supóngase que:

$$\overbrace{a^n < b^n}^{r(n)}$$

Si multiplicamos la desigualdad $a^n < b^n$ por la cantidad positiva a:

$$a^n a < b^n a$$

Como $b > 0$, $b^n > 0$, si multiplicamos la desigualdad $a < b$ por la cantidad positiva b^n:

$$b^n a < b^n b$$

Como $(a^n a < b^n a) \wedge (b^n a < b^n b)$, por transitividad se cumple que:

$$a^n a < b^n b$$

$$\underbrace{a^{n+1} < b^{n+1}}_{r(n+1)}$$

$$\therefore \forall n[r(n) \Rightarrow r(n+1)] \equiv 1$$

Ejemplo 3.111 Demostración utilizando el teorema de inducción.

Utilizando el principio de INDUCCIÓN MATEMÁTICA, demuestre de ser posible, que $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumple la siguiente propiedad:

$$p(n): 6^{2n} - 1 \text{ es divisible para } 35$$

Solución:

1) $p(1): 6^{2(1)} - 1$ es divisible para 35

$p(1)$: 35 es divisible para 35 $\quad \therefore \quad p(1) \equiv 1$

Scanned by CamScanner

2) p.d. $\forall n[p(n) \Rightarrow p(n+1)]$
Hipótesis: $p(n)$: $6^{2n}-1$ es divisible para 35
Tesis: $p(n+1)$: $6^{2(n+1)}-1$ es divisible para 35

Como $6^{2n}-1$ es divisible para 35, entonces $\exists\, k \in \mathbb{Z} / 6^{2n}-1 = 35k$

$6^{2(n+1)}-1 = 6^{2n}\,6^2-1$	Manipulación algebraica del exponente
$6^{2(n+1)}-1 = 6^{2n}\,6^2-6^2+6^2-1$	Suma y resta del término 6^2
$6^{2(n+1)}-1 = 6^2(6^{2n}-1)+6^2-1$	Factor común
$6^{2(n+1)}-1 = 6^2(35k)+35$	Por hipótesis, $6^{2n}-1$ es divisible para 35
$6^{2(n+1)}-1 = 35(36k+1)$	Factor común
$6^{2(n+1)}-1 = 35p$	$\exists\, p \in \mathbb{Z} / 6^{2(n+1)}-1 = 35p$ Tómese $p = 36k+1$
$6^{2(n+1)}-1$ es divisible para 35	$\forall n\,[p(n) \Rightarrow p(n+1)] \equiv 1$

El método de inducción matemática tiene una particular aplicabilidad en la geometría plana y del espacio.

La aplicación más común de este método en la geometría plana es la construcción de figuras geométricas de n elementos a partir de la figura análoga elemental, mediante la generalización correspondiente.

El proceso inductivo también es muy utilizado en la determinación de lugares geométricos o en la generalización de un número de dimensiones para obtener figuras análogas en mayor número de dimensiones, como por ejemplo, el paso de la circunferencia a la esfera.

Scanned by CamScanner

1) Cite y explique dos axiomas de Peano que considere de especial importancia.

2) $\forall n \in \mathbf{N}$, demuestre por INDUCCIÓN MATEMÁTICA, la siguiente propiedad:

$$p(n): 2^n \geq 2n$$

Scanned by CamScanner

3) En ocasiones se explica el teorema de inducción matemática como una reacción en cadena. Proponga una manera diferente para explicar este teorema.

4) Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa, justificando adecuadamente su respuesta:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ se cumple que: } 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-2^{1-n}$$

Scanned by CamScanner

3.13 Técnicas de Conteo

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dado un número entero no negativo, calcular su factorial.
- Aplicar los principios básicos aditivo y multiplicativo.
- Calcular combinaciones y permutaciones a partir de dos números enteros no negativos.
- Resolver un problema de la vida cotidiana, aplicando técnicas de conteo.

Suponga que se encuentra al final de una línea de ensamblaje de un producto y que un supervisor le ordena contar los elementos de un lote que se ha manufacturado hace unas horas y del que se desconoce el número de productos que lo constituyen; de inmediato, usted empezará a contar un producto tras otro y al final informará al supervisor que son 48, 54 u otro número cualquiera. Ahora suponga que ese mismo supervisor le plantea la siguiente pregunta: ¿Cuántas muestras o grupos será posible formar con los productos del lote, si las muestras o grupos a formar son de ocho elementos cada una de ellas?

En el primer caso, el cuantificar los elementos del lote no presenta dificultad alguna para la persona encargada de hacerlo, pero cuando se le hace el segundo planteamiento, al tratar de formar las muestras o grupos de ocho elementos, la persona encargada empezará a tener dificultad para hacerlo; en casos como este es necesario hacer uso de las técnicas de conteo para cuantificar los elementos del evento en cuestión (el número de muestras posibles a formar de ocho elementos).

Para poder analizar esta nueva sección, necesitamos definir previamente el factorial de un número.

Definición 3.18 (Factorial)

Sea n un entero no negativo, su factorial se calcula de la siguiente manera:

$$n! = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ n(n-1)! & ; n \geq 1 \end{cases}$$

A este esquema de definición se lo denomina **recursivo**. La recursión es la forma en la cual se especifica un proceso basado en su propia definición.

Ejemplo 3.112 Factorial.

Al calcular el valor de 5! se obtiene:

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \\ 5! &= 120 \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

Una de las aplicaciones del factorial, se presenta en el siguiente ejemplo:

¿Cuántas ordenaciones pueden hacerse en un mazo de 52 cartas?, ese número es 52!. Puede parecer sorprendente lo extremadamente grande que es este número, alrededor de $8.065817517094 \times 10^{67}$.

Esta cifra es mayor que la representada por un 8 seguido de 67 ceros. Comparando ese número con otros números enormes, es mayor que el cuadrado del número de Avogadro, 6.022×10^{23}, el número de átomos o moléculas, etc., que hay en una mol y está en el mismo orden de magnitud que el número de átomos en la Vía Láctea.

Las técnicas de conteo son aquellas que se usan para enumerar eventos no tan fáciles de cuantificar. Por ejemplo:

- En un aula hay 15, 20 y 18 alumnos de las Ingenierías de Minas y Petróleo, Industrial y Electrónica. Bajo las siguientes condiciones, ¿cuántas representaciones de once alumnos pueden formarse?
  a) Si se desea que éstas consten sólo de alumnos de Ingeniería en Minas y Petróleo.
  b) Si se desea que el presidente sea un alumno de Ingeniería Industrial.
  c) Si se desea que el presidente y tesorero sean alumnos de Ingeniería Electrónica.
- ¿De cuántas maneras puede una persona seleccionar una lavadora, una batidora y dos licuadoras, si encuentra en una tienda 8 modelos diferentes de lavadoras, 5 modelos diferentes de batidoras y 7 modelos diferentes de licuadoras?

Se les denomina técnicas de conteo a las permutaciones y combinaciones, las cuales se explicarán más adelante. Hay que destacar que éstas nos proporcionan la información de todas las maneras posibles en que ocurre un evento determinado.

Las bases para entender el uso de las técnicas de conteo son el principio aditivo y multiplicativo, los mismos que a continuación se definen y se ilustran en los ejemplos correspondientes.

3.13.1 Principio de la Suma (Aditivo)

Supongamos que un evento A se puede realizar de m maneras diferentes, y otro evento B se puede realizar de n maneras diferentes, además, no es posible que ambos eventos se realicen juntos ($A \cap B = \varnothing$), entonces el evento A o el evento B se realizarán de $(m + n)$ maneras diferentes.

Ejemplo 3.113 Principio Aditivo.

Un repuesto de automóvil se vende en 6 locales de Guayaquil y en 8 locales de Quito. Si la adquisición de repuestos puede hacerse en Guayaquil o en Quito. ¿De cuántas formas se puede adquirir el repuesto?

Scanned by CamScanner

Solución:

Por el principio aditivo, el repuesto puede ser adquirido en: Guayaquil o Quito, de donde existen:
6 formas + 8 formas = 14 formas.

Ejemplo 3.114 Principio Aditivo.

Un paquete de software tiene 3 opciones de menú, si la primera tiene 10 subopciones, la segunda tiene 15 subopciones y la tercera tiene 12 subopciones, ¿de cuántas maneras diferentes puede elegir el usuario una subopción?

Solución:

Por el principio aditivo, se puede notar que el usuario solamente puede elegir una subopción a la vez:

10 maneras + 15 maneras + 12 maneras = 37 maneras.

3.13.2 Principio de la Multiplicación (Multiplicativo)

Si un evento A puede ocurrir en forma independiente de m maneras diferentes y otro evento B de n maneras diferentes, entonces el número de maneras distintas en que pueden suceder ambos eventos es $m \cdot n$.

Ejemplo 3.115 Principio Multiplicativo.

En un día determinado, nueve amigos: Evelyn, Janett, Yajaira, Laura, Verónica, Christian, Jimmy, Gabriel, y David, deciden ir a ver una película al cine; al momento de ingresar a la sala, ellos se ponen de acuerdo para sentarse de forma alternada, de tal manera que al lado de una chica siempre se encuentre un chico. ¿De cuántas formas posibles pueden sentarse estos amigos cumpliendo aquella condición?

Solución:

Si M representa una chica y H representa un chico, entonces se ubicarían de la siguiente forma:

M H M H M H M H M
(5) (4) (4) (3) (3) (2) (2) (1) (1) = 5! x 4! = 2 880

Por lo tanto, los 9 amigos pueden sentarse de 2 880 formas diferentes.

Ejemplo 3.116 Principio Multiplicativo.

Ana y María observaron la placa de un carro, donde viajaban dos hombres sospechosos de un robo. Al ser interrogadas por la policía, dieron la siguiente información acerca de la placa (que constaba de tres letras seguidas de cuatro dígitos):

Scanned by CamScanner

María estaba segura de que la segunda letra de la placa era una O o una Q, y que el último dígito era un 3 o un 8; Ana dijo que la primera letra de la placa era una G y que la tercera letra era definitivamente una vocal.

Determine la cantidad de placas diferentes que la policía debe verificar.

Solución:

La placa deberá tener una secuencia de caracteres de la forma

X	X	X	#	#	#	#

Siendo X alguna letra del alfabeto español y # algún dígito entre 0 y 9.

El primer caracter X, es la letra G	$\Rightarrow$	1 posibilidad.
El segundo caracter X, es O o Q	$\Rightarrow$	2 posibilidades.
El tercer caracter X, sería A, E, I, O, U	$\Rightarrow$	5 posibilidades.
El primer número	$\Rightarrow$	10 posibilidades.
El segundo número	$\Rightarrow$	10 posibilidades.
El tercer número	$\Rightarrow$	10 posibilidades.
El cuarto número, es 3 u 8	$\Rightarrow$	2 posibilidades.

Por el principio multiplicativo:

$$\begin{array}{c} \text{Letras} \cdot \text{Dígitos} \\ (1)\,(2)\,(5) \cdot (10)\,(10)\,(10)\,(2) \end{array}$$

La cantidad de placas que la policía debe verificar es: 20 000.

3.13.3 Permutaciones y combinaciones

Para ver de una manera objetiva la diferencia entre una combinación y una permutación, plantearemos la siguiente situación.

Suponga que un salón de clase está constituido por 35 alumnos.

- El maestro desea que se nombre a tres representantes del salón (presidente, secretario y tesorero).

  Suponga que se han nombrado como representantes del salón a Daniel como presidente, a Arturo como secretario y a Rafael como tesorero, pero resulta que a alguien se le ocurre hacer algunos cambios, los cuales se muestran a continuación:

PRESIDENTE:	Daniel	Arturo	Rafael	Daniel	Arturo	Rafael
SECRETARIO:	Arturo	Daniel	Daniel	Rafael	Rafael	Arturo
TESORERO:	Rafael	Rafael	Arturo	Arturo	Daniel	Daniel

Scanned by CamScanner

Ahora tenemos seis arreglos, ¿se trata de la misma representación?

La respuesta sería no, ya que el cambio de responsabilidades que se hace a los integrantes de la representación original, hace que definitivamente cada una de las representaciones trabaje de manera diferente. ¿Importa el orden de los elementos en los arreglos? La respuesta definitivamente sería sí. Luego, las representaciones antes definidas son diferentes, ya que el orden o la forma en que se asignan las funciones sí importa, por lo tanto, en este caso estamos tratando con **permutaciones**.

- El maestro desea que tres de los alumnos lo ayuden en actividades tales como entregar material a los alumnos cuando así sea necesario.

  Suponga que por unanimidad se ha elegido a Daniel, Arturo y a Rafael para entregar material (aunque pudieron haber seleccionado a Rafael, Daniel y Arturo, o pudo haberse formado cualquier grupo de tres personas para realizar las actividades mencionadas anteriormente). ¿Es importante el orden en el cual se selecciona a los elementos que forma el grupo de tres personas?

  Reflexionando al respecto nos damos cuenta de que el orden en este caso no tiene importancia, ya que lo único que nos interesaría es el contenido de cada grupo, dicho de otra forma, sólo interesa quiénes están en el grupo y no qué orden tienen en el grupo. Por lo tanto, este ejemplo es una **combinación**.

  De acuerdo a esto, se puede concluir que la diferencia sustancial entre la permutación y la combinación de los elementos de un conjunto es el orden de los elementos al formar los grupos o muestras requeridos.

Definición 3.19 (Permutaciones)

Una permutación es un arreglo de todos o parte de un conjunto de objetos, considerando el orden en su ubicación. El número de permutaciones posibles de n objetos tomando m de ellos a la vez, se simboliza como P_m^n y se lo calcula así:

$$P_m^n = \frac{n!}{(n-m)!},\ n \geq m$$

Es importante resaltar que el orden es una característica importante en la permutación, cuando variamos el orden de los elementos se dice que permutamos dichos elementos.

Ejemplo 3.117 Permutaciones.

En una carrera participan 10 atletas. ¿De cuántas formas distintas podrán ser premiados los tres primeros lugares con medalla de oro, plata y bronce?

Solución:

Se busca las diferentes ternas ($m = 3$) que se pueden formar con los 10 atletas ($n = 10$).

$$P_3^{10} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

Por lo tanto, a los 3 primeros lugares se los puede premiar de 720 formas distintas.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.118 Permutaciones.

¿De cuántas maneras diferentes pueden colocarse cinco libros de historia, cuatro de literatura y seis de matemáticas, si los de la misma materia deben estar juntos?

Solución:

Los libros de historia pueden permutarse así:

$$P_5^5 = \frac{5!}{0!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Los libros de literatura pueden permutarse así:

$$P_4^4 = \frac{4!}{0!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Los libros de matemáticas pueden permutarse así:

$$P_6^6 = \frac{6!}{0!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

Por el principio multiplicativo:

$$P_5^5 \cdot P_4^4 \cdot P_6^6 = (120)(24)(720) = 2\,073\,600$$

Pero, debe considerarse que el orden anterior se da cuando se colocan primero los libros de historia; luego, los libros de literatura y finalmente, los libros de matemáticas.

Debe recordarse que también se pueden colocar en diferente orden.

$$P_3^3 = \frac{3!}{0!} = 3 \times 2 = 6 \text{ posibilidades.}$$

Este último valor representa las posibilidades para colocar los libros en orden: HLM, HML, LMH, LHM, MHL, MLH.

Por lo tanto, este último valor hay que multiplicarlo por el valor previo, con lo cual existen 12 441 600 maneras diferentes de colocar los libros.

Definición 3.20 (Combinaciones)

Una combinación es cada uno de los diferentes arreglos que se pueden hacer con parte o todos los elementos de un conjunto dado, sin considerar el orden en su ubicación. El número de combinaciones posibles de n objetos tomando m de ellos a la vez, se puede simbolizar como $C_m^n, \binom{n}{m}, C(n,m)$ o ${}_nC_m$ y se calcula así:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad n \geq m$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.119 Combinaciones.

Al calcular el valor de C_6^{10} se obtiene:

$$C_6^{10} = \frac{10!}{6!(10-6)!}$$

$$= \frac{10!}{6!\,4!}$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_6^{10} = 210$$

Propiedades de las Combinaciones

1) $\forall n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\} \left[\binom{n}{n} = 1\right]$

2) $\forall n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\} \left[\binom{n}{0} = 1\right]$

3) $\forall n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}\ \forall (1 \le i \le n) \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}\right]$

A continuación demostraremos la tercera propiedad:

$$\forall n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}\ \forall (1 \le i \le n) \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}\right]$$

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} + \frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!}$$

$$= n! \left[\frac{n - \cancel{i} + 1 + \cancel{i}}{i!(n-i+1)!}\right]$$

$$= n! \left[\frac{n+1}{i!(n-i+1)!}\right]$$

$$= \frac{(n+1)!}{i!((n+1)-i)!}$$

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.120 Combinaciones.

Un soda bar tiene 3 tipos de frutas: durazno, sandía y piña. ¿Cuántos sabores diferentes de jugo se podrán preparar, si se pueden mezclar las frutas?

Método 1: Analizando opciones
Cuando se escoge una fruta de las tres, el número de opciones para preparar el jugo es 3: D, S, P.

Cuando se escogen 2 de las tres frutas, el número de opciones es 3: DS, DP, SP.
Cuando se escogen las 3 frutas a la vez, se obtiene una única opción: DSP.
Total de sabores diferentes: $3 + 3 + 1 = 7$.

Método 2: Empleando combinaciones
Se puede escoger o una fruta de las tres, o dos frutas de las tres, o las tres frutas a la vez, además, en este caso no importa el orden, por lo tanto, usamos el principio aditivo aplicado a la combinación:

$$\#\text{ maneras diferentes} = C_1^3 + C_2^3 + C_3^3$$

$$\#\text{ maneras diferentes} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} + \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{3!}{3! \cdot 0!}$$

Total de sabores diferentes: $3 + 3 + 1 = 7$.

Como se puede verificar, los resultados son iguales. Para problemas de mayor número de combinaciones es preferible emplear la expresión de la definición 3.20.

Ejemplo 3.121 Combinaciones.

Para un examen de Matemáticas un estudiante debe desarrollar ocho de un total de diez preguntas. ¿De cuántas formas puede desarrollar el examen?, si para completar las ocho preguntas podría:

a) Elegir cinco de las primeras seis preguntas y tres de las cuatro últimas preguntas.
b) Elegir las seis primeras preguntas.

Solución:

a) Si debe desarrollar cinco de las seis primeras preguntas, el número de opciones estará dado por:

$$C_5^6 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{6(5!)}{5!(1!)} = 6 \text{ formas}$$

Scanned by CamScanner

Si debe desarrollar tres de las cuatro últimas preguntas, el número de opciones estará dado por:

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4(3!)}{3!(1!)} = 4 \text{ formas}$$

Dado que el examen debe ser desarrollado completamente en el mismo instante, aplicando principio multiplicativo, se tiene:

Total de opciones $= C_5^6 \cdot C_3^4 = (6)(4) = 24$ formas

Luego, el estudiante cuenta con 24 formas diferentes para desarrollar el examen.

b) Elegir las seis primeras preguntas:
Si debe desarrollar las seis primeras preguntas, tendrá que escoger entre las cuatro últimas preguntas las dos que le hacen falta para completar las ocho preguntas, así el número de opciones estará dado por:

$$C_6^6 = \frac{6!}{6!(0!)} = 1 \text{ forma}$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(2!)} = 6 \text{ formas}$$

Total de opciones $= C_6^6 \cdot C_2^4 = (1)(6) = 6$ formas

Siendo así, el estudiante cuenta con 6 formas diferentes para desarrollar el examen.

Ejemplo 3.122 Combinaciones.

Se necesita constituir un grupo mixto de vigilancia formado por 2 hombres y 3 mujeres, para lo cual se dispone de 12 oficiales hombres y 8 oficiales mujeres; determine el número de grupos diferentes que se pueden formar.

Solución:

Para constituir el grupo de hombres:

$$C_2^{12} = \frac{12!}{2!(10!)} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 10!} = 66$$

Para constituir el grupo de mujeres:

$$C_3^8 = \frac{8!}{3!(5!)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 5!} = 56$$

Para constituir el grupo mixto, debemos utilizar el principio multiplicativo:

$$(66)\,(56) = 3\,696$$

El número de grupos diferentes que se pueden formar es 3 696.

En la mayoría de las calculadoras se encuentran disponibles las teclas con las cuales se pueden obtener los resultados de permutaciones y combinaciones de forma ágil.

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

3.13 Técnicas de Conteo

Autoevaluación

1) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

a) $\frac{10!}{7!\,3!\,0!} < 120$

b) $\forall n \in \mathbf{N}\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)(n-1)!} = n\right]$

2) Una con líneas según corresponda.

Considere que $m, n \in \mathbf{N} \wedge n \geq m$. Además que existen los eventos independientes A y B.

a) Permutaciones	$\frac{n!}{(n-m)!}$
b) Combinaciones	Ocurrencia de A o de B
c) Principio Aditivo	Ocurrencia de A y de B
d) Principio Multiplicativo	$\frac{n!}{m!(n-m)!}$

3) Sea $n \in \mathbf{N} \wedge n > 3$, considere el predicado $p(n)$: $C_3^n = P_2^n$ y determine $\mathrm{N}(\mathrm{A}p(n))$.

Scanned by CamScanner

4) Explique de manera breve y con ejemplos prácticos, por qué razón se cumple lo siguiente:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \quad \left[\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1\right]$$

5) Resuelva los siguientes problemas de aplicación.

a) Para un juego de indor fútbol se dispone de un total de 10 jugadores (entre titulares y suplentes). Si el equipo se conforma con 6 jugadores titulares, ¿cuál es la cantidad de equipos titulares diferentes que se puede conformar?

b) ¿De cuántas formas diferentes podrían sentarse en una misma fila de asientos, 2 ecuatorianos, 3 colombianos y 4 venezolanos, si deben sentarse juntos quienes tienen la misma nacionalidad?

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

3.14 Binomio de Newton

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Obtener el desarrollo de un binomio.
- Dada la posición de un término en el desarrollo de un binomio, obtener dicho término.
- Dadas las condiciones sobre un término en el desarrollo de un binomio, identificar su posición y otros elementos.

El Teorema del binomio fue descubierto por Newton y comunicado por primera vez en 1676 a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society que favorecía los intercambios de correspondencia entre los científicos de su época. Newton presenta el enunciado de su teorema y un ejemplo que lo ilustra, y menciona ejemplos conocidos en los cuales se aplica. Este teorema proporciona la expansión de las potencias de un binomio, pero él nunca lo publicó. Lo hizo Wallis por primera vez en 1685, atribuyendo a Newton este descubrimiento.

Teorema 3.3 (Teorema del binomio)

El desarrollo del binomio $(a+b)^n$, está dado por:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

donde $n \in \mathbf{N}$; $a, b \in \mathbf{R}$.

En este desarrollo, el término general tiene la forma:

$$\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

donde:

n: Exponente del binomio.
i: Posición del término en el desarrollo del binomio disminuido en 1.
a, b: Términos del binomio.

Los coeficientes del binomio corresponden a los elementos de cada fila del Triángulo de Pascal. A continuación, se muestran las primeras cinco filas:

$n=0$				1				
$n=1$			1		1			
$n=2$		1		2		1		
$n=3$	1		3		3		1	
$n=4$	1		4		6		4	1

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.123 Binomio de Newton.

Establezca el término central en el desarrollo de: $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^{12}$

Solución:

Como $n = 12$, entonces la cantidad de términos es 13 y el término central es el séptimo, con lo que $i = 6$.

El séptimo término tendrá la forma:

$$\binom{12}{6}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{12-6}\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^{6}$$

$$\binom{12}{6}x^2y^2$$

Calculando: $$\binom{12}{6}=\frac{12!}{6!\,6!}$$

$$=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\binom{12}{6}=924$$

Así, el séptimo término sería: $924\,x^2y^2$

Ejemplo 3.124 Binomio de Newton.

De ser posible, estructure el término que no contiene la variable y en el desarrollo del binomio:

$$\left(2xy^2-\frac{1}{2y}\right)^9$$

Solución:

Los datos especificados en el binomio de Newton son:

$$a=2xy^2 \qquad b=-\frac{1}{2y} \qquad n=9 \qquad i=?$$

El término general para el desarrollo de este binomio es:

$$\binom{9}{i}\left(2xy^2\right)^{9-i}\left(-\frac{1}{2y}\right)^{i}$$

Este término no debe contener a la variable y, que es semejante a decir que se encuentra elevada al exponente cero. Del término general, solamente se considera para plantear la ecuación:

$$\left(y^2\right)^{9-i}\left(\frac{1}{y}\right)^{i}=y^0 \Rightarrow \frac{y^{2(9-i)}}{y^i}=y^0 \Rightarrow y^{18-2i-i}=y^0 \Rightarrow y^{18-3i}=y^0$$

Scanned by CamScanner

Se igualan los exponentes:

$$18 - 3i = 0 \quad \Rightarrow \quad 3i = 18 \quad \Rightarrow \quad i = 6$$

Entonces, el término que no contiene la variable y en el desarrollo del binomio es el séptimo.

Séptimo término:

$$\binom{9}{6}(2xy^2)^{9-6}\left(-\frac{1}{2y}\right)^6 = \frac{9!}{6!(9-6)!}(2xy^2)^3\frac{1}{(2y)^6}$$

$$\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0!}\,8\left(x^3\cancel{y^6}\right)\left(\frac{1}{64\cancel{y^6}}\right) = \frac{21}{2}x^3$$

Ejemplo 3.125 Binomio de Newton.

Determine el valor de $n \in \mathbb{N}$ para que el coeficiente del cuarto término en el desarrollo del binomio $\left(a^2 + \frac{2b^3}{n}\right)^6$ sea un número entero.

Solución:

El cuarto término del desarrollo de dicho binomio es: $\binom{6}{3}\left(a^2\right)^3\left(\frac{2b^3}{n}\right)^3$.

El coeficiente de dicho término es: $\frac{6!}{3!\,(3!)}\cdot\frac{8}{n^3} = \frac{2^5\cdot 5}{n^3}$.

El número n, tal que dicho coeficiente sea entero, puede ser $n = 1$ o $n = 2$.

Ejemplo 3.126 Binomio de Newton.

Determine el valor que debe darse a x para que el quinto término del desarrollo del binomio $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^x$ contenga la décima potencia de a.

Solución:

El quinto término vendrá dado por: $\binom{x}{4}\left(a^2\right)^{x-4}\left(\frac{1}{a^2}\right)^4$.

Debemos hacer que $\left(a^2\right)^{x-4}\left(\frac{1}{a^2}\right)^4 = a^{10}$.

Esto es: $2x - 16 = 10$.

De donde se obtiene $x = 13$.

Scanned by CamScanner

1) Determine el valor de:

$$\binom{100}{0}5^{100} - \binom{100}{1}5^{99}\cdot 4 + \binom{100}{2}5^{98}\cdot 4^2 - \ldots - \binom{100}{99}5\cdot 4^{99} + \binom{100}{100}4^{100}$$

2) Determine el noveno término en el desarrollo del binomio $(2x-y)^{11}$.

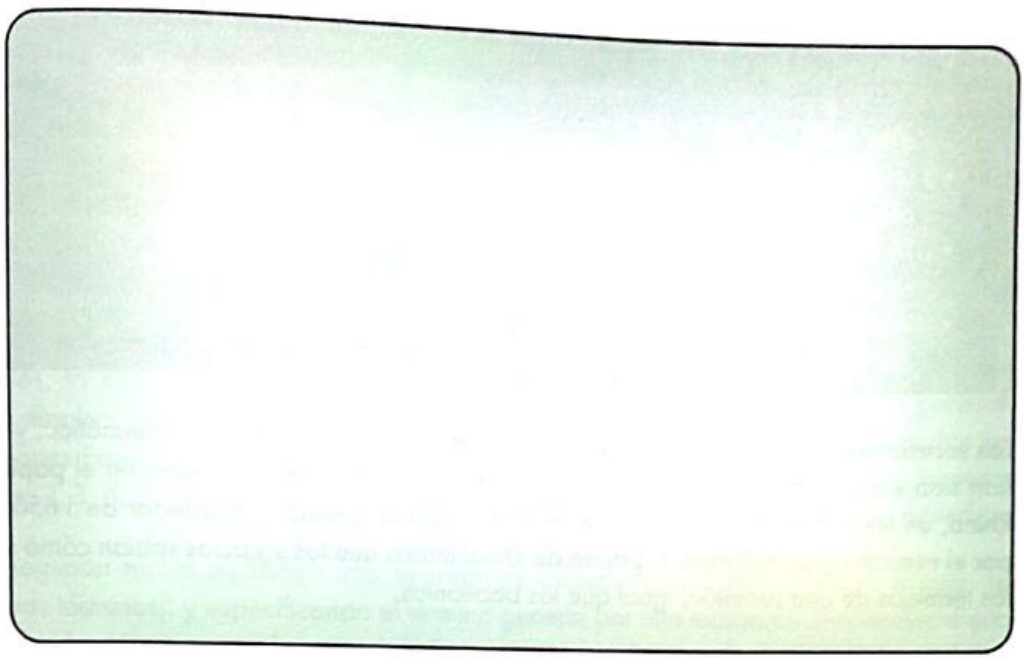
3) Utilizando el teorema del binomio, desarrolle la siguiente expresión:

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}y^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

Scanned by CamScanner

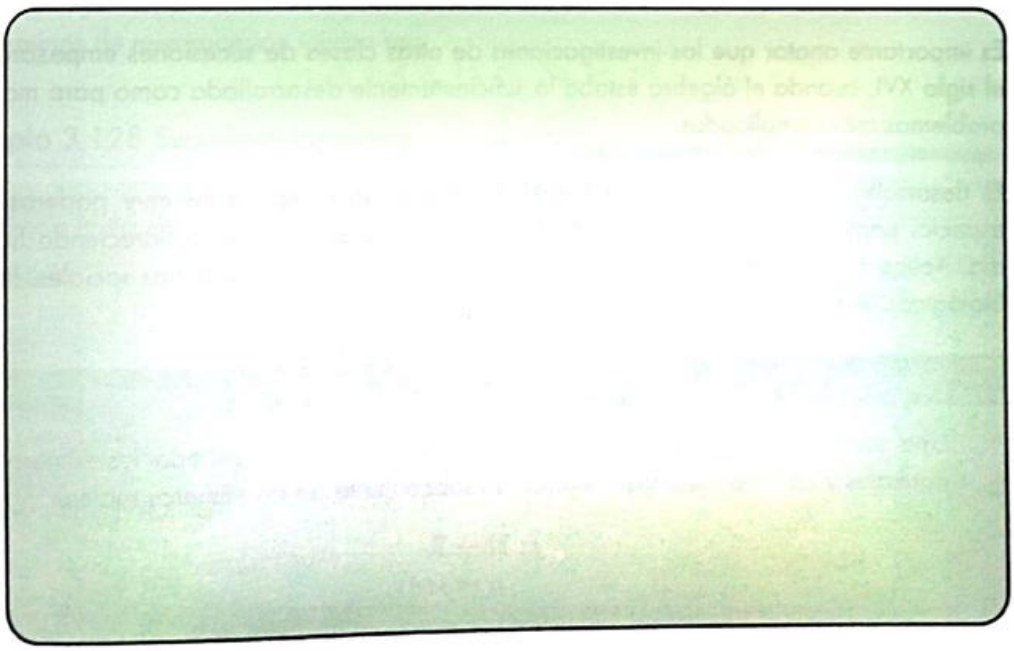
4) Determine el coeficiente del término que contiene x^9 en el desarrollo del binomio:

$$\left(\frac{2}{x^2}-\frac{x^3}{2}\right)^8 ; x \neq 0$$



5) Calcule, de ser posible, el término independiente de la variable x en el desarrollo del binomio.

$$\left(\frac{x^2}{15}-\frac{\sqrt{5}}{x}\right)^6 ; x \neq 0$$



Scanned by CamScanner

3.15 Sucesiones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar con sus propias palabras el concepto de sucesión como una función de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{R}$.
- Aplicar la definición de sucesión recursiva para el cálculo de términos de una sucesión.
- Reconocer los elementos de una progresión aritmética y geométrica.
- Dada una progresión aritmética o geométrica, determinar algunos de sus elementos.
- Dada una progresión aritmética o geométrica, calcular la suma de los n primeros términos de la progresión.
- Dadas las condiciones de una progresión aritmética o geométrica, determinar algunos de sus elementos.
- Aplicar progresiones aritméticas o geométricas a la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Las sucesiones se cuentan entre los temas más antiguos de investigación matemática, ya que han sido estudiadas durante más de 3500 años. Las sucesiones aparecen en el papiro de Rhind, un texto matemático que contiene 85 problemas copiados alrededor de 1650 a.C., por el escriba egipcio Ahmes. El papiro de Rhind indica que los egipcios sabían cómo sumar los términos de una sucesión, igual que los babilonios.

Problema histórico: La siguiente es una rima antigua para niños que se parece a los problemas del papiro de Rhind: "Cuando iba a San Ives, encontré a un hombre con siete esposas. Cada esposa llevaba siete costales. Cada costal tenía siete gatos. Cada gato tenía siete gatitos. Gatitos, gatos, costales y esposas. ¿Cuántos iban a San Ives?". Para contestar esta pregunta será necesario realizar cálculos de manera más sencilla empleando sucesiones y los conceptos asociados.

Es importante anotar que las investigaciones de otras clases de sucesiones empezaron en el siglo XVI, cuando el álgebra estaba lo suficientemente desarrollada como para manejar problemas más complicados.

El desarrollo del cálculo, en el siglo XVII, añadió un componente muy poderoso, en especial para determinar la suma de series infinitas; y el tema sigue floreciendo hoy en día. Aplicaciones de estos temas se encuentran en los campos de ciencias sociales, físicas, biológicas, económicas, computacionales e ingenieriles.

Definición 3.21 (Sucesión)

Una sucesión es una función que tiene como conjunto de partida los números naturales y como conjunto de llegada un subconjunto de los números reales.

$$\begin{aligned} f: \mathbf{N} &\mapsto \mathbf{R} \\ n &\mapsto f(n) \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

Si *dom f* está formado por una cantidad finita de elementos, la sucesión es **finita**; caso contrario, se denomina sucesión **infinita**.

Ejemplo 3.127 Sucesiones.

En cada caso considere $dom\, f = \mathbf{N}$.

$f(n) = \frac{1}{n}$ Los términos serían $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

$f(n) = (n-2)^2$ Los términos serían $1, 0, 1, 4, 9, 16, \ldots$

$f(n) = \frac{n}{n+1}$ Los términos serían $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

Algunas veces una sucesión se caracteriza por un patrón observado en los primeros términos, lo cual hace posible inferir la forma del n-ésimo término o término general. Dicho término puede expresarse de varias formas: $f(n), f_n, a_n$. Sin embargo, no todas las sucesiones tienen término general. Por ejemplo, en la importante sucesión de los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... no hay expresión alguna para el término general.

Una segunda forma de definir una sucesión es asignando un valor al primer término (o primeros términos), y especificando el término general por una expresión que involucre uno o más de los términos que le preceden. En este caso, se dice que la sucesión está dada en forma **recursiva** y su n-ésimo término está definido en función del anterior o de algunos anteriores.

La sucesión de Fibonacci, por ejemplo, está dada por:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ con } f_1 = 1 \text{ y } f_2 = 1, n \geq 3$$

Los términos de esta sucesión infinita son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Ejemplo 3.128 Sucesiones recursivas.

Dada la siguiente sucesión: $a_n = 2(a_{n-1} - 3)$ siendo $a_1 = 5$, determine: a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

Solución:

$a_2 = 2(a_1 - 3) = 2(5 - 3) = 4$

$a_3 = 2(a_2 - 3) = 2(4 - 3) = 2$

$a_4 = 2(a_3 - 3) = 2(2 - 3) = -2$

$a_5 = 2(a_4 - 3) = 2(-2 - 3) = -10$

$a_6 = 2(a_5 - 3) = 2(-10 - 3) = -26$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.129 Sucesiones recursivas.

Dada la siguiente sucesión: $a_n = 3a_{n-1}$, con $a_1 = \frac{2}{3}$, determine: a_2, a_3, a_4 y a_5.

Solución:

$$a_2 = 3a_1 = 3\left(\frac{2}{3}\right) = 2$$
$$a_3 = 3a_2 = 3(2) = 6$$
$$a_4 = 3a_3 = 3(6) = 18$$
$$a_5 = 3a_4 = 3(18) = 54$$

Las sucesiones que presentan un patrón algebraico particular, se denominan progresiones, existiendo la posibilidad de ser aritméticas o geométricas.

Definición 3.22 (Progresiones Aritméticas)

Se denomina progresión aritmética a aquella sucesión de números en la que cada término se obtiene sumando una misma cantidad al término anterior. A la diferencia entre dos términos consecutivos se la denota por d.

$$f(n+1) - f(n) = d$$

La progresión aritmética también puede ser expresada de la siguiente manera:

$$f(n) = a + (n-1)\,d \qquad a, d \in \mathbf{R}\,;\, n \in \mathbf{N}$$

Donde a es el primer término y d es la diferencia común o razón aritmética de la progresión. Así, los términos de una progresión aritmética con primer término a y diferencia común d, siguen el patrón:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots$$

Al sumar los n primeros términos de una progresión aritmética, se tiene la siguiente expresión:

$$S_n = \frac{n\,(2a+(n-1)\,d)}{2} = \frac{n\,(a+f(n))}{2}$$

Como aplicación del método de inducción desarrollado anteriormente, se puede demostrar esta expresión.

Demostración

La suma de los n primeros términos de la progresión aritmética está dada por:

$$S_n = \underbrace{(a)}_{1^\circ\text{ término}} + \underbrace{(a+d)}_{2^\circ\text{ término}} + \underbrace{(a+2d)}_{3^\circ\text{ término}} + \ldots + \underbrace{a+(n-1)\,d}_{n\text{-ésimo término}}$$

Scanned by CamScanner

La propiedad a demostrar, para todos los números naturales n, es:

$$p(n) : (a) + (a+d) + (a+2d) + \ldots + [a + (n-1)\,d] = \frac{n[2a + (n-1)\,d]}{2}$$

Considerando el primer paso del método de inducción, tenemos:

$$S_1 = a = \frac{1[2a + (1-1)\,d]}{2}$$

$$a = a \quad \therefore p\,(1) \equiv 1$$

En el segundo paso, sumamos el término $(a + nd)$ a ambos miembros de la expresión:

$$(a) + (a+d) + (a+2d) + \ldots + [a + (n-1)\,d] + (a+nd) = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} + (a+nd)$$

$$S_n + (a+nd) = \frac{n[2a + (n-1)d]}{2} + (a+nd)$$

$$S_{n+1} = \frac{2an + n^2d - nd + 2a + 2nd}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{2an + n^2d + nd + 2a}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{2a(n+1) + nd(n+1)}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(2a + [(n+1) - 1]d)}{2}$$

Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}\,[\,p(n) \Rightarrow p(n+1)]$ es una proposición verdadera. Con lo cual, todos los números naturales satisfacen el predicado $p(n)$.

Ejemplo 3.130 Progresiones aritméticas.

Establezca el décimo tercer término de la siguiente progresión aritmética: 2, 7, 12, 17, 22, ...

Solución:

$a = 2$	Primer término.
$d = 7 - 2 = 5$	Diferencia.
$f(13) = 2 + (13-1)\,(5) = 62$	Décimo tercer término.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.131 Progresiones aritméticas.

Determine el valor de la siguiente suma: $5 + 9 + 13 + \ldots + 49$.

Solución:

$a = 5$ Primer término.

$d = 9 - 5 = 4$ Diferencia.

$49 = 5 + (n - 1)\,4$ Número de términos.

$n = 12$ Simplificación.

$S_{12} = \dfrac{12[2(5) + (12 - 1)\,4]}{2} = 324$ Suma de los términos.

Ejemplo 3.132 Progresiones aritméticas.

Si el primer término de una progresión aritmética es -11 y la suma de los once primeros términos es 44, determine el undécimo término de la progresión.

Solución:

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de razón d y primer término a, viene dada por $S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d\,]$.

En este caso: $S_{11} = \frac{11}{2}\,[2(-11) + (10)\,d\,] = 44$.

De donde se obtiene $d = 3$.

El undécimo término se determina a partir de: $f(n) = 3n - 14$

Reemplazando se tiene:

$f(11) = 3(11) - 14$

$f(11) = 33 - 14$

$f(11) = 19$

Ejemplo 3.133 Progresiones aritméticas.

Determine la cantidad de términos que deben sumarse de la progresión aritmética 1, 3, 5, 7, ... para que el resultado sea 3 969.

Solución:

Se puede notar que en esta progresión aritmética:

$a = 1$

$d = 2$

$S_n = 3\,969$

$n = ?$

Scanned by CamScanner

Utilizando la expresión $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ y reemplazando:

$3\,969 = \frac{n}{2}[2 + 2(n-1)]$

$3\,969 = n + n^2 - n$

$n^2 = 3\,969$

$n = \pm 63$

Según el contexto del problema, se descarta el número -63. Por lo tanto hay que sumar 63 términos de esta progresión aritmética para que el resultado sea 3 969.

Ejemplo 3.134 Progresiones aritméticas.

Determine k, de modo que la siguiente sucesión sea una progresión aritmética:

$$-2k,\ k^2 - 3,\ 3k^2 - 14$$

Solución:

$a = -2k$	Primer término.
$f(2) = k^2 - 3$	Segundo término.
$f(3) = 3k^2 - 14$	Tercer término.

Para que se cumpla la condición del problema:

$d = (k^2 - 3) - (-2k) = (3k^2 - 14) - (k^2 - 3)$	Diferencia o razón aritmética.
$k^2 - 3 + 2k = 3k^2 - 14 - k^2 + 3$	Simplificación.
$k^2 - 2k - 8 = 0$	Simplificación.
$(k-4)(k+2) = 0$	Descomposición en factores.
$(k - 4 = 0) \vee (k + 2 = 0)$	Propiedad de números reales.
$(k = 4) \vee (k = -2)$	Despeje de la incógnita.

Comprobando los valores obtenidos:

Si $k = 4$, la progresión aritmética será: $-8, 13, 34$; cuya diferencia es $d = 21$.

Si $k = -2$, la progresión aritmética será: $4, 1, -2$; cuya diferencia es $d = -3$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.135 Aplicación de las progresiones aritméticas.

En el concurso "Rueda de la Fortuna" hay 12 premios, que en total suman $96 000. Si existe una diferencia de $1 000 entre cada premio sucesivo, determine el premio de menor valor en el concurso.

Solución:

Se puede notar que se trata de una progresión aritmética, con:

$n = 12$
$S_{12} = 96\,000$
$d = 1\,000$
$a = ?$

Utilizando la suma de los 12 primeros términos de la progresión:

$$96\,000 = \frac{12}{2}[2a + (12 - 1)(1\,000)]$$

$$96\,000 = 6[2a + (11)(1\,000)]$$

$$16\,000 = 2a + 11\,000$$

$$2a = 5\,000 \rightarrow a = 2\,500$$

Por lo tanto, el premio de menor valor es de $2 500.

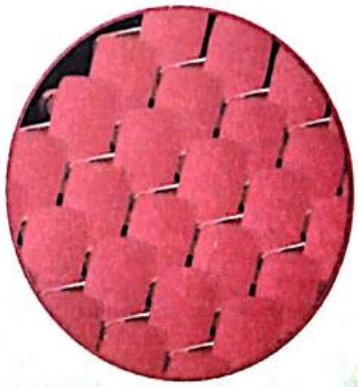
Ejemplo 3.136 Aplicación de las progresiones aritméticas.

En un teatro hay 50 filas de butacas. En la primera fila hay 30 butacas, en la segunda hay 32, en la tercera hay 34 y así sucesivamente. Determine la cantidad total de butacas.

Solución:

Podemos notar que la cantidad de butacas se encuentran en progresión aritmética al pasar de una fila a la siguiente, con:

$a = 30$
$n = 50$
$d = 2$



Lo cual implica sumar: $30 + 32 + 34 + \ldots$

$$S_{50} = \frac{50}{2}[(2)(30) + (50 - 1)(2)]$$

$$S_{50} = 25(60 + 98)$$

$$S_{50} = 3\,950$$

Por lo tanto, la cantidad de butacas que hay en el teatro es 3 950.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.137 Aplicación de las progresiones aritméticas.

Dado el predicado $p(x)$: $2+5+8+\ldots+x=155$, si $\mathrm{Re}=\mathbf{R}$, determine $Ap(x)$.

Solución:

Se trata de una progresión aritmética con $a=2$, $d=3$ y $f(n)=x$

$f(n)=x=2+(n-1)(3)=3n-1$

Por otra parte:

$S_n=\frac{n}{2}(a+f(n))$

$155=\frac{n}{2}(2+(3n-1))$

$310=n(3n+1)$

$3n^2+n-310=0$

$n=10 \quad \vee \quad n=-\frac{31}{3}$

Como n debe ser natural, $n=10$.

Entonces:

$x=3(10)-1=30-1=29$

El conjunto de verdad es $Ap(x)=\{29\}$.

Definición 3.23 (Progresiones Geométricas)

Se denomina progresión geométrica a aquella sucesión de números en la que cada término se obtiene multiplicando por una misma cantidad al término anterior. Por lo tanto, el cociente entre dos términos consecutivos es constante y se denomina razón r de la progresión.

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=r$$

La progresión geométrica también puede ser expresada de la siguiente manera:

$$f(n)=ar^{n-1} \quad a, r\in\mathbf{R}; n\in\mathbf{N}$$

donde a es el primer término y r es la razón geométrica de la progresión.
Así, los términos de una progresión geométrica con primer término a y razón r, siguen el patrón:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

Scanned by CamScanner

Al sumar los términos de una progresión geométrica, se tiene la siguiente expresión:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}\,; & r \neq 1 \\ na\,; & r = 1 \end{cases}$$

Como aplicación del método de inducción desarrollado anteriormente, se puede demostrar esta expresión.

$$P_n = \underbrace{(a)}_{1^\circ \text{ término}} + \underbrace{(ar)}_{2^\circ \text{ término}} + \underbrace{(ar^2)}_{3^\circ \text{ término}} + \ldots + \underbrace{(ar^{n-1})}_{n\text{-ésimo término}}$$

Demostración

La suma de los n primeros términos de la progresión geométrica está dada por:

$$P_n = (a) + (ar) + (ar^2) + \ldots + (ar^{n-1})$$

La propiedad a demostrar, para todos los números naturales n, es:

$$q(n)\colon a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}\,; \quad r \neq 1$$

Considerando el primer paso del método de inducción, tenemos:

$$P_1 = a = \frac{a(\cancel{1-r})}{\cancel{1-r}}$$

$$a = a \qquad \therefore\ q(1) \equiv 1$$

En el segundo paso, sumamos el término (ar^n) a ambos miembros de la expresión:

$$P_n + ar^n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} + ar^n$$

$$P_{n+1} = \frac{a - \cancel{ar^n} + \cancel{ar^n} - ar^{n+1}}{1-r}$$

$$P_{n+1} = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r}$$

$$P_{n+1} = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Por lo tanto, $\forall n \in \mathbb{N}\,[q(n) \Rightarrow q(n+1)]$ es una proposición verdadera. Con lo cual todos los números naturales satisfacen el predicado $q(n)$.

Cuando la cantidad de términos es muy grande y la razón $|r| < 1$, la suma de tales términos se puede calcular por medio de una aproximación.

Scanned by CamScanner

Si $0 < r < 1$, $r^n \to 0$ cuando el valor de n es extremadamente grande. Por lo tanto, la expresión:

$$P_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Se reduce a:

$$P_\infty \approx \frac{a}{1-r}$$

Lo mismo ocurre cuando $-1 < r < 0$.

Ejemplo 3.138 Progresiones geométricas.

Establezca el octavo término de la progresión geométrica: 1, 3, 9, ...

Solución:

Se puede notar que en esta progresión geométrica:

$a = 1$	Primer término.
$r = \frac{3}{1} = 3$	Razón.
$f(8) = (1)(3)^7 = 2\,187$	Octavo término.

Ejemplo 3.139 Progresiones geométricas.

Determine v, de modo que v, $v+2$, $v+3$, sean los términos consecutivos de una progresión geométrica.

Solución:

$a = v$	Primer término.
$f(2) = v+2$	Segundo término.
$f(3) = v+3$	Tercer término.
$r = \frac{v+2}{v} = \frac{v+3}{v+2}$	Razón.
$(v+2)^2 = v(v+3)$	Simplificación.
$v^2 + 4v + 4 = v^2 + 3v$	Desarrollo de productos notables.
$v = -4$	Obtención de valor requerido.

Comprobando, los términos de la progresión serían: $-4, -2, -1$, con razón $r = \frac{1}{2}$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.140 Progresiones geométricas.

Calcule el valor aproximado de la siguiente suma, cuyos términos están en progresión geométrica:

$$1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\ldots$$

Solución:

$a=1$ Primer término.

$r=\dfrac{\frac{9}{16}}{-\frac{3}{4}}=-\frac{3}{4}$ Razón.

$P_\infty \approx \dfrac{1}{1+\frac{3}{4}} \approx \frac{4}{7}$ Suma de los infinitos términos.

Ejemplo 3.141 Progresiones geométricas.

Determine el valor aproximado de la suma $\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^6}}+\frac{1}{\sqrt{3^9}}+\frac{1}{\sqrt{3^{12}}}+\ldots$

Solución:

Se tiene una progresión geométrica decreciente con infinitos términos, con primer término $a=\frac{1}{\sqrt{3^3}}$ y razón $r=\frac{1}{\sqrt{3^3}}$.

Al aplicar la expresión de la suma de términos se obtiene:

$$P_\infty \approx \frac{a}{1-r} \approx \frac{\frac{1}{\sqrt{3^3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3^3}}} \approx \frac{\frac{1}{3\sqrt{3}}}{\frac{3\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}} \approx \frac{1}{3\sqrt{3}-1} \approx \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\cdot\frac{3\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}+1} \approx \frac{3\sqrt{3}+1}{26}$$

Ejemplo 3.142 Aplicación de las progresiones geométricas.

Calcule el valor aproximado de: $2\left(2^{\frac{1}{2}}\right)\left(2^{\frac{1}{4}}\right)\left(2^{\frac{1}{8}}\right)\left(2^{\frac{1}{16}}\right)\ldots$

Solución:

Si consideramos propiedades de los exponentes, la expresión es equivalente a:

$$2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots}$$

Podemos observar que el exponente de esta operación consta de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente con primer término $a=1$ y razón $r=\frac{1}{2}$.

$$P_\infty \approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \approx 2$$

El valor solicitado es:

$$2^{P_\infty} \approx 2^2 \approx 4$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.143 Aplicación de las progresiones geométricas.

Utilizando progresiones geométricas, exprese el número $2.\overline{34}$ como fracción.

Solución:

Considere el número $x = 2.343434...$, su parte decimal es $0.343434...$, que puede expresarse como la suma infinita $\frac{34}{100} + \frac{34}{10000} + ...$

Esta suma corresponde a la de una progresión geométrica con $a = \frac{34}{100}$ y $r = \frac{1}{100}$.

Como $0 < r < 1$ y el número de términos n es infinito, la suma de estas fracciones es:

$$P_\infty \approx \frac{a}{1-r} \approx \frac{\frac{34}{100}}{1-\frac{1}{100}} \approx \frac{\frac{34}{\cancel{100}}}{\frac{99}{\cancel{100}}} \approx \frac{34}{99}$$

Con lo cual se obtiene $\frac{34}{99}$ como la representación fraccionaria de la parte decimal del número $2.343434...$

Finalmente, el número incluyendo la parte entera es $2 + \frac{34}{99} = \frac{232}{99}$, verificándose que todo número decimal periódico puede representarse como una fracción.

Ejemplo 3.144 Aplicación de las progresiones geométricas.

Un distribuidor vende 120 teléfonos en 4 días. Si cada día vendió $\frac{1}{3}$ de lo que vendió el día anterior, ¿cuántos teléfonos vendió el primer día?

Solución:

El problema consiste en determinar el primer término de una progresión geométrica en la cual, la suma de los 4 primeros términos es 120 y la razón es $\frac{1}{3}$. Aplicando la expresión para la suma de los 4 primeros términos de la progresión geométrica planteada y representando por a el primer término, se obtiene:

$$P_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$120 = \frac{a\left(\left(\frac{1}{3}\right)^4 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{a\left(\left(\frac{1}{81}\right) - 1\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{a\left(-\frac{80}{81}\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{40a}{27} \qquad \therefore a = 81$$

Por lo tanto, él vendió 81 teléfonos el primer día, 27 el segundo día, 9 el tercer día y 3 el cuarto día, es decir, 120 teléfonos en total durante los cuatro días.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.145 Aplicación de las progresiones geométricas.

Tres personas A, B, C, dividen una manzana de la siguiente manera: primero la dividen en cuartos y cada uno toma un cuarto. Después dividen la parte sobrante de nuevo en cuartos y cada quien toma su parte, siguiendo de esta manera con las partes sobrantes. ¿Cuánto obtiene cada uno en total?

Solución:

Al dividir la manzana según las condiciones del problema, cada persona recibe, la primera vez $\frac{1}{4}$ de manzana; la segunda vez recibe la cuarta parte del cuarto que quedó, esto es $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$. El problema se reduce a calcular la suma de términos de una progresión geométrica indefinida de primer término $a=\frac{1}{4}$ y razón $r=\frac{1}{4}$.

$$P_x \approx \frac{a}{1-r} \approx \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \approx \frac{\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{3}{\cancel{4}}} \approx \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, a cada uno le corresponde aproximadamente la tercera parte de la manzana.

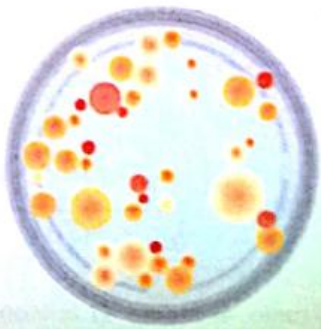
Ejemplo 3.146 Aplicación de las progresiones geométricas.

Una población de bacterias crece de tal manera que cada día hay el doble de las que había el día anterior. Si en el décimo día se realizó un conteo que arrojó como resultado 1024, ¿cuántas bacterias habían en el primer día?

Solución:

Aquí se tiene una progresión geométrica de razón $r=2$, tal que su décimo término es 1024.

$$f(n) = ar^{n-1}$$
$$f(10) = a(2)^{10-1}$$
$$1024 = a(2)^9$$
$$\therefore a = 2$$

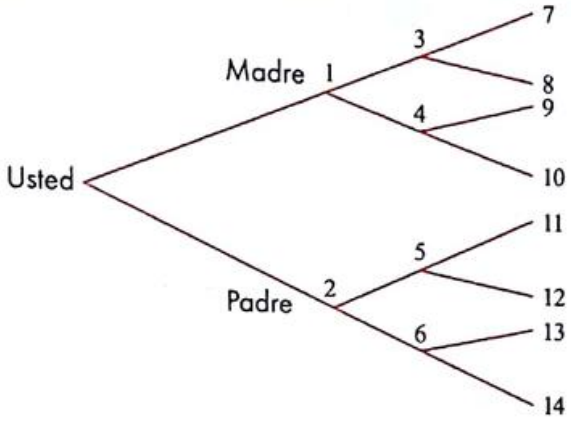


Por lo tanto, el primer día habían 2 bacterias.

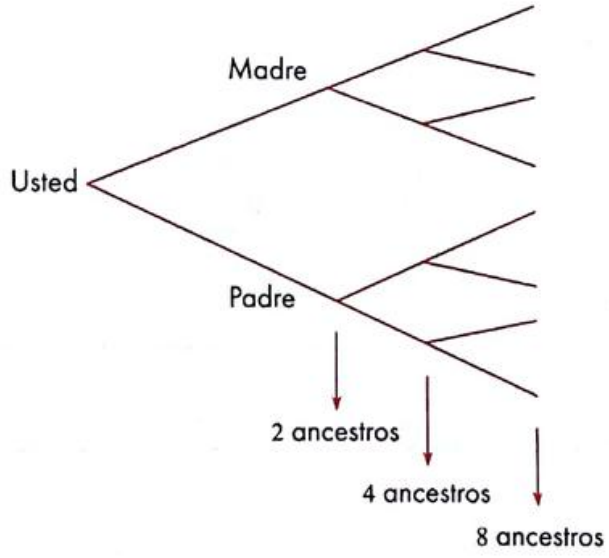
Scanned by CamScanner

Ejemplo 3.147 Aplicación de las progresiones geométricas.

En la figura se indica un árbol genealógico que muestra tres generaciones anteriores y un total de 14 antecesores. Si usted tuviera que analizar su historia familiar hasta 10 generaciones atrás, ¿cuántos ancestros identificaría?



Solución:



Se trata de encontrar la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica cuya razón r es 2 y cuyo primer término a es también 2.

$$P_{10} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2046$$

Es decir, que se tendrían 2 046 ancestros.

Scanned by CamScanner

1) Ahora que se ha definido el concepto de sucesiones, ¿cómo le gustaría que se lo hubiesen explicado? Escríbalo a continuación.

2) Determine, de ser posible, una posible regla de correspondencia para las siguientes sucesiones; considere $dom\, f = \mathbb{N}$

a) $f(n) = \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots$

b) $f(n) = \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{6}, \frac{81}{8}, \frac{243}{10}, \ldots$

c) $f(n) = x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{6}, \frac{x^4}{24}, \frac{x^5}{120}, \ldots$

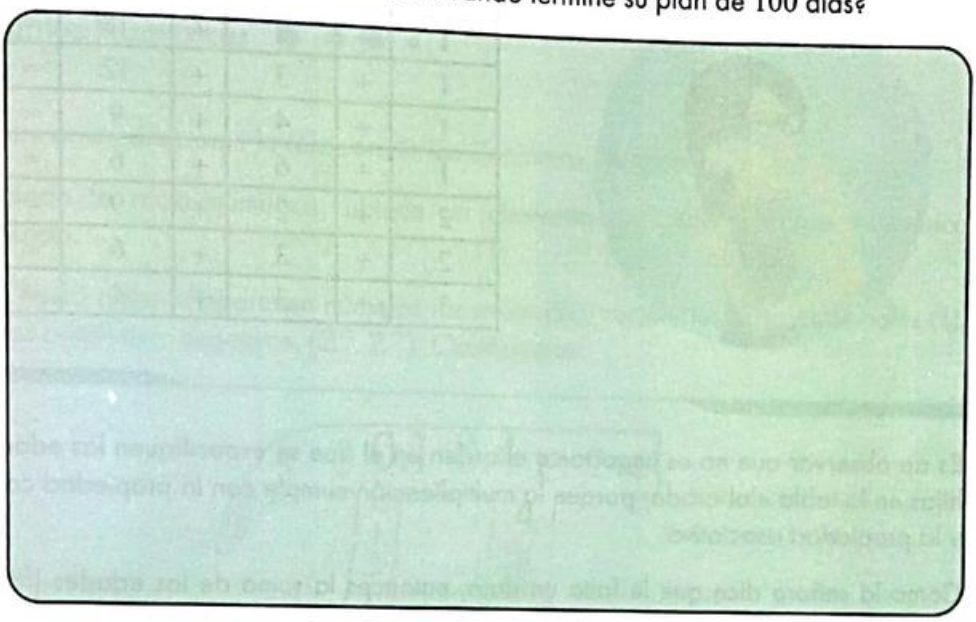
3) Complete la siguiente tabla:

	Sucesión	Tipo de progresión	Primer término de la progresión	Diferencia o razón de la progresión
a)	$\{10, 4, -2, -8, \ldots\}$			
b)	$\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{32}, \ldots\right\}$			
c)	$\{-3, 6, -12, 24, \ldots\}$			
d)	$\{5, 5, 5, 5, \ldots\}$			

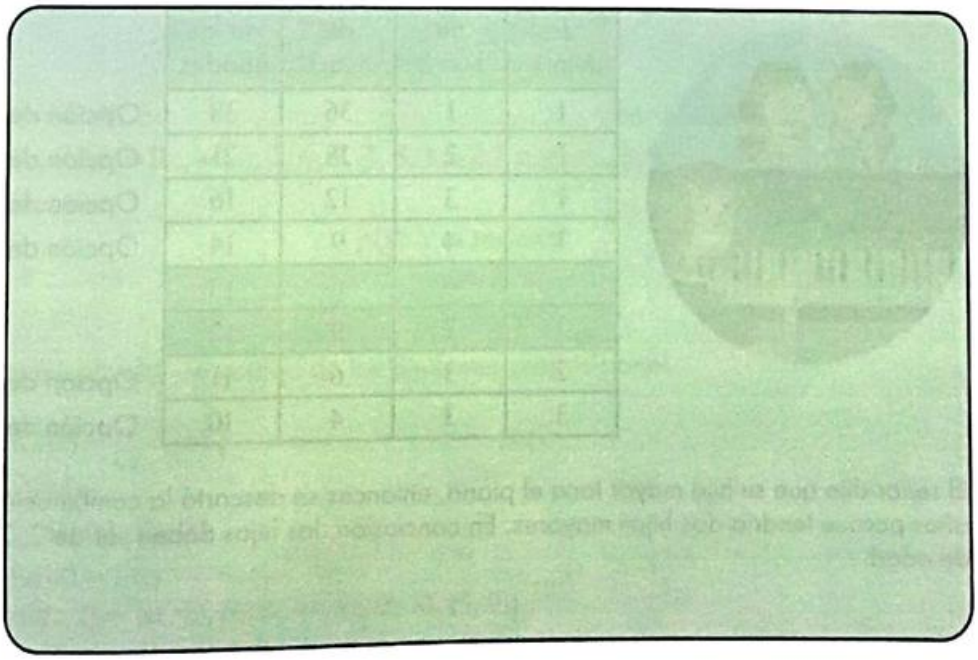
Scanned by CamScanner

4) Resuelva los siguientes ejercicios de aplicación de progresiones:

a) Una joven señorita quiere establecer un plan de ahorros. Ahorrará 10 centavos el primer día; y, hasta llegar al día 100, ahorrará siempre 70 centavos más que el día anterior. ¿Cuánto tendrá ahorrado cuando termine su plan de 100 días?



b) En una progresión geométrica de términos positivos, se conoce que la suma de los 6 primeros términos es igual a 9 veces la suma de los 3 primeros términos. Determine el valor de la razón geométrica.



Scanned by CamScanner

Respuesta al desafío

De acuerdo con los datos del problema, como el producto de las edades debe ser igual a 36, se plantea cada combinación y se construye una tabla especificando los factores posibles y tabulando los resultados de las sumas en cada caso:

Edad de hija 1		Edad de hija 2		Edad de hija 3		Suma de las edades
1	+	1	+	36	=	38
1	+	2	+	18	=	21
1	+	3	+	12	=	16
1	+	4	+	9	=	14
1	+	6	+	6	=	13
2	+	2	+	9	=	13
2	+	3	+	6	=	11
3	+	3	+	4	=	10

Es de observar que no es importante el orden en el que se especifiquen las edades de las hijas en la tabla elaborada, porque la multiplicación cumple con la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa.

Como la señora dice que le falta un dato, entonces la suma de las edades (factores del número 36) debe ser igual a 13. La opinión de ella sobre el número de su casa es importante, pues en las otras combinaciones ya estaría definida la situación, ya que se trata de una sola posibilidad y es por eso que se descarta las otras opciones.

Edad de hija 1	Edad de hija 2	Edad de hija 3	Suma de las edades	
1	1	36	38	Opción descartada
1	2	18	21	Opción descartada
1	3	12	16	Opción descartada
1	4	9	14	Opción descartada
1	6	6	13	
2	2	9	13	
2	3	6	11	Opción descartada
3	3	4	10	Opción descartada

El señor dijo que su hija mayor toca el piano, entonces se descarta la combinación 1, 6 y 6 años porque tendría dos hijas mayores. En conclusión, las hijas deben ser de 2, 2 y 9 años de edad.

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

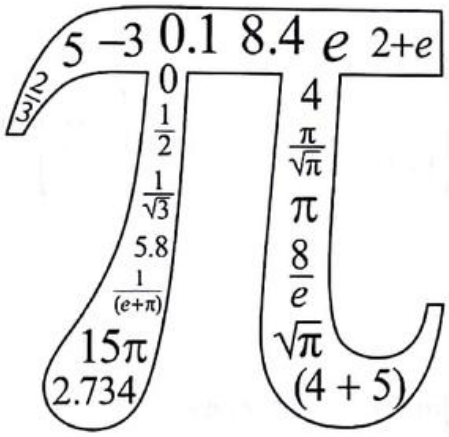
Ejercicios Propuestos

3.1 Conjuntos Numéricos

1) Muestre en un diagrama la relación de los Conjuntos Numéricos.

2) Utilizando la recta numérica, ubique un elemento de cada Conjunto Numérico analizado.

3) En la figura adjunta aparecen números naturales ($\mathbb{N}$), racionales ($\mathbb{Q}$), irracionales ($\mathbb{I}$), enteros positivos y negativos ($\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-$). Clasifíquelos.



4) Sea $\text{Re}_x = \text{Re}_z = \text{Re}_t = \left\{1, 2, \frac{2}{3}, 3, \frac{4}{5}, 8, 1.5, 2.7, \pi, e, \frac{1}{\sqrt{2}}, 5, 9, \sqrt{e}, \sqrt{\pi}\right\}$ y los predicados definidos por:

$p(x)$: x es racional.
$q(x)$: x es irracional.
$r(z, t)$: $z + t$ es entero.

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $Ap(x) = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, 8\right\}$
b) $\exists! x p(x)$
c) Si $\exists x p(x)$, $\exists x q(x)$
d) $Aq(x) = \{\sqrt{e}, \sqrt{\pi}, \pi, e, 2^{-1/2}\}$
e) $Ar(z, t) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 8), (5, 8), (5, 9)\}$

Scanned by CamScanner

5) Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demuéstrela; en caso de ser falsa, proporcione un contraejemplo.

"El cociente entre dos números irracionales es otro número irracional".

6) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas:

a) Si el número π es racional, entonces $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ es irracional.

b) O el número e es irracional o es natural.

c) El cero es un número entero.

d) $\left(1+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ es un número entero si y sólo si $a=4$

e) La suma de dos números irracionales es otro número irracional.

3.2 Representación Decimal

7) El valor numérico de $\left[\frac{12}{5}(5.5)-\frac{1}{0.8333\ldots}-\frac{1}{0.1}\right]$, es:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

8) El valor numérico de $\left[\frac{(0.3333\ldots)^{-4}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}(10^{-2}+0.99)}-\frac{0.1\overline{3}}{2(0.\overline{6})-1.2}\right]$, es:

a) 0
b) 0.3
c) 1
d) 2
e) 3

9) El valor numérico de $\left[\frac{(0.0666\ldots)((0.25)(0.5)^{-1}-\sqrt{(16)^{-1}})}{0.0222\ldots}\right]$, es:

a) $\frac{1}{12}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{4}{3}$
e) 12

10) El valor numérico de $\left[2\frac{3}{4}+\frac{1}{0.0333\ldots}\right]$ es $\frac{131}{4}$.

a) Verdadero b) Falso

Scanned by CamScanner

11) Un número decimal exacto o periódico puede expresarse en forma de fracción, tal como se explicó en la sección 3.2. A esta fracción se la conoce como **fracción generatriz**.

Determine la fracción generatriz, en caso de ser posible, de los siguientes números:

a) $0.003333\ldots$
b) $1.323232\ldots$
c) $0.010101010\ldots$
d) 3.2
e) $\frac{5}{3}$

12) El valor de $\left[25\left(\frac{0.00\overline{12}}{2\sqrt{0.25}}\right)\right]^{-1}$ es:

a) 2
b) 5
c) 15
d) 33
e) 35

3.3 Operaciones Binarias

13) Realice lo requerido en cada literal:

a) Enuncie la definición de Operación Binaria Interna.
b) Enuncie la propiedad del elemento neutro y estructure un ejemplo.
c) Enuncie la propiedad del elemento inverso y estructure un ejemplo.

14) Sea el conjunto $S = \mathbb{N}$ y la operación ∇ definida en S tal que:

$$a \nabla b = a^2 + b^2$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) El operador ∇ cumple con la propiedad conmutativa y la operación es binaria interna.
b) Si el neutro es único, entonces la operación cumple con la propiedad del neutro.
c) Si el neutro no existe, entonces el inverso existe.
d) Es necesario que el neutro exista para que la operación sea binaria interna.
e) $\forall a, b \in S, a \nabla b \geq 0$

15) Un sistema matemático (operación binaria) particularmente interesante es el que denominamos **aritmética modular**. Un ejemplo es el conjunto de los enteros módulo 4; los elementos de este conjunto son 4, a saber:

Scanned by CamScanner

$S = \{0, 1, 2, 3\}$

En donde las operaciones quedan definidas de la siguiente manera:

$\forall\, i, j, k \in S$: $i + j = k$, donde k es el residuo de la división de $i + j$ para 4.
$\forall\, i, j, m \in S$: $i \cdot j = m$, donde m es el residuo de la división de $i \cdot j$ para 4.

Así:

$2 + 3 = 1$ ya que $2 + 3 = 5$, que dividido por 4, da residuo 1.
$2 \cdot 3 = 2$ ya que $2 \cdot 3 = 6$, que dividido por 4, da residuo 2.

Determine el resultado de las siguientes operaciones para el módulo indicado.

a) Módulo 7

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

I) $4 + 5$
II) $5 \cdot 3$
III) $2 \cdot 4$
IV) $5 \cdot 6$
V) $6 \cdot 1$
VI) $1 + 0$
VII) $2 \cdot 0$
VIII) $5 + 3$
IX) $4 \cdot 5$
X) $2 + 5$

b) Módulo 6

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

I) $4 + 5$
II) $5 \cdot 3$
III) $2 \cdot 4$
IV) $5 \cdot 1$
V) $0 \cdot 1$
VI) $1 \cdot 0$
VII) $2 \cdot 0$
VIII) $5 + 3$
IX) $4 \cdot 5$
X) $2 + 5$

16) Considere la siguiente operación binaria:

$$S = \mathbb{N} \cup \mathbb{I}\,;\ \forall\, a, b \in S,\ a * b = a + b + \pi$$

a) Determine si la operación binaria es interna.
b) Determine, de ser posible, el neutro de la operación.
c) Determine, de ser posible, el inverso de la operación.

17) Sea el conjunto $S = \{1, 2, 3\}$ y sea $\otimes$ una operación en S definida por la siguiente tabla:

$\otimes$	1	2	3
1	2	3	1
2	3	2	3
3	1	3	1

Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas:

a) La operación binaria $\otimes$ no es interna.
b) La operación es conmutativa.
c) $[(2 \otimes 3) \otimes 1] \notin S$
d) La operación $\otimes$ tiene elemento neutro.
e) $[(1 \otimes 2) \otimes 3] = 2$

Scanned by CamScanner

18) Se define la operación binaria $\boxplus$ en el conjunto de los números reales, tal que:

$$a \boxplus b = a + b + 2ab$$

Si el elemento neutro de la operación es $n = 0$, el único elemento que no tiene inverso es igual a:

a) 0
b) -1
c) $\frac{1}{4}$
d) 2
e) $-\frac{1}{2}$

19) Se define la operación binaria $\sum$ en el conjunto A, tal que:

$$a \sum b = \frac{1}{a+b}$$

Defina correctamente el conjunto A para que la operación binaria sea interna; y de ser posible, que el neutro exista.

20) Sobre el conjunto de los números reales se define la operación binaria:

$$a * b = \begin{cases} a^b + b^a, \text{si } (a+b) \text{ es natural} \\ ab \quad\quad , \text{si } (a+b) \text{ es irracional} \end{cases}$$

a) Determine $(4 * 1) * (\pi * 3)$
b) Determine si la operación binaria es interna. En caso de ser posible, obtenga el neutro de la operación.

3.4 Operaciones entre Números Reales ● ● ● ● ●

21) Demuestre que entre los números reales únicamente existe un solo cero, es decir:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists! c \in \mathbb{R} / (a + c) = a$$

Recuerde que $\exists! c$ se lee: Existe solamente un c.

22) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:.

a) La resta de dos números naturales, es otro número natural.
b) La suma de dos números reales es otro número real.
c) La suma de dos números naturales es otro número natural.
d) La resta de dos números irracionales es otro número irracional.
e) La multiplicación de dos números irracionales es otro número irracional.

Scanned by CamScanner

23) Determine, de ser posible, el valor de las siguientes expresiones:

a) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$ cuando $x=1$

b) $\dfrac{(-1)^{n-1}\, n\,(n+1)}{2}$ cuando $n=-1$

c) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}$ cuando $x=-1$

d) $\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}$ cuando $a=1, b=0, c=-1$

e) $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-7}}+\sqrt{x-4}$ cuando $x=0$

24) Considere el conjunto $S=\mathbb{R}$ y las operaciones binarias definidas por:

$$a \oplus b = a+b$$
$$a \otimes b = ab$$

a) ¿Las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ son binarias internas?
b) ¿$\oplus$ y $\otimes$ cumplen con la propiedad asociativa?
c) ¿$\oplus$ y $\otimes$ cumplen con la propiedad conmutativa?
d) Determine los elementos neutros para $\oplus$ y $\otimes$.
e) Calcule el valor de $\dfrac{a\oplus b}{a}+\dfrac{b\oplus a}{a\oplus b}+\dfrac{b\oplus a}{b}$, si $a=b=1$.

25) Dadas las siguientes igualdades, las cuales son verdaderas sobre los números reales, indique la razón de su veracidad, basándose para ello en las propiedades de estos números:

a) $1+(7+5)=(1+5)+7$
b) $0+6=6$
c) $(a+b)+c=c+(b+a)$
d) $(x+2)\cdot z=z\cdot x+2z$
e) $(2^{-1}\cdot 2)-1=0$

3.5 Relación de Orden

26) Defina lo indicado en cada literal en relación a los números reales:

a) Relación de orden.
b) Tricotomía.
c) Propiedad Reflexiva.
d) Propiedad Transitiva.
e) Propiedad Antisimétrica.

27) Sean los números reales a, b, c, d, x. Identifique la proposición FALSA.

a) Si $a>b$ y $c>d$, entonces $b+d<a+c$
b) Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ac<bc$
c) Si $0<a<b$ y $0<c<d$, entonces $ac<bd$
d) Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$
e) Si $a<x\leq b$, entonces $x\in(a, b]$

Scanned by CamScanner

28) Identifique la proposición VERDADERA:

a) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}\ [(ab = bc) \leftrightarrow (a = c)]$

b) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ [(ab > 0)] \leftrightarrow [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)]$

c) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ [(ab < 0)] \leftrightarrow [(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)]$

d) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}\ [(a \leq b) \rightarrow (a - c \leq b - c)]$

e) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} - \{0\}\ \left[\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1} = a + b\right]$

29) ¿En cuál de los siguientes literales los números están ordenados de menor a mayor?

a) $\frac{69}{200}, \frac{19}{100}, 0.8, \frac{1}{5}$

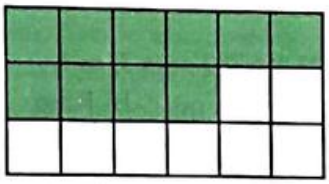
b) $\frac{19}{100}, \frac{1}{5}, \frac{69}{200}, 0.8$

c) $\frac{4}{5}, \frac{19}{100}, \frac{1}{5}, \frac{69}{200}$

d) $\frac{1}{5}, 0.8, \frac{69}{200}, \frac{19}{100}$

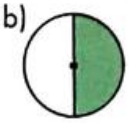
e) $\frac{1}{2}, 0.5, \frac{2}{4}$

30) Dado el siguiente rectángulo:

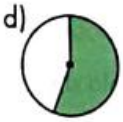


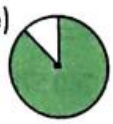
¿Qué círculo tiene sombreada, aproximadamente, la misma fracción que el rectángulo?

a)

b) 

c)

d) 

e) 

31) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, demuestre que:

$$[(a < b) \wedge (c < d)] \rightarrow [(a + b)(c + d) < 2(ac + bd)]$$

32) Demuestre que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{a+b}$

Scanned by CamScanner

33) Sean los números $a, b, c \in \mathbf{Z} - \{0\}$ y las condiciones $a > 0 > b > c$, identifique la proposición verdadera:

a) $b + c > a$
b) $bc < a$
c) $b > c$
d) $(b + c)^2 > a$
e) $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 < \frac{1}{a}$

34) A partir de las propiedades de los números reales, demuestre que:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, (x < y \leftrightarrow x^3 < y^3)$$

3.6 Conceptos asociados a los Números Enteros

35) Demuestre que $\sqrt[3]{4}$ es un número irracional.

36) Demuestre que $\sqrt{6}$ es un número irracional.

37) Considere la expresión $p(n) = n^2 + n + 41$, siendo $n \in \mathbf{N}_0$:

a) Determine el conjunto $S = \{p(0), p(1), p(2), p(3), p(4), p(5), \ldots, p(10)\}$
b) Sea la operación $\bowtie$ definida sobre S, tal que:

$$\forall a, b \in S: \; a \bowtie b = a + b + p(a) + p(b)$$

Determine si la operación es binaria interna y si tiene elemento neutro.
Nota.- Para resolver el literal b), deberá definirse correctamente el conjunto S, según lo obtenido en el literal a).

38) El residuo al dividir 2 386 723 456 789 para 3, es 1.
a) Verdadero b) Falso

39) Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demuéstrela; y, en caso de ser falsa, proporcione un contraejemplo.

Si $a \mid b$, entonces $a \mid (a + b)$

40) 760 578 es múltiplo de 7.
a) Verdadero b) Falso

41) El campanario de la iglesia del pueblo tiene tres relojes que deben accionar cada uno una campana y sonar al unísono. Lamentablemente, por los años, el sistema se ha desajustado tanto, que uno de los relojes suena cada hora y cuarto, el otro cada hora y veinte minutos, y el tercero cada hora y media. Si las tres campanas sonaron juntas a las diez de la mañana del domingo, ¿cuántas veces sonarán juntas en la semana?

Scanned by CamScanner

42) Se desean repartir 180 libros, 240 juguetes y 360 chocolatines entre cierto número de niños, de tal modo que cada uno reciba un número exacto de cada uno de esos elementos. ¿Cuál es el mayor número de niños que puede beneficiarse así y qué cantidad recibe cada uno?

43) Para los partidos de fútbol de la selección del Ecuador se encienden bombillas amarillas cada 18 segundos, bombillas azules cada 10 segundos y bombillas rojas cada 15 segundos. La cantidad de veces que se encienden las 3 bombillas al mismo tiempo, durante un partido de fútbol (de 90 minutos), es igual a:

a) 20 b) 30 c) 40 d) 50 e) 60

44) David quiere poner un quiosco de venta de hamburguesas y para iniciar necesita comprar el mismo número de: moldes de carne molida, de panes y de envolturas. Los moldes de carne molida se compran en paquetes de 24 unidades, los panes en paquetes de 30 unidades; y, las envolturas en paquetes de 40 unidades.

a) Determine el menor número de paquetes (y unidades) que debe comprar de cada uno de los tres componentes para hacer hamburguesas completas.
b) David decide promocionar sus hamburguesas en las redes sociales. Por cada 60 fotos publicadas en Instagram, 10 personas irán a su quiosco a comer. Pero si también las promociona por Twitter, por cada 60 tweets, 8 personas comerán en su quiosco. Determine la cantidad de fotos y tweets que serán necesarios publicar y enviar para que el número de respuestas satisfactorias coincidan en ambas formas de promoción.

45) Diana quiere vender galletas. Con lo que aprendió en un curso de repostería, hizo 75 galletas de vainilla, 120 de chocolate y 60 de avena. Determine la cantidad de paquetes con la misma cantidad de galletas de cada tipo que ella puede hacer.

46) Sixto ha iniciado un tratamiento médico para su alergia. Debe usar tres medicamentos distintos: unas pastillas, un jarabe y una crema. Las pastillas debe tomarlas cada seis horas, el jarabe cada ocho horas y la crema aplicarla cada cinco horas. Si Sixto usó todos los medicamentos a las 5H00 del sábado 21 de noviembre, ¿en qué fecha y hora los volverá a aplicar todos?

47) Se desea estibar 1 830 jugos enlatados y 1 170 gaseosas enlatadas en cierto número de cajas que contengan el mismo número de bebidas enlatadas, sin que sobre alguna de ellas ni tampoco se mezclen.

a) Determine el mayor número de bebidas enlatadas que pueden colocarse en una caja.
b) Si por cada caja se deben adquirir dos stickers para promocionarlas, determine la cantidad de stickers que deben adquirirse.

Scanned by CamScanner

48) Tres perros de carrera arrancan juntos en una pista circular. Si el primero tarda 8 segundos en dar una vuelta a la pista, el segundo 11 segundos y el tercero 14 segundos. ¿Cuántos segundos deberán transcurrir para que los perros pasen juntos por la línea de salida? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada perro en ese tiempo?

49) Tito estudiará a partir del 28 de mayo las materias de matemáticas, física y química, cada 3, 4 y 6 días respectivamente; determine:

a) La fecha más próxima en la que él estudiará exactamente 1 materia.
b) La fecha más próxima en la que él estudiará 2 materias juntas (en un mismo día).
c) La fecha más próxima en la que él estudiará las 3 materias juntas (en un mismo día).

3.7 Expresiones Algebraicas

50) El valor de la expresión $2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}$, es:

a) $\frac{15}{2}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $\frac{41}{18}$ d) $\frac{18}{41}$ e) $\frac{27}{11}$

51) Al simplificar la expresión:

$$\frac{\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b^2\sqrt{a^2b\sqrt{b}}}}}{\left(\dfrac{\sqrt{a^3\sqrt{b}}}{a^4\sqrt[8]{b^9}}\right)}$$

Se obtiene:

a) $a^4\sqrt[3]{b}$
b) $a^4\sqrt[4]{b}$
c) a^3b^2
d) $a^3\sqrt[3]{b}$
e) $a^3\sqrt[4]{b}$

52) Al simplificar la expresión algebraica:

$$\frac{(a+b)\left(a^4b-\sqrt[3]{a^5\sqrt{b^6a^2}}\right)}{a^3+a^2b-\dfrac{1}{(a+b)^{-1}}}$$

Se obtiene:

Scanned by CamScanner

a) ab^2
b) a^3b
c) a^2b
d) a^2b^2
e) a^3b^2

53) Si $x^a = \frac{1}{9}$, $x^b = 2$, $y^b = \frac{1}{2}$, entonces el valor numérico de la expresión

$$\left(\sqrt[\frac{1}{b}]{\frac{x^{\frac{a}{b}}\, y^3}{x^2\, y^{-1}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

es:

a) 24
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{8}$
d) $\frac{1}{12}$
e) $\frac{1}{24}$

54) Descomponer en 2 factores las expresiones indicadas en cada literal:

a) $4a^2 - 12ab + 5b^2$
b) $a^{12} - 2a^6 + 1$
c) $a^4 - 1$
d) $a^4 - 10a^2 + 169$
e) $a^3 + 9a^2 + 27a + 19$

55) Descomponer en 3 factores las expresiones indicadas en cada literal :

a) $a^3 - 5a^2 - a + 5$
b) $a^3 - 7a^2 + 7a + 15$
c) $a^2 - 2a^3b + 2ab^3 - b^2$
d) $a^6 + a^4 + a^2\, b^2 + b^4 - b^6$
e) $ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a-c)$

56) Demuestre que:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\,;\, a+b+c=0 \text{ sólo si } a^3+b^3+c^3 = 3abc$$

57) Demuestre que si $a+b+c=0$, donde $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ entonces se cumple que:

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9$$

Scanned by CamScanner

58) Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2a^2+ab-b^2}{a+b}$

b) $\dfrac{a^4-10a^2+169}{a^2+6a+13}$

c) $\left(\dfrac{b}{a+b}+a\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-b\right)-\left(\dfrac{a}{a+b}+b\right)\left(\dfrac{b}{a-b}-a\right)$

d) $\left(\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\right)\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

e) $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$

f) $\left(\dfrac{1}{a^2+3a+2}+\dfrac{2a}{a^2+4a+3}+\dfrac{1}{a^2+5a+6}\right)^2\left(\dfrac{(a-3)^2+12a}{2}\right)$

g) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

h) $\dfrac{1}{1-a}-\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{2a}{1+a^2}-\dfrac{4a^3}{1+a^4}-\dfrac{8a^7}{1+a^8}$

i) $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+4)}+\dfrac{1}{(a+4)(a+5)}$

j) $\dfrac{\dfrac{a-c}{a^2+ac+c^2}\left(\dfrac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\right)\left(1+\dfrac{c}{a-c}-\dfrac{1+c}{c}\right)}{\dfrac{c(1+c)-a}{bc}}$

k) $\dfrac{a}{a^2-1}+\dfrac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\dfrac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\dfrac{2a^3}{a^4-1}$

l) $\dfrac{a^3b-ab^3+b^3c-bc^3+c^3a-ca^3}{a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2}$

59) Al simplificar la expresión $\left(\sqrt{32}+\sqrt{45}-\sqrt{98}\right)\left(\sqrt{72}-\sqrt{500}-\sqrt{8}\right)$, se obtiene $2\sqrt{2}$.

a) Verdadero b) Falso

60) Simplifique las siguientes expresiones con radicales:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

b) $\sqrt[8]{\left(2-\sqrt{7}\right)^4}$

c) $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$

Scanned by CamScanner

d) $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

61) Racionalice las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

62) Demuestre la siguiente igualdad:

$$\sqrt[4]{6a\left(5+2\sqrt{6}\right)}\sqrt{3\sqrt{2a}-2\sqrt{3a}}=\sqrt{6a}$$

63) Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\left(\dfrac{1}{2}a^{0.25}+a^{0.75}\right)^2-a^{1.5}\left(1+a^{-0.5}\right)$

b) $\left(\dfrac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\left(\dfrac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\right)\sqrt{\dfrac{1}{(a+1)^2}}$

c) $\dfrac{\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}+\dfrac{1-\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}}}{\dfrac{\sqrt[4]{ab}}{1+\sqrt[4]{a^3b^3}}}-\dfrac{1-\sqrt[4]{ab}-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$

Scanned by CamScanner

d) $\left(\dfrac{a\sqrt[3]{a}-2a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}}+\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}\right)\div\sqrt[3]{a^2}$

e) $\dfrac{\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}+\dfrac{1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}}{1+\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}}\right)}{\dfrac{\sqrt{a-\dfrac{1}{a}}}{\sqrt{\dfrac{1}{a}}}}$

3.8 Razones y Proporciones ● ● ● • •

64) José contrata a 24 obreros, los cuales se comprometen a excavar una zanja de 50 *m* de largo, 8 *m* de ancho y 2 *m* de profundidad en 10 días. Decide aumentar todas las dimensiones de la zanja en un 50%. ¿Cuántos obreros se necesitan para terminar el contrato en la mitad del plazo fijado si aumentan su eficiencia en un 50%?

65) Para atender una emergencia eléctrica en la zona rural del cantón Yaguachi 6 técnicos trabajan durante 9 días a razón de 8 horas diarias, reparando los 3/8 del daño. Se decide enviar 4 técnicos adicionales y todos trabajan 6 horas diarias, entonces el tiempo que el equipo técnico demorará en solucionar el resto del daño es:

a) 4 días
b) 6 días
c) 12 días
d) 18 días
e) 10 días

66) En una mina, una cuadrilla de 7 mineros abren una galería de 49 metros de longitud en 21 días. Si otra cuadrilla tiene 14 mineros, ¿cuántos metros de galerías abrirán en 35 días?

67) Cinco grifos abiertos durante 8 horas diarias han consumido cierta cantidad de agua por un valor de $20. Determine el precio del vertido de 15 grifos abiertos 10 horas durante la misma cantidad de días.

68) Un ganadero tiene 1 500 ovejas para las cuales tiene alimentos para 30 días. Si decide vender cierto número de ellas y a las restantes proporcionarles los tres quintos de ración para que los alimentos duren tres meses más, el número de ovejas que se vendieron fue:

a) 900
b) 485
c) 620

Scanned by CamScanner

d) 875
e) 750

69) En 48 días, diez obreros han hecho la tercera parte de una obra, luego se retiran n obreros y los que quedan avanzan 1/6 más de la obra en k días. Si estos últimos terminan lo que falta de la obra trabajando $k + 60$ días, ¿cuál es el valor de k/n?

a) 40/3
b) 20
c) 15
d) 30
e) 45/2

70) Una estufa de 4 quemadores ha consumido \$50 de gas al estar encendidos 2 de ellos durante 3 horas. ¿Cuál es el precio del gas consumido si se encienden los 4 quemadores durante el mismo tiempo?

71) Para pavimentar 2 km de carretera, 50 trabajadores han empleado 20 días trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días tardarán 100 trabajadores trabajando 10 horas al día en construir 6 km más de carretera?

72) Una barda construida con 300 tabiques tiene 5 metros de largo y una altura de 3 metros. ¿Qué largo debería tener la barda si se contaran 850 tabiques y ésta tuviera 2.5 metros de altura?

73) Un grupo de amigos compuesto por 24 personas piensa pasar unos días por la montaña y llevan comida para 10 días. A última hora, por motivos diferentes, 8 personas no pueden ir. ¿Para cuántos días tienen comida?

3.9 Valor Absoluto ● ● ● • •

74) Interprete el valor absoluto con base en su definición.

75) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) El valor absoluto de un número real siempre es positivo.
b) Suponga que $a < 0$ entonces $|a| = -a$
c) Si $a < b$ entonces $|a| < |b|$
d) $|x - e| = |e - x|$
e) Si $x > 0$, entonces $|x| = -x$

Scanned by CamScanner

76) Al calcular $\dfrac{2(1)-3-|3(1)-2(2)|+|4-5(-2)|}{|3(-1)-(-1)|-|2(-1)-(-1)|-|3-(-1)|}$, se obtiene:

a) -8
b) -4
c) 2
d) 6
e) 10

77) Dados los conjuntos referenciales $\mathrm{Re}_x = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathrm{Re}_y = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ y el predicado $p(x, y)$: $y = |x|$, determine:

a) $\mathrm{N}(\mathrm{A}p(x, y))$
b) $\mathrm{N}(\mathrm{A}^c p(x, y))$

78) Para los siguientes literales, escriba la desigualdad correspondiente y grafique en la recta numérica su respectivo intervalo.

a) Mayor que 5.
b) Mayor que 4 y menor que -6.
c) Entre -1 y 1.
d) Mayor que 4 o menor que -4.
e) Mayor o igual que 0.
f) Mayor que -1 y menor que 4.

79) Se define la operación $*$ sobre el conjunto $S = \mathbb{N}$:

$$a * b = |a - b|$$

a) Analice si la operación es binaria interna.
b) Determine, en caso de existir, el neutro de la operación binaria interna.

80) Descomponga las siguientes expresiones:

a) $|x + \pi|$
b) $\left|1 - \frac{x}{2}\right|$
c) $||x| - 3|$

3.10 Ecuaciones

81) A continuación se presenta una lista de diversos enunciados verbales de uso frecuente. Expréselos en forma algebraica.

- Número natural cualquiera.
- El antecesor de n.
- El sucesor de n.
- Número natural par.
- Número natural impar.
- El cuadrado del sucesor de n.

Scanned by CamScanner

- El sucesor del cuadrado de n.
- El cuadrado del sucesor del antecesor de n.
- Dos números naturales impares consecutivos.
- La diferencia positiva de los cuadrados entre dos números naturales consecutivos.
- La diferencia positiva de los cubos entre dos números naturales pares consecutivos.
- El inverso aditivo u opuesto de r.
- El inverso multiplicativo o recíproco de r.
- El sucesor del recíproco de s.
- El triple de x.
- El cuadrado de la suma entre a y b.
- La suma de los cuadrados de a y b.
- El producto entre a, b y c.
- Un número de dos cifras en el sistema decimal, cuya cifra de las unidades es u, cifra de las decenas es d y cifra de las centenas es c.
- La razón o cociente entre p y q.
- La mitad de m o el cincuenta por ciento de m.
- La cuarta parte de n o el veinticinco por ciento de n.
- El valor absoluto de x.
- La media aritmética o promedio aritmético entre m y n.
- La raíz cuadrada de x.
- La media geométrica entre a y b. (La media geométrica entre dos números se define como la raíz cuadrada de su producto).
- x es directamente proporcional a y.
- x es inversamente proporcional a y.
- La distancia entre a y b menor que δ.

82) Si el triple de un número es igual al número aumentado en 8, entonces el número es:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 1 e) 5

83) Juan y Luis tienen juntos \$50. Si Juan tiene \$12 más que Luis, ¿cuántos dólares tiene Luis?

a) 20 b) 30 c) 19 d) 13 e) 21

84) Si la suma de tres números consecutivos es 63, entonces uno de ellos es:

a) 20 b) 10 c) 15 d) 13 e) 5

85) La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. ¿Cuál es el valor absoluto de su suma?

a) 61 b) -61 c) 60 d) 1 e) 0

86) Determine dos números pares consecutivos cuya suma sea 126.

Scanned by CamScanner

87) Determine un número, que disminuido en sus 2/3 partes, equivale a su duplo disminuido en 25.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 15 e) 5

88) Sea el conjunto referencial Re = $\mathbb{R}$ y el predicado: $p(x)$: $x^2 - x - 1 = 0$. Determine su conjunto de verdad.

89) Sea el conjunto referencial Re = $\mathbb{R}$ y el predicado:

$$p(x):\ 1+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4-x}}} = \frac{51}{32}$$

Tabule el conjunto de verdad $\Lambda p(x)$.

90) Sea Re = $\mathbb{R}$, para qué valores de x se cumple que:

$$p(x): \frac{|x+\pi|}{x+\pi} = -1$$

91) Sea el conjunto referencial Re = $\mathbb{R}$ y el predicado:

$$p(x): \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{x} = \frac{1}{a+b-x};\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ a+b \neq x$$

Determine el conjunto de verdad $\Lambda p(x)$.

92) Siendo el conjunto referencial Re = $\mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $p(x): \frac{2}{2-x}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2x-x^2}$

b) $q(x): \frac{x+2}{x+1}+\frac{2-x}{1-x}+\frac{4}{x-1} = 0$

c) $r(x): \frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1} = \frac{1}{27}-\frac{13}{1-2x}$

d) $s(x): \frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1} = 2-\frac{x+4}{x-1}$

e) $t(x): 1+\sqrt{2x+7} = x-3$

f) $m(x): \frac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4}$

g) $n(x): \sqrt{22-x}-\sqrt{10-x} = 2$

h) $o(x): \sqrt{x+3}-\sqrt{3x-2} = 7$

Scanned by CamScanner

93) Establezca el conjunto de verdad de los siguientes predicados, considerando $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$:

a) $p(x)$: $|2x - 3| = x + 1$

b) $q(x)$: $|x| + x^3 = 0$

c) $r(x)$: $(|x| - 1)(x - 1) = -\frac{1}{2}$

d) $s(x)$: $|2x - x^2 + 3| = -x - 1$

e) $t(x)$: $x^2 + 3|x| + 2 = 0$

f) $u(x)$: $|x - 3| - |x + 2| = 5$

g) $v(x)$: $\dfrac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} = 1$

94) Sea el conjunto referencial $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y los predicados:

$$p(x): \frac{x}{3} - \frac{1-x}{4} = \frac{3}{2} \qquad q(x): \left|\frac{2x}{3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

Tabule los siguientes conjuntos de verdad:

a) $Ap(x)$

b) $Aq(x)$

· 95) Un pediatra experto en problemas del sueño, ha desarrollado un método para ayudar a los niños de 6 meses de edad en adelante, a dormir toda la noche. Este método consiste en que los padres deben esperar intervalos de tiempo cada vez más grandes antes de entrar a la habitación del niño para consolar su llanto durante la noche. El tiempo sugerido de espera depende de cuántas noches se ha utilizado el método, y puede determinarse por medio de la ecuación:

$$T = 5n + 5$$

Donde T es el tiempo de espera en minutos y n es el número de noches.

a) ¿Cuánto deben esperar los padres la primera noche?

b) ¿Cuánto deben esperar la cuarta noche?

c) ¿En qué noche los padres deben esperar 30 minutos?

d) ¿En qué noche deben esperar 40 minutos?

96) La densidad poblacional de una determinada nación ha aumentado de manera constante desde 1990, y puede estimarse por medio de la ecuación:

$$P = 0.81t + 70.4$$

Donde P es la densidad poblacional, es decir, el número de personas por milla cuadrada, y t es el número de años desde 1990. Utilice $t = 1$ para 1991, $t = 2$ para 1992, y así sucesivamente.

a) Determine la densidad poblacional de esa nación en el año 2020.

b) ¿En qué año la densidad poblacional de la nación llegará a 100 personas por milla cuadrada?

Scanned by CamScanner

97) Desde 1 993, los fabricantes de automóviles han perdido progresivamente parte del mercado ante sus competidores de Asia y Europa. Del total de automóviles vendidos en Estados Unidos, el porcentaje que corresponde a los autos de fabricación doméstica puede estimarse usando la ecuación:

$$M = -1.26x + 75.34$$

Donde M es el porcentaje de automóviles de fabricación doméstica en relación al total vendido en Estados Unidos; y, x es el número de años desde 1 993. Utilice $x = 1$ para 1 994, $x = 2$ para 1 995, etcétera.

a) ¿Qué porcentaje del total de automóviles vendidos en Estados Unidos corresponde a autos de fabricación doméstica en el año 2 003?
b) ¿En qué año el porcentaje de autos de fabricación doméstica será de 58.96% sobre el total de ventas en Estados Unidos?

98) Se conoce que las pensiones con seguros de vida garantizan pagos futuros. Una de sus variantes, denominada pensión variable, es una cuantía de retiro que permite invertir en un fondo mutualista y diferir el pago de impuestos hasta que se realicen los retiros en el futuro. El número de personas que opta por este tipo de pensiones ha aumentado de manera constante en los años recientes y puede calcularse mediante la ecuación:

$$S = 10x + 20$$

Donde S representa la venta total de pensiones variables (en miles de millones de dólares), y x es el número de años desde 1 991. Utilice $x = 1$ para 1 992, $x = 2$ para 1 993, etcétera.

a) Determine la venta total de pensiones variables en el año 2 001.
b) ¿En qué año la venta de este tipo de pensión alcanzará 140 mil millones de dólares?

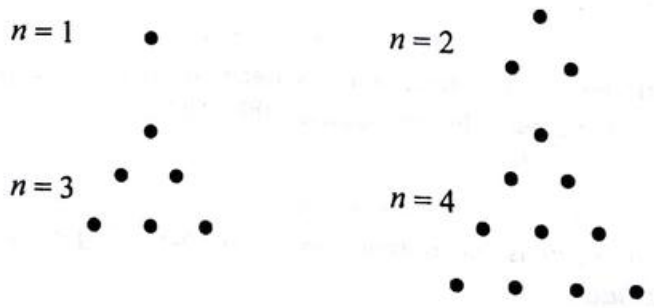
99) La población en cierta ciudad ha estado creciendo paulatinamente desde 1 996, calculándose este crecimiento mediante la ecuación:

$$P = 7x + 2\,170$$

Donde P representa el número de habitantes y x el número de años desde 1 996. Utilice $x = 1$ para 1 997, $x = 2$ para 1 998, y así sucesivamente.

a) ¿Cuál fue la población en el año 2 003?
b) Si continúa la misma tasa de crecimiento, ¿en qué año la población llegará a 2 240 habitantes?

100) La cantidad total N de puntos en un arreglo triangular con n filas se determina con la expresión $N = \frac{1}{2}n(n+1)$ (véase la figura adjunta). ¿Cuántas filas puede tener el arreglo si la cantidad total de puntos debe ser igual a 5 050?



Scanned by CamScanner

101) Romeo está enamorado de Julieta y quiere robarle un beso. Después que Julieta ha dado 20 pasos, Romeo comienza a caminar tras ella. Cuando ella da 5 pasos, él da 4 pasos. Pero 6 pasos de él, corresponden a 8 pasos de ella. Determine la cantidad de pasos que debe dar Romeo para alcanzar a Julieta y poder robarle un beso.

102) Un comerciante compra 10 carros pagando un total de $150 000. Vende los 4 primeros y obtiene una ganancia del 20% del costo de cada carro. Si él desea obtener una utilidad por la venta de todos los carros que llegue a los $75 000, calcule el valor al cual debe vender cada uno de los 6 carros restantes para que logre su objetivo.

103) Julio compra 2 bolígrafos, 3 portaminas y 5 cajas de minas por $7.90. Si cada bolígrafo cuesta el triple de cada caja de minas y cada portaminas cuesta 30 centavos más que una caja de minas; calcule el precio de cada bolígrafo, cada portaminas y cada caja de minas.

104) El dueño del negocio ofrece pagar a su operario $7 por cada camiseta bordada sin fallas y descontarle $2 por cada camiseta que presente aunque sea una pequeña falla. Si el dueño requiere 8 camisetas diarias y en una semana le paga al operario $320, determine la cantidad de camisetas de cada tipo que se elaboraron al final de los siete días de la semana.

Nota: las camisetas con fallas serán igualmente recibidas por el dueño.

105) Los socios de un club van a pagar una cuenta de $600 en partes iguales. Con 20 socios más, el costo para cada socio hubiera sido $1 menos. Determine el número de socios del club.

106) De un recipiente de 54 *l* de capacidad, lleno de ácido, se han vertido varios litros y se lo ha rellenado con agua. De esta mezcla, se vierte la misma cantidad de líquido derramado al inicio, quedando en la mezcla restante 24 *l* de ácido puro. ¿Qué cantidad de ácido fue vertida la primera vez?

107) Dos grifos de agua, A y B, llenan un estanque en 10 horas. Si solamente se abriera el grifo A, éste tardaría 5 horas más que el grifo B en llenar el estanque. Determine el total de horas que tardaría cada grifo por separado en llenar el estanque.

108) Una persona quiere invertir $60 000 en total. Puede invertir una parte en el banco A que le paga un interés anual del 8% e invertir la otra parte en el banco B que le paga un interés anual del 10%. Determine la cantidad necesaria que deberá invertir, durante un año en el banco B, para que reciba como pago una ganancia de $5 000.

109) Una piscina se puede llenar por un grifo en 4 horas, por otro en 3 horas; y se puede vaciar por un desagüe en 6 horas. Si se abren simultáneamente los dos grifos y el desagüe, ¿en qué tiempo se llenará la piscina?

Scanned by CamScanner

110) Un almacén de productos químicos tiene dos tipos de soluciones ácidas. Una de ellas con 25% de H_2SO_4 y la otra con el 15% de H_2SO_4. ¿Cuántos galones de cada tipo respectivamente deben combinarse para obtener 200 galones de una mezcla que contenga el 18% de H_2SO_4?

a) 60 y 140 gal
b) 80 y 120 gal
c) 100 y 100 gal
d) 110 y 90 gal
e) 30 y 170 gal

111) Dada la ecuación cuadrática:

$$mx^2 - m^3x + (1-m) = 0$$

a) Determine, de ser posible, los valores de m para que la suma de sus raíces reales sea igual a 1.
b) Determine, de ser posible, los valores de m para que el producto de sus raíces reales sea igual a 1.

112) Dada la ecuación $4x^2 - 4xy - y^2 = 1$, utilice la fórmula general para resolver y obtener:

a) x en términos de y.
b) y en términos de x.

113) Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$, se definen los predicados $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $t(x)$, $u(x)$ mientras que no se define el predicado $w(x)$. Si la cardinalidad del conjunto de verdad del predicado $w(x)$ es finita, resuelva la siguiente ecuación y determine los conjuntos de verdad de los predicados que se indican. Finalmente, determine un posible predicado para $w(x)$.

$$[\mathrm{N}(\mathrm{A}t(x))+\mathrm{N}(\mathrm{A}q(x))+\mathrm{N}(\mathrm{A}r(x))][\mathrm{N}(\mathrm{A}w(x))-\mathrm{N}(\mathrm{A}u(x))]+2(\mathrm{N}(\mathrm{A}w(x))-1)-\mathrm{N}(\mathrm{A}p(x)) = 0$$

$p(x): x^2+1=0$

$q(x): \dfrac{5x+13}{15} - \dfrac{4x+5}{5x-15} = \dfrac{x}{3}$

$r(x): \dfrac{2x-1}{2x+1} - \dfrac{x-4}{3x-2} = \dfrac{2}{3}$

$t(x): \dfrac{10x-7}{15x+3} = \dfrac{3x+8}{12} - \dfrac{5x^2-4}{20x+4}$

$u(x): \dfrac{4x-1}{5} + \dfrac{x-2}{2x-7} = \dfrac{8x-3}{10} - 1\dfrac{3}{10}$

Sugerencia.- Considere que $\mathrm{N}(\mathrm{A}w(x)) = z$.

3.11 Inecuaciones

114) Demuestre que si $a \geq 0 \wedge b \geq 0$, entonces $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

115) Demuestre que si $ab > 0$, entonces $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$

116) Demuestre que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$a^2 + 4b^2 + 3c^2 + 13 \geq 2a + 12b + 6c$$

Scanned by CamScanner

117) Demuestre que si $a+b+c \geq 0$, entonces $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$

118) Demuestre que si $a>0;\ b>0;\ c>0$, entonces:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

119) Demuestre que si $a \geq 0;\ b \geq 0;\ c \geq 0$ y $d \geq 0$, entonces:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

120) Sean $a,\ b \in \mathbb{R}^+$, demuestre que:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

121) Sea el conjunto $\mathrm{Re}=\mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $p(x):(4x+1)^2 < (1-2x)(x+4)$

b) $q(x):\left|\frac{x^2-2x+3}{x^2-5x+6}\right| > \frac{1}{5}$

c) $s(x):x^2+2|x|+1 \geq 0$

d) $t(x):\left|x^2+\frac{1}{3}|x|x+1\right| \leq 0$

e) $r(x):\sqrt{x^2+x+1} \geq 2x-4$

122) Sea el conjunto referencial $\mathrm{Re}=\mathbb{R}$ y el predicado:

$$p(x):\ x^2-x \leq 20$$

a) Determine los conjuntos $Ap(x)$ y $A^c p(x)$.
b) Represente estos conjuntos en diferentes rectas numéricas.

123) Sea el conjunto referencial $\mathrm{Re}=\mathbb{R}$ y el predicado:

$$p(x):\left|\frac{x+3}{4-x}\right| \leq 5$$

a) Determine los conjuntos $Ap(x)$ y $A^c p(x)$.
b) Represente estos conjuntos en diferentes rectas numéricas.

Scanned by CamScanner

124) Sea el conjunto referencial $\text{Re} = \mathbb{R}$ y el predicado:

$$p(x): \frac{2x+1}{2} - \frac{4x+3}{3} \geq 0$$

a) Determine los conjuntos $Ap(x)$ y $A^c p(x)$.
b) Represente estos conjuntos en diferentes rectas numéricas.

125) Realice lo requerido en cada literal:

a) Sean los intervalos $A = [-4, 6)$ y $B = [-7, 3)$. Grafique una recta numérica con el conjunto $C = A \cap B$; y, luego determine la cantidad de números enteros que pertenecen al conjunto C.
b) Sean los intervalos $D = (-3, 4]$ y $E = [-1, 5)$. Grafique una recta numérica con el conjunto $F = D \cap E$; y, luego determine la cantidad de números enteros que pertenecen al conjunto F.
c) Considere los elementos del conjunto $G = C \cap F$ de los literales anteriores; y, plantee una inecuación cuadrática para expresar matemáticamente el conjunto G.

126) La señora Moreno quiere invertir \$60 000. Ella puede escoger los bonos emitidos por el gobierno que ofrecen un interés del 8% o con un mayor riesgo, los bonos hipotecarios con un 10% de interés. Si invirtiera todo su dinero entre ambos bonos, ¿qué cantidad puede invertir en bonos hipotecarios de modo que reciba una ganancia anual de al menos \$5 500?

127) Resuelva las siguientes inecuaciones, considerando $x \in \mathbb{R}$:

a) $\left|\frac{x-1}{4}\right| + \frac{2x^2-1}{2} > 3 + x^2$

b) $\frac{x^2+3x-10}{x-2} > |3x-1|$

c) $x^2 - 3x + 2 > 0$

d) $-x^2 + x - 1 < 0$

e) $5(x-1)^2 + \frac{3x-1}{2} < 2(x^2+3) - \frac{x-1}{2}$

f) $a(x-1)^2 + 6(x-2)^2 > 5$; si $a = 0$

g) $\frac{x-1}{a-2} + x > \frac{x-1}{4}$

128) Si $\text{Re} = \mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $p(x): \frac{6}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} \geq 2 - \frac{x+4}{x-1}$

b) $q(x): 1 + \sqrt{2x+7} < x - 3$

c) $r(x): \frac{x-2}{\sqrt{2x-7}} \geq \sqrt{x-4}$

d) $s(x): \sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} > 2$

e) $t(x): \sqrt{x+3} - \sqrt{3x-2} < 7$

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

3.12 Inducción Matemática

129) **Expresión de Euler.-** Se conoce a n^2+n+41 como la expresión de Euler debido a los estudios que realizó sobre ella y los números primos. Note que si n es remplazada por 0 se obtiene 41 el cual es un número primo, y lo mismo ocurre si se reemplaza por 1, 2, 3, 4, obteniéndose en todos los casos números primos.

¿Se puede concluir entonces que la expresión de Euler es la expresión general de los números primos?

130) El binomio x^n-1, $\forall n \in \mathbb{N}$ fue uno de los más interesantes para los matemáticos ya que al estudiar estas factorizaciones para muchos valores particulares de n notaron que, en cada caso, el valor absoluto de los coeficientes de los factores nunca excedía al número 1, es decir:

$$n=1\ ;\ (x-1)$$
$$n=2\ ;\ (x^2-1)$$
$$n=3\ ;\ (x-1)\,(x^2+x+1)$$
$$n=4\ ;\ (x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)$$

¿Se puede asegurar entonces que siempre el valor absoluto de los factores será uno? Utilizando un software matemático factorice la expresión cuando $n = 105$ y verifique este comportamiento. La generalización correspondiente para cualquier número natural n se le atribuye a V. Ivanov en el año 1941.

131) Demuestre que el conjunto de verdad de los siguientes predicados corresponde a los números naturales:

a) $p(n):1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=\dfrac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$

b) $q(n):1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

132) Demuestre que:

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1};\ x\neq 1;\forall n\in\mathbb{N}$$

133) Demuestre que para todos los números naturales, se cumple que:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Scanned by CamScanner

134) Demuestre que para todos los números naturales, se cumple que:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

135) Demuestre que para todos los números naturales, se cumple que:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

136) Demuestre que para todos los números naturales, se cumple que:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$$

137) Utilizando el teorema de inducción demuestre que para todos los números naturales, se cumple que:

a) $4^n+15n-1$ es divisible por 9.
b) $3^{2n+1}+2^{n+2}$ es divisible por 7.
c) n^3+5n es divisible por 6.
d) $5^{2n+1}+7^{2n+1}$ es divisible por 6.

138) Demuestre que para todos los enteros no negativos n, se cumple la siguiente identidad:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{1+x^{2^{n-1}}}=\frac{1}{1-x}+\frac{2^n}{1-x^{2^n}};\ x\neq 1,\ x\neq -1$$

139) Demuestre que la suma de los cubos de 3 números naturales sucesivos es divisible por 9.

140) Demuestre que la suma de los cubos de los n primeros números naturales es:

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

141) Demuestre que $3^{2n+1}+40n-67$ es divisible por 64.

3.13 Técnicas de Conteo

142) El valor de verdad de la proposición: "Si 10! es el número de segundos en 6 semanas, entonces 11! es el número de segundos en siete semanas o es mayor al número de segundos en un año", es:

a) Verdadero b) Falso

143) Se tienen 6 frutas diferentes para preparar jugos con dos o tres de ellas. La cantidad de jugos diferentes que se pueden hacer con estas características es igual a:

a) 5
b) 6
c) 35
d) 150
e) 300

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

144) Una caja de 20 piezas contiene 3 defectuosas. Se desea un grupo de 5 piezas por requerimiento de producción. Entonces el número de grupos diferentes que se pueden formar y que contengan las 3 piezas defectuosas es:

a) $\binom{20}{5}$

b) $\binom{20}{3}$

c) $\binom{17}{3}$

d) $\binom{17}{2}$

e) $\binom{15}{2}$

145) Demuestre que siendo $n, k \in \mathbb{N}$, con $n > k+1$ se cumple que:

$$\binom{n}{k-1}+2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+2}{k+1}$$

146) Considere el conjunto S tal que $S=\mathbb{N}$ y la operación binaria $\oint$ definida por:

$$\forall a, b \in S, a \oint b = (ab)!$$

a) Determine si la operación es binaria interna.
b) Genere una tabla cuando $a \in [1, 3]$ y $b \in [1, 3]$
c) ¿Cuántos pares pueden formarse?
d) Analice si la operación cumple con la propiedad conmutativa.
e) Determine de ser posible el neutro de la operación.
f) Considere ahora $S_1 = 2n, \forall n \in \mathbb{N}$ ¿La operación es binaria interna?
g) Considere ahora $S_2 = 2n-1, \forall n \in \mathbb{N}$ ¿La operación es binaria interna?

147) En la memoria principal de una computadora, la información se almacena en celdas. Para identificar las celdas de memoria principal de la computadora, cada celda tiene asignado un nombre único conocido como su dirección. En algunas computadoras, una dirección se representa mediante una lista ordenada de ocho símbolos, en la que cada símbolo es uno de los bits, 0 o 1. Esta lista de ocho bits se denomina byte.

Determine la cantidad de bytes (direcciones de memoria) que se pueden formar con:

a) 8 bits.
b) 32 bits.
c) 64 bits.

Scanned by CamScanner

148) Juan Carlos se ha olvidado de su clave de cuatro dígitos del cajero automático. Determine, para los literales a) y b), ¿de cuántas formas como máximo puede ingresar la clave hasta dar con la correcta?:

a) Suponga que él recuerda que el primer dígito no es 3, ni 5, ni 8; el segundo dígito es un número impar; y, el tercero y cuarto dígitos son iguales entre sí.

b) Suponga que él recuerda que todos los dígitos son diferentes entre sí, pero que el primer dígito sumado al segundo dígito da por resultado un número múltiplo de 16; mientras que el tercer dígito es el número 6.

149) Cierta directiva debe estar conformada por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, los cuales pueden ser elegidos de un grupo de cuatro hombres y cinco mujeres. Si al menos dos de los integrantes deben ser mujeres, determine la cantidad de formas diferentes en que se puede conformar esta directiva.

150) En una empresa se desea que 4 productos sean identificados por sus clientes de acuerdo al color de su empaque. Si hay 9 colores que fueron seleccionados por los clientes potenciales como sus favoritos, determine el número de maneras diferentes para escoger los colores que representarán a sus 4 productos.

151) De un grupo de 7 personas se va a elegir 1 presidente, 1 vicepresidente, 1 secretario y 2 vocales, los 2 últimos con igual jerarquía. La cantidad de formas en que se puede llevar a cabo esta elección es:

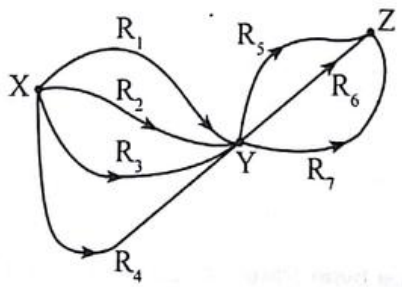
a) 21
b) 42
c) 210
d) 1260
e) 2520

152) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

a) $n! \leq n^n$

b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

153) Tres pueblos, designados como X, Y y Z, están intercomunicados por un sistema de carreteras de un sentido, como se muestra en la figura.



¿De cuántas formas se puede ir del pueblo X al pueblo Z?
Nota: Cada camino puede usarse sólo una vez.

Scanned by CamScanner

3 | Números Reales

3.14 Binomio de Newton ● ● • • •

154) Defina teorema del binomio, especificando el término general y sus elementos.

155) Si el coeficiente de x en el desarrollo del binomio $\left(x+\frac{1}{ax^2}\right)^7$ es igual a $\frac{7}{3}$, entonces el valor de $|a|$, es igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 9

156) El valor que debe tener k para que el cuarto término del desarrollo del binomio $(x^2-5)^k$ contenga la octava potencia de x, es igual a:

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

157) A partir del desarrollo del binomio $\left(x^4+\frac{1}{2x}\right)^{10}$ determine, de ser posible, el término independiente de x en el desarrollo del mismo.

158) Utilizando el teorema del binomio demuestre que para todos los números naturales, se cumple que:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

159) Determine el coeficiente de x^{50} en el desarrollo de $(x-a)^{100}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

160) Determine el coeficiente de x^{10} en el desarrollo de $(x+a)^{50}$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

161) Determine el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(x^3+x^2+x+1)^3$.

162) Determine el coeficiente de x^n en el desarrollo de $(x^n-a^n)^n$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

163) A partir del desarrollo del binomio $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, se construye la siguiente tabla:

$(a+b)^n$		Desarrollo del binomio
$n=0$	$(a+b)^0$	1
$n=1$	$(a+b)^1$	$a+b$
$n=2$	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
$n=3$	$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$n=4$	$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
:	:	:
:	:	:

Con base en el patrón mostrado, realice lo siguiente.

a) Complete la tabla hasta $n = 10$.
b) Si se disponen los coeficientes del desarrollo del binomio, se tendrá la estructura del Triángulo de Pascal. Construya dicho triángulo hasta $n = 10$, identificando para ello el patrón a seguir.
c) Construya el Triángulo de Pascal hasta $n = 10$ tomando como referencia los coeficientes del binomio expresados en función de las combinaciones, es decir, al primer coeficiente del desarrollo le corresponderá 1, o sea $\binom{n}{0}$.
d) Con el Triángulo de Pascal, sume los coeficientes de las filas por cada nivel y comente los resultados obtenidos.

3.15 Sucesiones

164) **Progresión armónica.-** Se conoce como progresión armónica si se tienen tres términos consecutivos a, b, c que cumplen con la siguiente condición:

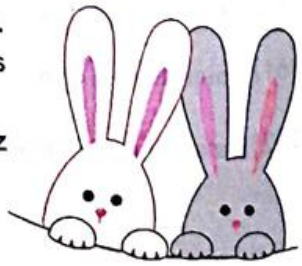
$$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}, b \neq c \wedge c \neq 0$$

Además se sabe que si la progresión es armónica, entonces los recíprocos de sus términos forman una progresión aritmética y viceversa.

Estructure un ejemplo.

165) Se pretende determinar una expresión para contabilizar la cantidad de parejas de conejos que existen en una granja al cabo de n meses, partiendo de los siguientes supuestos:

- ✓ Al principio, se cuenta con dos crías de conejo (macho y hembra) recién nacidas.
- ✓ Los conejos inician su etapa reproductiva a partir de los dos meses de vida.
- ✓ Esta especie de conejos se caracteriza por la monogamia.
- ✓ Cada mes nace un par de crías (macho y hembra) de las parejas que se encuentran en etapa reproductiva.
- ✓ La fase reproductiva de los conejos no cesa una vez iniciada.
- ✓ La mortalidad de los conejos no será considerada.



Scanned by CamScanner

a) Compruebe mediante un gráfico que la cantidad de parejas existentes al cabo de n meses está dada por la siguiente expresión, conocida como la sucesión de Fibonacci:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,; f_1 = 1,\ f_2 = 1;\ \forall n \geq 3$$

b) Compruebe mediante el siguiente procedimiento que la relación de un valor cualquiera de la sucesión con su antecesor se aproxima a la relación áurea o número de DIOS (φ).

I) Enliste los 20 primeros términos de la sucesión.
II) A partir de los 20 términos enlistados, determine los cocientes de la forma:

$$\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}},\ \forall n \geq 3$$

III) Verifique con la ayuda de una calculadora que conforme el valor de n aumenta, $\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}$ tiende a φ, siendo $\varphi \approx 1.6180339$.

c) Bajo los supuestos dados, determine la cantidad de conejos que existirán al cabo de un año.

166) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas:

a) La suma de los 100 primeros números pares positivos es 5 050.
b) Si $f(n)$ es una sucesión aritmética, entonces $f^2(n)$ también lo es.
c) Si 1, 3, 5, 7, 9,... son términos de una progresión aritmética, entonces su término general está dado por $f(n) = 2n - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
d) Si $f(n)$ es una progresión aritmética, entonces no es geométrica.
e) Si $f(n)$ es una progresión, entonces esta sólo puede ser geométrica o aritmética.

167) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 5\,050$

b) $\dfrac{\binom{20}{10}}{\binom{21}{10}} = \dfrac{11}{21}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}_0, \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = n(n-1)!$

e) $2\binom{100}{2} = 1000$

Scanned by CamScanner

El número y su sucesor

Determine el menor número tal que al sumar los dígitos de dicho número con los del número siguiente, el resultado sea múltiplo de 2016.

Cuando haya establecido el número, propóngase identificar el menor número tal que la suma de sus dígitos y los del número siguiente sea múltiplo de 2027.

Se busca...

Determinar todos los enteros positivos n tales que:

$$\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n}=\frac{2016}{2017}$$

Scanned by CamScanner

4 | Funciones de una Variable Real

Desafío

Las funciones compuestas

Se definen las funciones de variable real, siendo $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$:

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

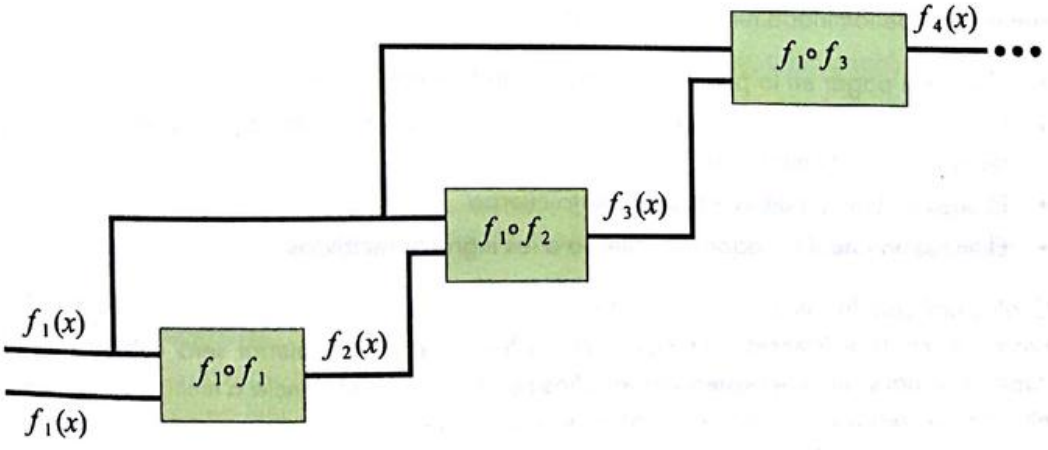
$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x)$$

$$f_3(x) = (f_1 \circ f_2)(x)$$

$$f_4(x) = (f_1 \circ f_3)(x)$$

y así sucesivamente.

A continuación se muestra una representación gráfica de las operaciones descritas:



A partir de lo definido, calcule: $f_{2016}(2) + f_{2017}(2)$.

Si no puede resolver este desafío, busque la solución en la página correspondiente del presente capítulo.

pág. 335

Scanned by CamScanner

Introducción

Las funciones constituyen un tema de relevancia en el estudio de la matemática. Este concepto que ha estado en análisis durante varios siglos, fue introducido por Descartes en el año 1637, para quien, una función representaba cualquier potencia entera positiva de una variable x. Por su parte, Leonhard Euler identificó a la función como una ecuación que incluía variables y constantes. Con el paso del tiempo, su uso en el estudio de las ecuaciones sobre el flujo de calor, condujo a una definición muy amplia gracias a Dirichlet, la cual describe a una función como una regla de correspondencia entre dos conjuntos.

Paralelamente al desarrollo matemático de las funciones, diversas situaciones del mundo que nos rodea pueden ser representadas utilizando este concepto. Supongamos que deseamos conocer el valor a pagar cada mes por la planilla de agua potable. Podremos notar en el detalle de la factura que existe un cargo fijo por tipo de vivienda, un cargo variable por el consumo (en metros cúbicos de agua) que se detecta en los medidores; y, cuando procede, otro cargo adicional por el alcantarillado sanitario (pues depende de que la vivienda lo tenga o no). Estos rubros nos permiten calcular por intermedio de una expresión algebraica, cuál sería el valor que la empresa encargada de nuestra localidad deberá facturar mensualmente.

En la vida cotidiana existen otras circunstancias más sencillas, en las cuales están presentes solamente un par de magnitudes, las mismas que pueden representarse con el objeto matemático denominado función, tales como:

- El valor a pagar en la panadería y la cantidad de panes que se adquieran.
- El tiempo que le toma a un atleta dar una vuelta completa a una pista que tiene determinadas dimensiones.
- El peso en función de la masa de cierto cuerpo.
- El impuesto anual a pagar de acuerdo a los ingresos recibidos.

Cualquiera sea la situación, abstracta o real, es muy importante que se cumplan las propiedades de existencia y unicidad de las funciones. Este material será cubierto en el capítulo actual y aunque posteriores estudios pueden hacer referencia a múltiples variables, en este capítulo nos vamos a enfocar en el estudio de funciones de una sola variable, las cuales estarán basadas en expresiones algebraicas con todas las restricciones ya analizadas en el manejo de los números reales; sin embargo, nuevos conceptos serán introducidos debido al uso de logaritmos y exponentes. Lo interesante es que al finalizar el análisis de este capítulo, nos sentiremos con más fortalezas en la consolidación del conocimiento matemático funcional de precálculo.

Scanned by CamScanner

4 | Funciones de una Variable Real

4.1 Definición, dominio y rango

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar con sus propias palabras el concepto de función de variable real y los elementos que constituyen su regla de correspondencia.
- Dada una expresión que relaciona dos números reales, determinar un conjunto de partida que convierta la relación en función.
- Dada la regla de correspondencia de una función de variable real, identificar su rango.

El concepto de función aparece con frecuencia, y de manera transversal, en el estudio de contenidos vinculados con álgebra, trigonometría, geometría analítica, estadística, entre otros. Así mismo, en los cursos de cálculo ocupa un lugar central, ya que constituye una base fundamental en la definición de temas como límites, derivadas e integrales.

Definición 4.1 (Función de una variable real)

Sean dos conjuntos no vacíos X, Y subconjuntos de los números reales, una función de variable real f de X en Y es una relación que incluye a X como conjunto de partida, a Y como conjunto de llegada y una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. Esto se representa simbólicamente por:

$$f: X \mapsto Y$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

A la variable x se la denomina **variable independiente**; y, a la variable y se la conoce como **variable dependiente**.

De acuerdo a las definiciones dadas en el capítulo 2 de este libro, todos los elementos del conjunto de partida X deben estar relacionados con algún elemento de Y, de esta forma, tanto X como Y pueden ser el conjunto de los números reales o un subconjunto del mismo.

Además, la definición de función asegura que no pueden existir dos valores diferentes de y (variable dependiente) para un mismo valor de x (variable independiente). A la variable x de una función a veces se la denomina **argumento** de la función. Pensar en la variable independiente como un argumento, en ocasiones facilita la aplicación de la regla de correspondencia de la función.

Cualquier símbolo puede ser utilizado para representar las variables independiente y dependiente. Por ejemplo, si f de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ es la función cúbica, entonces puede ser definida por $f(x) = x^3$, $f(t) = t^3$ o $f(z) = z^3$. Las anteriores reglas de correspondencia son idénticas: cada una indica que debemos obtener el cubo de la variable independiente.

Scanned by CamScanner

El conjunto de partida de una función puede presentar restricciones. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ está definida para todos los números reales; sin embargo, si f es utilizada como la regla de correspondencia para obtener el área de la superficie de un cuadrado, conociendo la longitud x de su lado, debemos restringir el valor x solamente para los números reales positivos, ya que la medida de la longitud de un lado no puede ser negativa ni cero.

Definición 4.2 (Dominio de una función de variable real)

Sea $f: X \mapsto Y$ una función de variable real, el conjunto X para el cual está definida, constituye un dominio de la función. Este conjunto se representa simbólicamente por $dom\, f$.

Se puede expresar el dominio de una función mediante la notación de intervalos o de conjuntos. En esta obra, cada vez que se requiera el dominio de una función cuya regla de correspondencia es conocida, se hará referencia al conjunto de todos los números reales para los cuales esté definida, actividad que se reduce en la mayoría de los casos, a la manipulación de expresiones algebraicas; por ejemplo:

- Si $f(x)$ contiene un cociente, éste no existe si el denominador se hace cero, por lo que se deben excluir del dominio aquellos valores de x que provocan esta situación.
- Si $f(x)$ contiene una raíz de índice par, ésta existirá sólo si el radicando es positivo o cero.

Existen otras restricciones que se aplican a funciones de variable real, las cuales se irán analizando en secciones posteriores.

En general, al utilizar una letra para denotar una función (por ejemplo f), o indicar sólo su regla de correspondencia, estará implícita la existencia de los conjuntos de partida y de llegada sobre los cuales se establece la relación.

Ejemplo 4.1 Dominio de una función de variable real.

Determine el dominio de la función $f(x) = 4x + 3$.

Solución:

Resulta evidente que la regla de correspondencia dada no presenta restricción alguna.

Por lo tanto, $dom\, f = \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.2 Dominio de una función de variable real.

Determine el dominio de la función $f(x) = \dfrac{2x+5}{3-x}$.

Solución:

El cociente $\dfrac{2x+5}{3-x}$ está definido cuando $3 - x \neq 0$, es decir, cuando $x \neq 3$.

Por lo tanto, $dom\, f = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.3 Dominio de una función de variable real.

Determine el dominio de la función $f(x)=\sqrt{4-|x+1|}$.

Solución:

El radical de índice par está definido cuando $4-|x+1|\geq 0$.

Esto es, $-|x+1|\geq -4 \Rightarrow |x+1|\leq 4 \Rightarrow -4\leq x+1\leq 4 \Rightarrow -5\leq x\leq 3$

Es decir, $dom\, f=[-5,3]$.

Ejemplo 4.4 Dominio de una función de variable real.

Determine el dominio de la función $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{|x-1|-2}}$.

Solución:

Como el radical está en el denominador, la expresión $|x-1|-2$ solamente puede ser positiva y no puede tomar el valor de cero.

$|x-1|-2>0$
$|x-1|>2$
$(x-1>2)\vee(x-1<-2)$
$(x>3)\vee(x<-1)$

Por lo tanto, $dom\, f=(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

Una función puede ser expresada mediante una regla de correspondencia que permita calcular las imágenes de los elementos del dominio. Estos valores calculados y definidos en el conjunto de llegada de la función, conforman su rango.

Definición 4.3 (Rango de una función de variable real)

Sea $f: X \mapsto Y$ una función de variable real, el conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio, constituye el rango de la función. Este conjunto se representa simbólicamente por $rg\, f$ y es un subconjunto de Y.

Scanned by CamScanner

Un procedimiento para obtener el rango de una función $y = f(x)$, es el siguiente:

- Despejar algebraicamente la variable x en la función.
- El rango será el conjunto de valores que puede tomar la variable y, una vez despejada la variable x.

Ejemplo 4.5 Rango de una función de variable real.

Determine el rango de la función $f(x) = 2x - 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

Siguiendo el procedimiento antes descrito, tenemos:

$y = 2x - 3$

$x = \dfrac{y+3}{2}$

Resulta evidente que para todo valor de y, existe un valor de x.

Por lo tanto, $rg\, f = \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.6 Rango de una función de variable real.

Determine el rango de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, $\forall x \neq 0$.

Solución:

$y = \dfrac{x+1}{x}$ Reemplazamos $f(x)$ por y.

$xy = x + 1$ Multiplicamos ambos miembros por x.

$x(y-1) = 1$ Factorizamos.

$x = \dfrac{1}{y-1}$ Despejamos x.

El cociente $\dfrac{1}{y-1}$ está definido cuando $y - 1 \neq 0$, es decir, cuando $y \neq 1$.

Por lo tanto, $rg\, f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Ejemplo 4.7 Rango de una función de variable real.

Determine el rango de la función $f(x) = x^2 - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

Solución:

$y = x^2 - 1$ Reemplazamos $f(x)$ por y.

$x^2 = y + 1$ Despejamos x.

$\sqrt{x^2} = \sqrt{y+1}$ Extraemos la raíz cuadrada.

$|x| = \sqrt{y+1}$ Aplicamos la definición de valor absoluto.

El radical está definido cuando $y + 1 \geq 0$, es decir, cuando $y \geq -1$.

Por lo tanto, $rg\, f = [-1, +\infty)$.

Ejemplo 4.8 Rango de una función de variable real.

Determine el rango de la función $f(x) = \dfrac{1}{|x+2|}$, $\forall x \neq -2$.

Solución:

$y = \dfrac{1}{|x+2|}$ Reemplazamos $f(x)$ por y.

$|x+2| = \dfrac{1}{y}$ Manipulación algebraica.

El cociente está definido cuando $y \neq 0$. Pero note que la regla de correspondencia tiene un valor absoluto, lo cual no permite elementos negativos en el rango.

Por lo tanto, $rg\, f = (0, +\infty)$.

En la primera parte de este capítulo, hemos visto que una función se puede expresar verbal o algebraicamente enunciando su regla de correspondencia, aunque también se puede representar numéricamente a través de una tabla de valores, o gráficamente por una figura.

Esta última característica será analizada en la siguiente sección.

Scanned by CamScanner

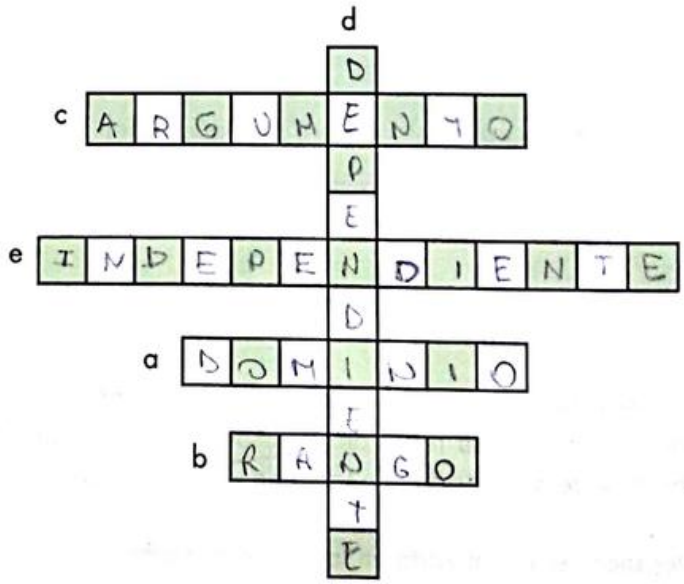
1) Se suele pensar que las matemáticas no tienen relación con áreas como medicina o biología, pero usted sabe que no es cierto. Proponga dos ejemplos de funciones relacionadas con alguna de estas áreas.

2) Complete el siguiente crucigrama, basándose en la palabra faltante en cada oración:

a) Al ... de una función también se lo conoce como "conjunto de partida".
b) Al ... de una función se lo denomina "conjunto de las imágenes".
c) Siendo $f(x)$ una función, a la variable x se la conoce también como ... de la función.

La fuerza de atracción magnética entre una varilla de acero y un imán, en relación con la distancia que los separa, es una función. Entonces:

d) La fuerza de atracción magnética es la variable ...
e) La distancia es la variable ...



Scanned by CamScanner

4 | Funciones de una Variable Real

3) Determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-18}$ =

$x^2-18\geq 0$

$\sqrt{x^2}\geq\sqrt{18}$

$x\geq \pm\begin{matrix}18\\18\end{matrix}$

$-18 \quad 0 \quad 18$

$(-\infty,-18]\cup[18,+\infty)$

b) $g(x)=\dfrac{\pi\cdot e-\sqrt{9-x^2}}{1+2x}$

$1+2x=0$

$2x=-1$

$x=-\frac{1}{2}$

$x=-0,5$

Dom f(x) $\{-\frac{1}{2}\}$

4) Determine el rango de la siguiente función: $f(x)=3(x-7)^{-2}+k;\ k\in\mathbb{R}$.

$3(x-7)^2+k \quad k\in R$

$y=3(x-7)^{-2}+k$

$y-k=3(x-7)^{-2}$

$y-k=\dfrac{3}{(x-7)^2}$

$\sqrt{(x-7)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{y-k}}$

$(x-7)=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{y-k}}$

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{y-k}}+7$

ran f. $y-k\geq 0$

$y\geq k$

ran g f' $(k,+\infty)$

5) Dada la función $f(x)=3(x-7)^{-2}+2e$, determine el conjunto $I=(dom\,f)\cap(rg\,f)$.

dom f(x) $(x\in\mathbb{R})$

$\sqrt{x-7}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{y+2e}}$

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{y+2e}}-7$

$I=\mathbb{R}\cap(-2e,+\infty)$

$I=\{+\infty\}$

$y\geq -2e \quad (-2e,+\infty)$

Scanned by CamScanner

4.2 Representación gráfica de funciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una gráfica, reconocer si representa a una función de variable real.
- Dada la gráfica de una función de variable real, identificar su dominio y rango como los intervalos de proyección de la gráfica sobre los ejes coordenados.
- Dada la gráfica de una función de variable real, reconocer sus intersecciones con los ejes coordenados.
- Dada la gráfica de una función de variable real, determinar elemento(s) del dominio que corresponde(n) a un valor del rango especificado.

Un electrocardiograma es un examen efectuado por un dispositivo que realiza la gráfica de una función basada en los impulsos eléctricos producidos por el corazón de una persona en cada instante de tiempo. Examinando tal gráfica, un médico puede determinar si el corazón de la persona está o no saludable.

De las representaciones gráficas de una función, quizás la más importante es la que se realiza en el plano cartesiano (en honor a Descartes).

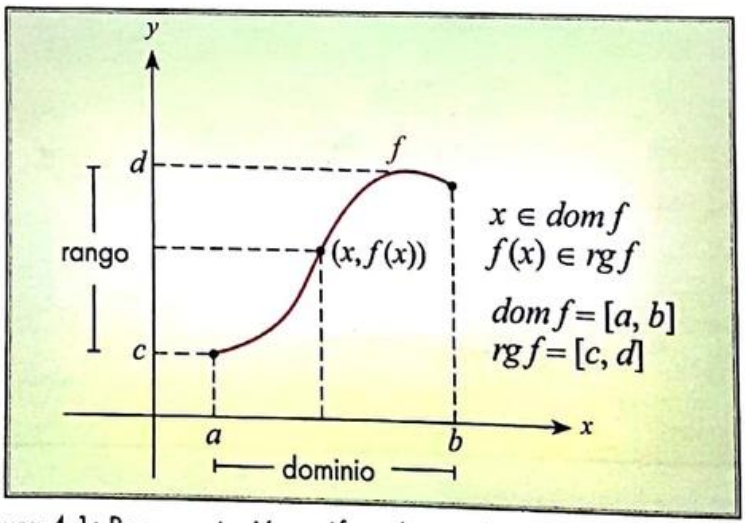


Figura 4.1: Representación gráfica de una función de variable real.

En la mayoría de los casos no es posible representar todos los pares ordenados $(x, f(x))$ que constituyen la función de variable real, puesto que son infinitos. Por lo tanto, para graficar una función se representan unos cuantos puntos significativos y se dibuja el resto de la gráfica de acuerdo a las características de cada función.

Scanned by CamScanner

Definición 4.4 (Gráfica de una función de variable real)

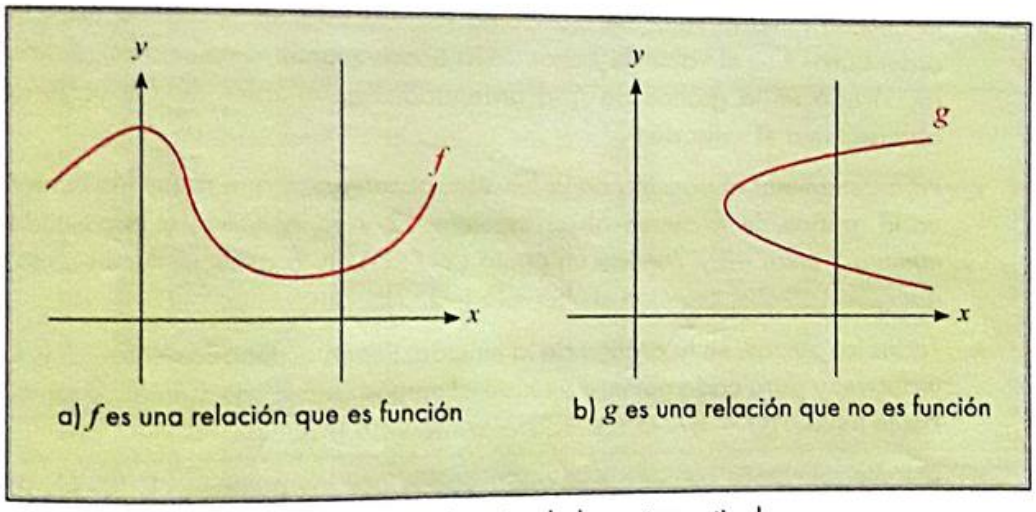
Si f es una función de A en B, entonces su gráfica es el conjunto de puntos o pares ordenados de A x B, tales que sus coordenadas (x, y) pertenecen a f.

La convención a utilizar es que los elementos del conjunto A se representen sobre una recta real horizontal, y los del conjunto B sobre una recta real vertical.

Este par de rectas conforma el denominado sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, identificándose a la recta horizontal como eje X o eje de las **abscisas**; y, a la recta vertical como eje Y o eje de las **ordenadas**. La intersección de estas rectas se conoce como el origen del sistema de graficación y sus coordenadas son $(0, 0)$.

Teorema 4.1 (Criterio de la recta vertical)

Una curva en el plano cartesiano representa una función, si cualquier recta vertical interseca la gráfica, como máximo, en un punto.



a) f es una relación que es función

b) g es una relación que no es función

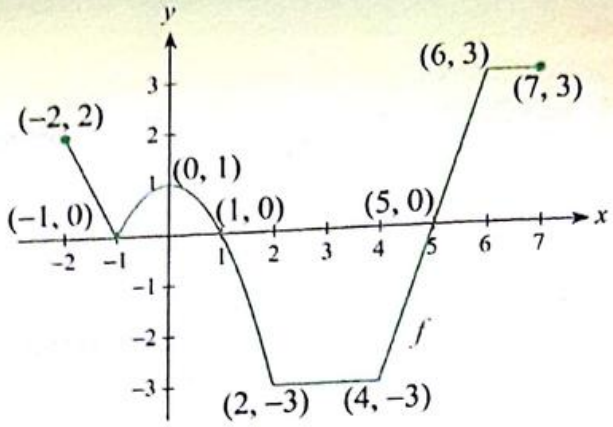
Figura 4.2: Criterio de la recta vertical.

Utilizando este teorema, es sencillo verificar cuándo una gráfica representa una función y cuándo no lo es. Observe la figura 4.2; de acuerdo al criterio anterior, la relación g no es una función de variable real, mientras que f sí lo es.

Ejemplo 4.9 Gráfica de una función de variable real.

Sea f la función cuya gráfica está dada en la figura adjunta:

Scanned by CamScanner



Determine:

- El valor de la función cuando $x = -2, x = 2, x = 6$.
- El dominio de la función.
- El rango de la función.
- Las intersecciones con los ejes coordenados.

Solución:

- Como $(-2, 2)$ está en la gráfica de f, la ordenada 2 es el valor de f cuando la abscisa toma el valor de -2. Como $(2, -3)$ está en la gráfica de f, la ordenada -3 es el valor de f cuando la abscisa toma el valor de 2. Como $(6, 3)$ está en la gráfica de f, la ordenada 3 es el valor de f cuando la abscisa toma el valor de 6.
- Para determinar el dominio de la función, observamos que todos los puntos en la gráfica de f tienen abscisas entre -2 y 7, inclusive; y para cada número x entre -2 y 7 existe un punto $(x, f(x))$ en la gráfica. Por lo tanto, $dom\, f = \{x / -2 \leq x \leq 7\}$ o el intervalo $[-2, 7]$.
- Todos los puntos, en la gráfica de la función, tienen ordenadas entre -3 y 3, inclusive; y para cada número y existe al menos un número x en el dominio. Por lo tanto, $rg\, f = \{y / -3 \leq y \leq 3\}$ o el intervalo $[-3, 3]$.
- Las intersecciones con el eje X están dadas por los puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(5, 0)$. Por otra parte, la intersección con el eje Y está dada por el punto $(0, 1)$.

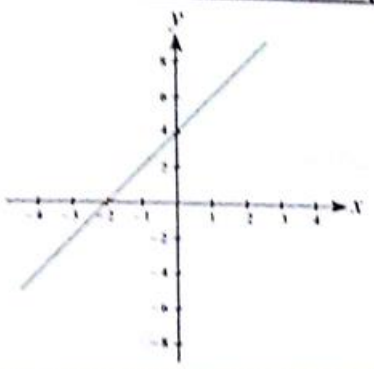
Resulta interesante estudiar el comportamiento de las funciones para identificar sus características más relevantes, tales como: unicidad en los elementos del rango, igualdad entre el rango y el conjunto de llegada, intervalos de crecimiento o decrecimiento (monotonía), puntos donde la función no está definida o tiene saltos (discontinuidad), puntos de intersección con los ejes coordenados, simetrías, comportamiento idéntico de funciones en determinados intervalos, valores máximos o mínimos, cotas superiores o inferiores; y, tendencias de los valores de la función.

Scanned by CamScanner

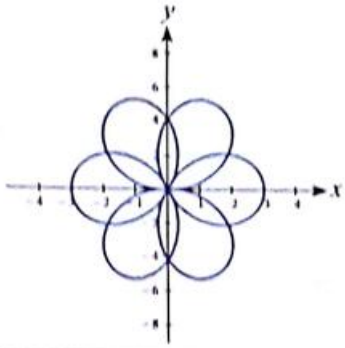
Autoevaluación

1) A continuación se presentan las gráficas en el plano cartesiano de algunas relaciones. Para cada casilla, coloque un ✓ si la relación es una función y una X si no lo es.

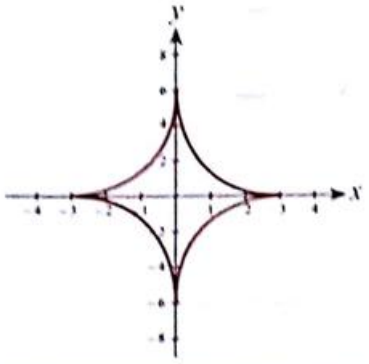
a) Relación 1 ✓



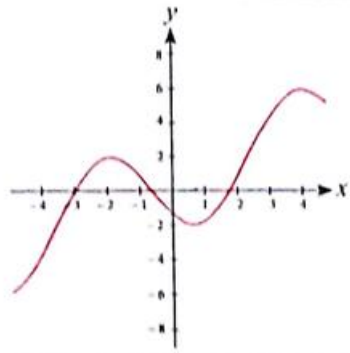
b) Relación 2 X



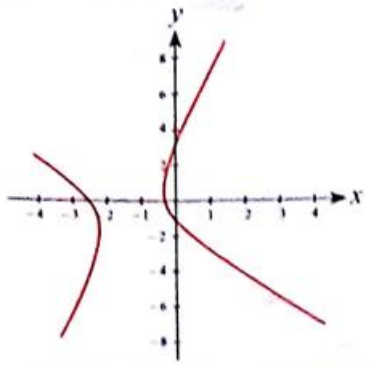
c) Relación 3 X



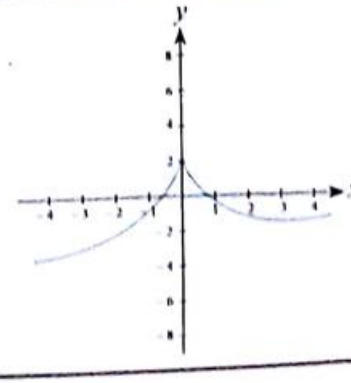
d) Relación 4 ✓



e) Relación 5 X

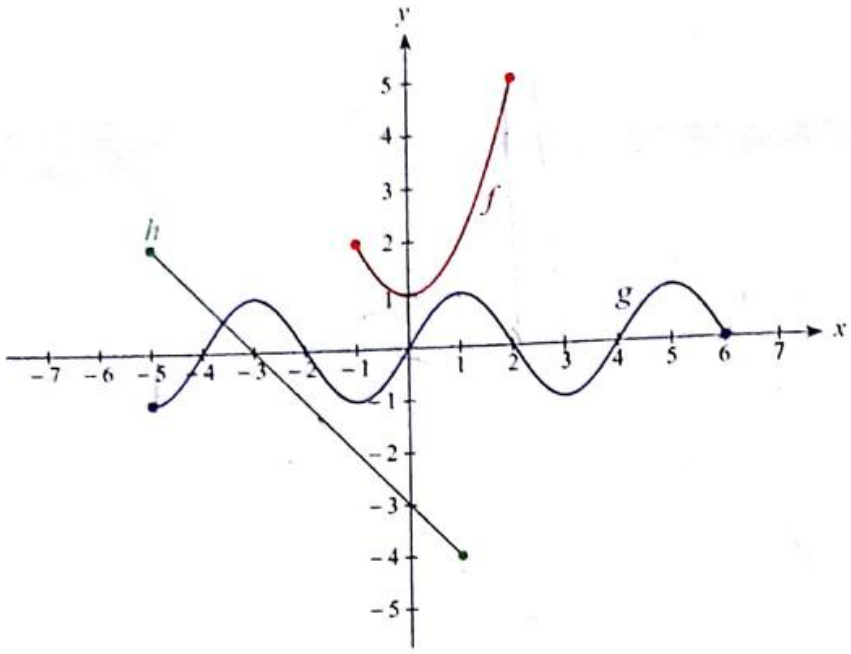


f) Relación 6 ✓



Scanned by CamScanner

2) Considere las funciones de variable real f, g y h graficadas en el plano cartesiano.

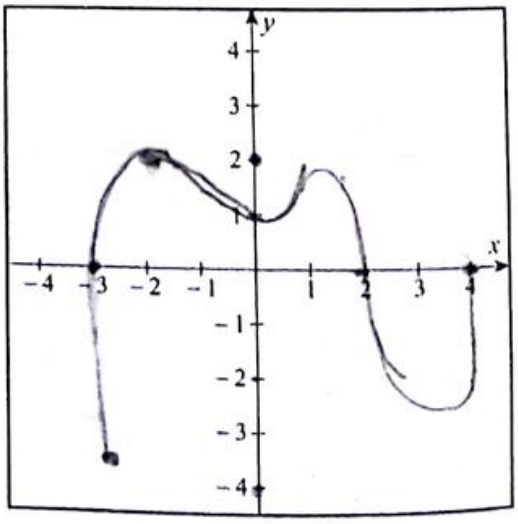


Complete la siguiente tabla:

	$x = 1$ sólo si, $y =$?	$y = 1$ sólo si, $x =$?	Dominio	Rango
f	0	0	[1, 2]	[1, 5]
g	1	0	[-5, 6]	[-1, 1]
h	-3	-4	[-5, 1]	[-4, 2]

3) Bosqueje la gráfica de una función f que cumpla las siguientes características:

- $dom\, f = [-3, 4]$
- $rg\, f = [-4, 2]$
- Cuando $x = 0$, $y = 1$
- $y = 0$, sólo cuando $(x = -3)$ o $(x = 2)$
- La función alcanza su valor máximo en el punto $(-2, 2)$.



Scanned by CamScanner

4.3 Tipos de Funciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar y definir el concepto de función inyectiva, sobreyectiva, creciente, decreciente, estrictamente creciente, estrictamente decreciente, par, impar, acotada y periódica.
- Dada una función periódica, identificar su período fundamental.
- Dada la gráfica de una función de variable real, reconocer las características antes mencionadas.

4.3.1 Funciones Inyectivas

Utilizando la definición dada en el capítulo 2 y la representación gráfica de una función, tenemos que f es inyectiva si para cualquier elección de un número x que pertenece al dominio de f, existe exclusivamente un valor y en el rango.

En otras palabras, ningún valor y en el rango es imagen de más de un valor x en el dominio.

Estas funciones también son denominadas **uno a uno**.

Definición 4.5 (Función Inyectiva)

Una función $f: X \mapsto Y$ es inyectiva, si y sólo si para cualquier elección de números x_1 y x_2, si $x_1 \neq x_2$ en el dominio de f, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, esto es:

$$\forall x_1, x_2 \in X\ [(x_1 \neq x_2) \rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))]$$

Teorema 4.2 (Criterio de la recta horizontal)

Una curva en el plano cartesiano representa una función inyectiva, si y sólo si cualquier recta horizontal interseca su gráfica, como máximo, en un punto.

La aplicación de este teorema se puede observar en la figura 4.3. En el literal (a), la recta horizontal interseca a la gráfica en dos puntos distintos, (x_1, k) y (x_2, k), con la misma ordenada k. Por lo tanto, f no es inyectiva.

Scanned by CamScanner

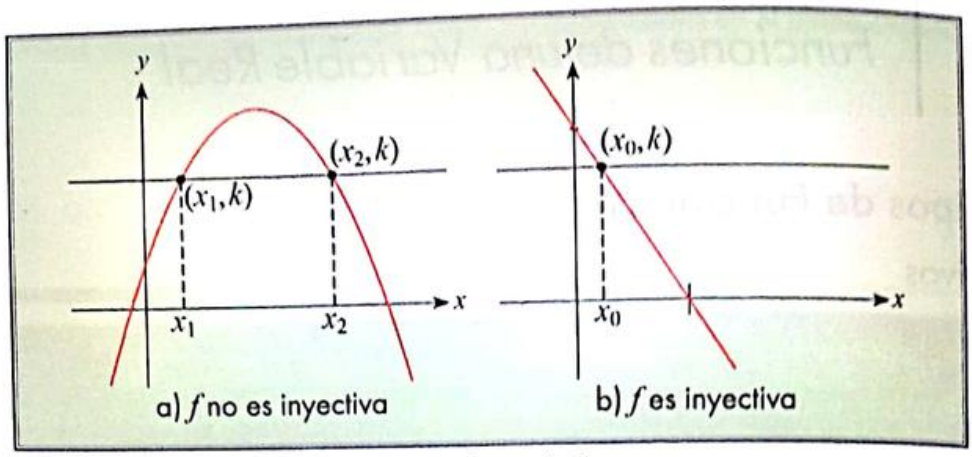


Figura 4.3: Gráficas de funciones.

Se puede observar también en la figura 4.3 (b) la gráfica de una función inyectiva.

4.3.2 Funciones Sobreyectivas

Utilizando la definición dada en el capítulo 2 y la representación gráfica de una función, tenemos que f es sobreyectiva si todos los elementos del conjunto de llegada están relacionados con por lo menos un elemento del dominio. Por lo tanto, el rango de f debe coincidir con el conjunto de llegada.

Definición 4.6 (Función Sobreyectiva)

Una función $f: X \mapsto Y$ es sobreyectiva, si y sólo si todo elemento de Y está relacionado con algún elemento de X, lo cual se representa por:

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ [y = f(x)]$$

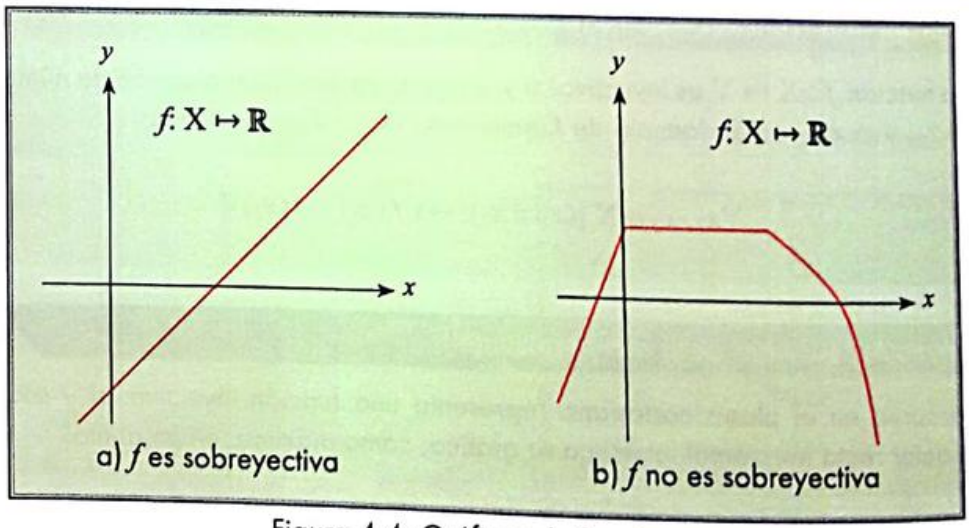


Figura 4.4: Gráficas de funciones.

La figura 4.4 (a) corresponde a la gráfica de una función sobreyectiva, mientras que la figura 4.4 (b) no lo es.

A partir de esta definición, se confirma que si f es sobreyectiva, $rg\, f = Y$.

Scanned by CamScanner

Es importante destacar que, para concluir que una función $f: X \mapsto Y$ es sobreyectiva, se tendrá que conocer previamente el conjunto de llegada Y.

Respecto a las características de inyectividad y sobreyectividad, puede ocurrir que una función tenga alguna de estas características, ambas o ninguna de ellas.

4.3.3 Funciones Crecientes

Quizás haya escuchado el viejo refrán: "Sólo existen dos cosas seguras en la vida, la muerte y los impuestos".

El impuesto a la renta que se debe pagar al estado ecuatoriano, depende del nivel de ingresos de la persona que tributa. Dicho valor se calcula a partir de la siguiente tabla (actualizada a marzo de 2016).

Fracción Básica (dólares)	Exceso hasta (dólares)	Impuesto Fracción Básica (dólares)	% Impuesto Fracción Excedente
0	11 170	0	0%
11 170	14 240	0	5%
14 240	17 800	153	10%
17 800	21 370	509	12%
21 370	42 740	938	15%
42 740	64 090	4 143	20%
64 090	85 470	8 413	25%
85 470	113 940	13 758	30%
113 940	En adelante	22 299	35%

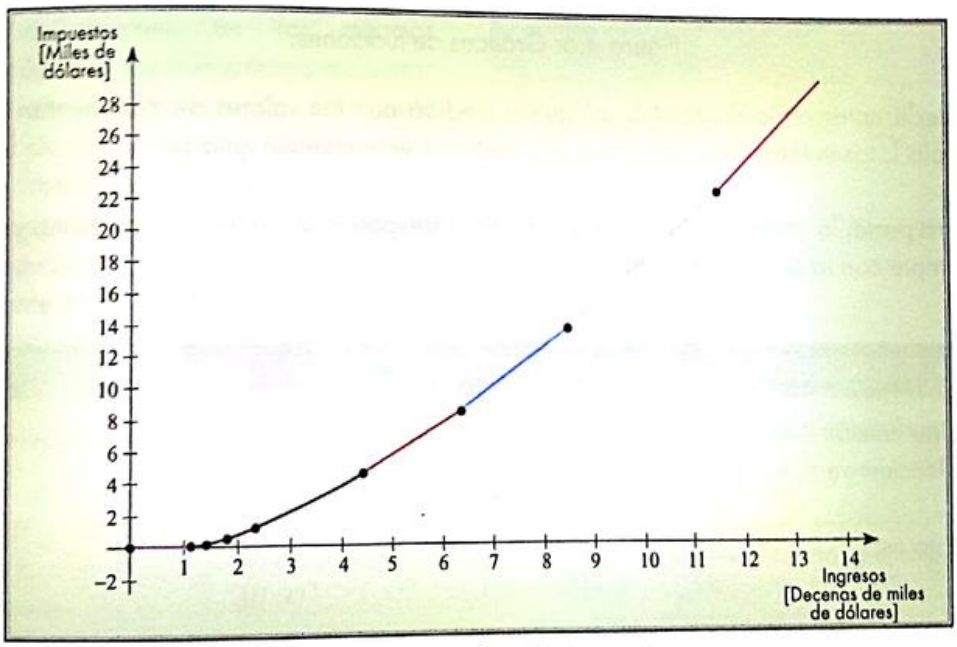


Figura 4.5: Gráfica de impuestos.

Scanned by CamScanner

Como se puede observar en la figura 4.5, mientras mayores sean los ingresos (eje horizontal) se debe pagar un porcentaje mayor por el impuesto a la renta (eje vertical), es decir, existe una relación directa de crecimiento entre las variables. Así como este ejemplo, existen otros con similares características.

Definición 4.7 (Función Creciente)

Una función f es creciente en un intervalo I, si y sólo si para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, siempre que $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Esto es:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}[(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))]$$

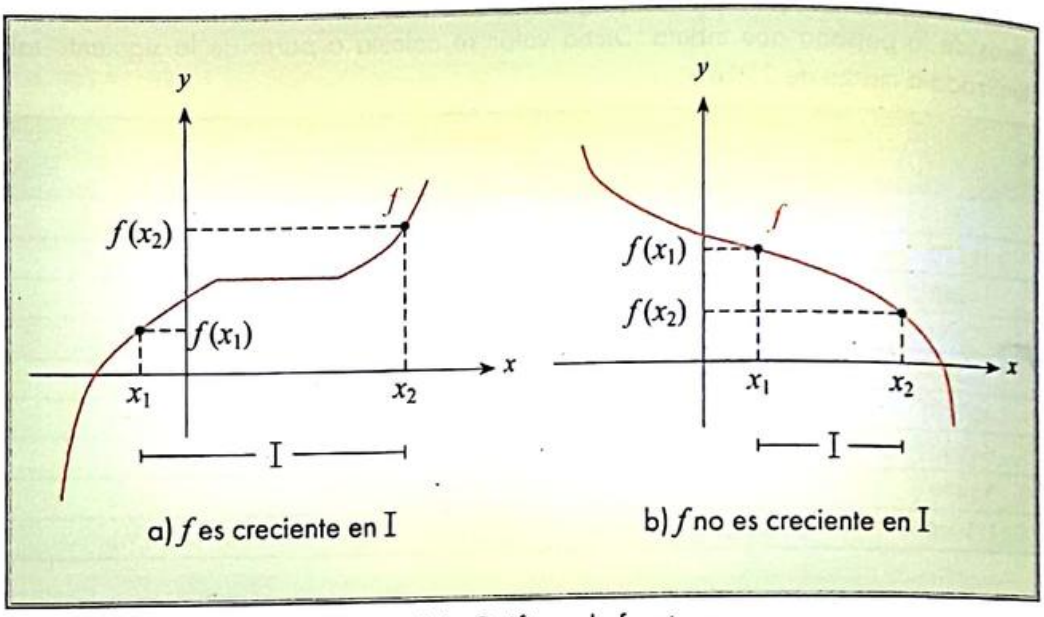


Figura 4.6: Gráficas de funciones.

Se puede notar en la figura 4.6 (a) que a medida que los valores de x aumentan en el intervalo I, los valores de $f(x)$ también aumentan o se mantienen iguales.

Por otra parte, la gráfica de la figura 4.6 (b) no corresponde a una función creciente, ya que no cumple con la definición dada.

Definición 4.8 (Función Estrictamente Creciente)

Una función f es estrictamente creciente en un intervalo I, si y sólo si para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, siempre que $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) < f(x_2)$.

Esto es:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{I}[(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) < f(x_2))]$$

Scanned by CamScanner

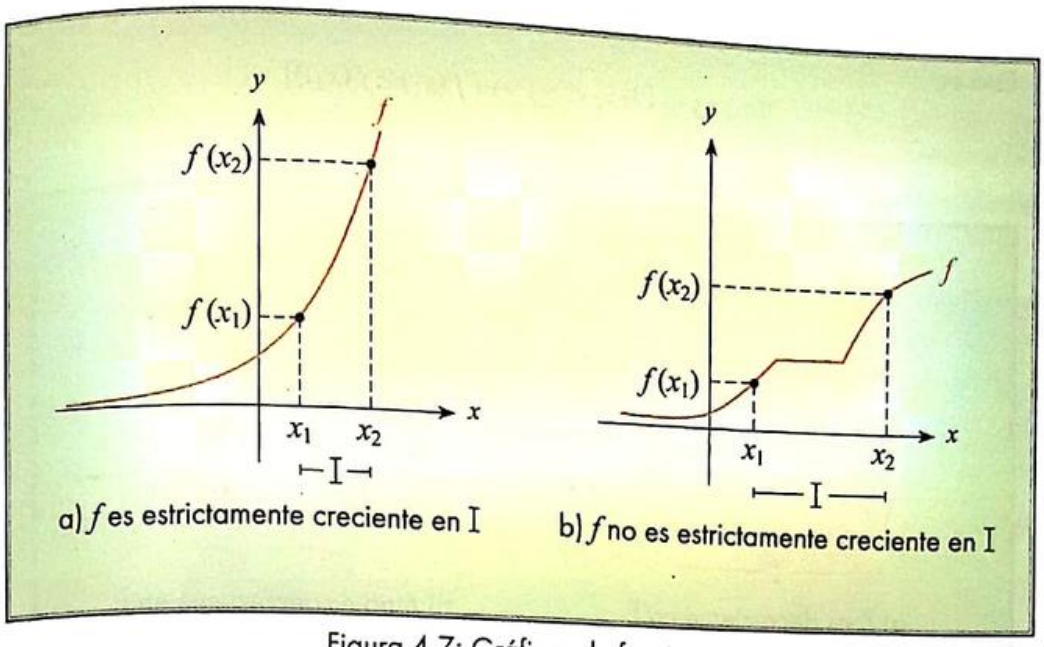


Figura 4.7: Gráficas de funciones.

En la gráfica de la figura 4.7 (a) se aprecia que a medida que los valores de x aumentan en el intervalo I, los valores de $f(x)$ únicamente aumentan. Por lo tanto, f es estrictamente creciente. La figura 4.7 (b) nos indica que la función es creciente, pero no estrictamente creciente.

4.3.4 Funciones Decrecientes

En aplicaciones de las ciencias económicas, específicamente en cuanto a la oferta y la demanda, para cada nivel de precio de un producto, existe una cantidad correspondiente de ese producto que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) durante algún período. Por lo general, a mayor precio del producto, la cantidad demandada es menor; cuando el precio baja, la cantidad demandada aumenta.

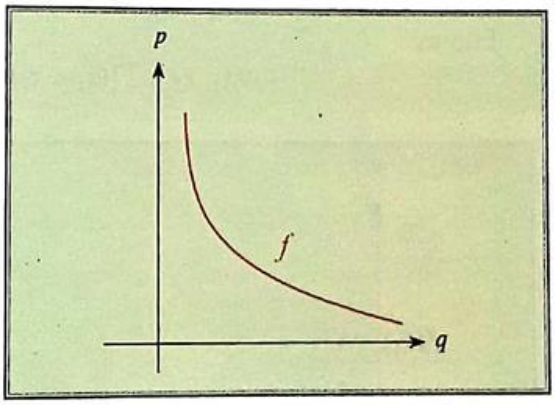


Figura 4.8: Curva de Demanda.

En la figura 4.8, q representa la cantidad demandada por un producto en particular, mientras que p representa el precio por unidad. Casos como estos hacen necesario el estudio de las funciones con características de decrecimiento.

Scanned by CamScanner

Definición 4.9 (Función Decreciente)

Una función f es decreciente en un intervalo I, si y sólo si para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, siempre que $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Esto es:

$$\forall x_1, x_2 \in I\,[(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2))]$$

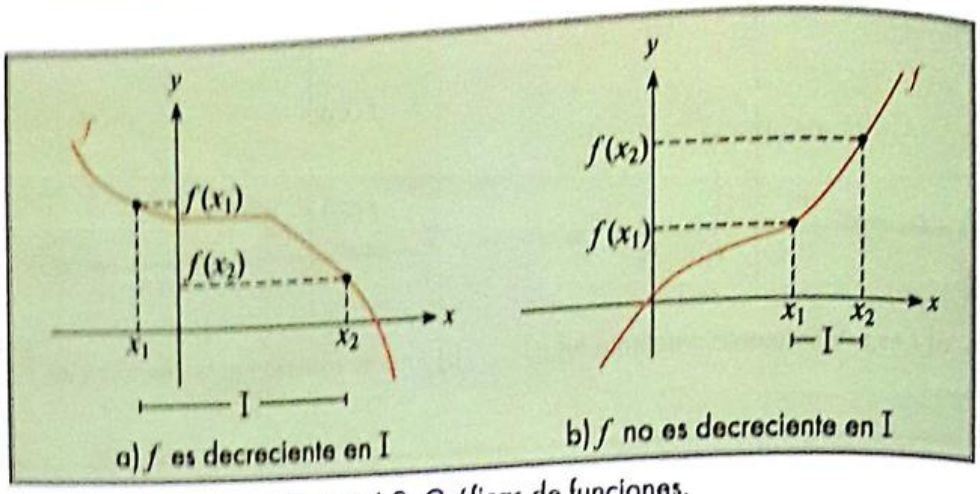


Figura 4.9: Gráficas de funciones.

Se puede notar en la figura 4.9 (a) que a medida que los valores de x aumentan en el intervalo I, los valores de $f(x)$ disminuyen o se mantienen iguales, por lo que f es decreciente, mientras que la gráfica de la figura 4.9 (b) no corresponde a una función decreciente.

Definición 4.10 (Función Estrictamente Decreciente)

Una función f es estrictamente decreciente en un intervalo I, si y sólo si para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, siempre que $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) > f(x_2)$.

Esto es:

$$\forall x_1, x_2 \in I\,[(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) > f(x_2))]$$

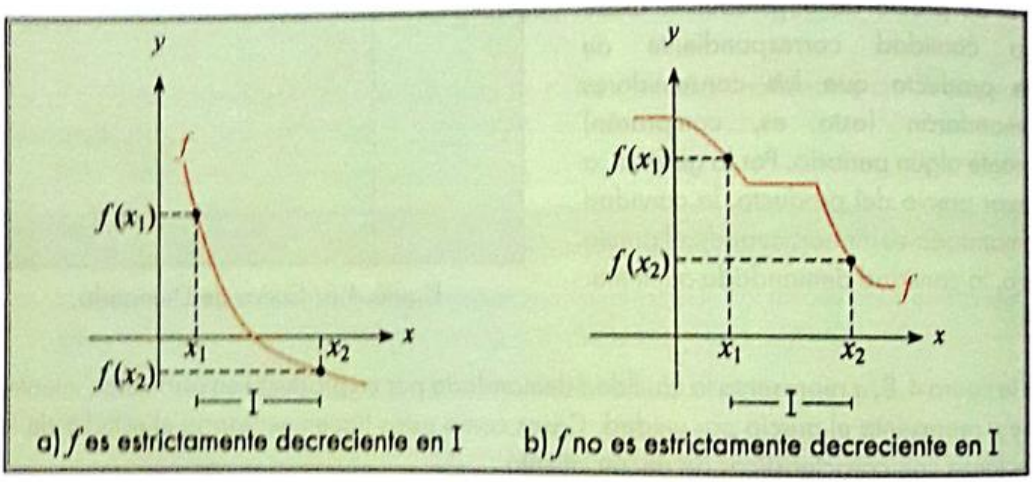


Figura 4.10: Gráficas de funciones.

Scanned by CamScanner

En la gráfica de la figura 4.10 (a) se aprecia que a medida que los valores de x aumentan en el intervalo I, los valores de $f(x)$ únicamente disminuyen. Por lo tanto, f es estrictamente decreciente.

La figura 4.10 (b) nos indica que la función es decreciente, pero no estrictamente decreciente en el intervalo I.

Definición 4.11 (Función Monótona)

Se dice que f es una función monótona en un intervalo I, si y sólo si f es o estrictamente creciente o estrictamente decreciente en ese intervalo.

De acuerdo a esta definición, se puede considerar la monotonía de una función por intervalos, existiendo otros casos en los que las funciones son monótonas en todo su dominio.

4.3.5 Funciones Pares o Impares

Algunas funciones pueden ser simétricas respecto a una recta o a un punto. Si la recta a la cual se hace referencia es el eje Y, tenemos funciones pares; mientras que si el punto al cual se hace referencia es el origen de coordenadas, tenemos funciones impares.

Definición 4.12 (Función Par)

Una función f es par si para todo x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y además, $f(-x) = f(x)$.

$$\forall x \in dom\, f\,[f(-x) = f(x)]$$

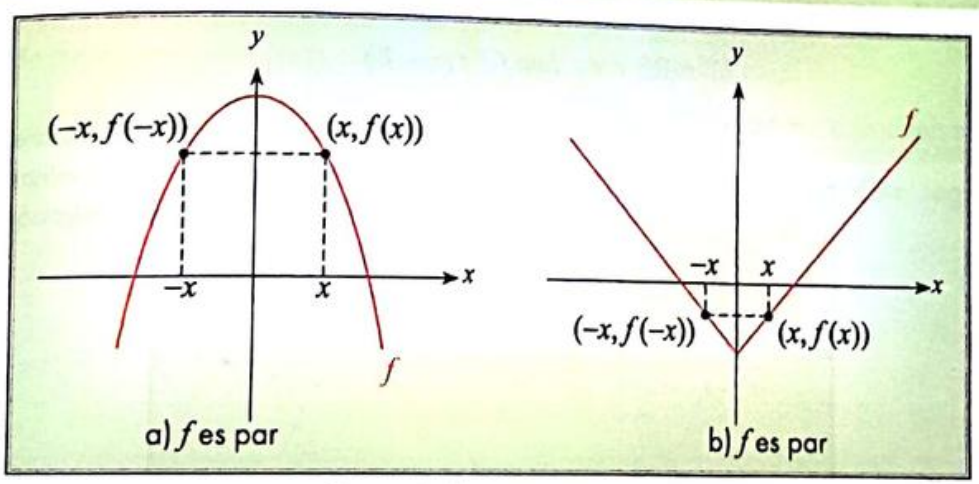


Figura 4.11: Funciones Pares.

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje Y. En las figuras 4.11 (a) y 4.11 (b) tenemos ejemplos de funciones pares. Observe que en ambos casos $f(-x) = f(x)$.

Scanned by CamScanner

Definición 4.13 (Función Impar)

Una función f es impar si para todo x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y además, $f(-x) = -f(x)$.

$$\forall x \in dom\, f\, [f(-x) = -f(x)]$$

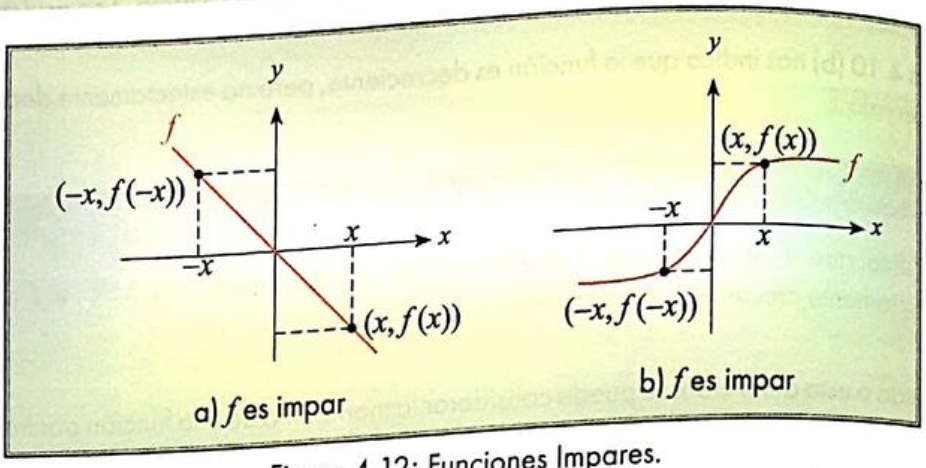


Figura 4.12: Funciones Impares.

Una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas. En las figuras 4.12 (a) y 4.12 (b) tenemos ejemplos de funciones impares. Observe que en ambos casos $f(-x) = -f(x)$.

A más de lo indicado, pueden presentarse funciones que no son pares ni impares. Por otra parte y como se verá más adelante, existe una única función que es par e impar a la vez.

4.3.6 Funciones Periódicas

Algunas funciones tienen la característica de repetir los valores de su rango, así como su comportamiento gráfico, cada cierto intervalo de su dominio.

Definición 4.14 (Función Periódica)

Una función $f(x)$ que cumple la propiedad:

$$\exists T \in \mathbb{R}^+ \; \forall x \in dom\, f \; [f(x + T) = f(x)]$$

se denomina periódica con período T.

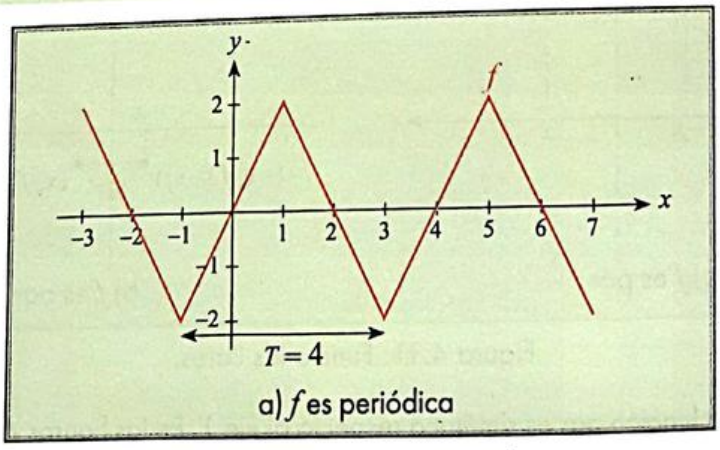


Figura 4.13: Funciones Periódicas.

Scanned by CamScanner

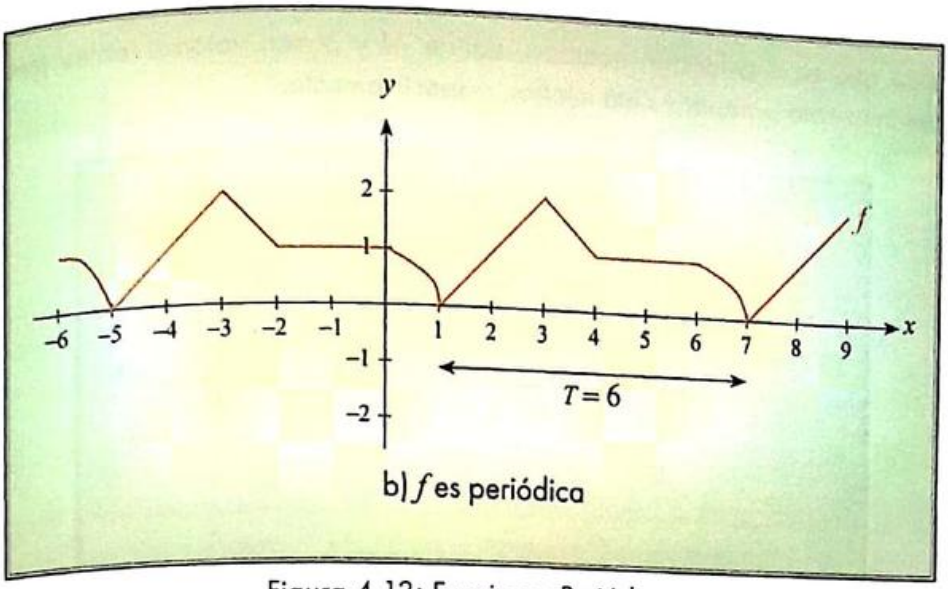


Figura 4.13: Funciones Periódicas.

Las gráficas de la figura 4.13 corresponden a funciones periódicas. En la figura 4.13 (a), el período de la función es $T = 4$, aunque también se podría considerar $T = 8$ o $T = 12$.

En la figura 4.13 (b), el período de la función es $T = 6$, aunque también se podría considerar $T = 12$ o $T = 18$.

De aquí que el mínimo valor de T que satisfaga la definición de función periódica se conoce como **período fundamental** T. En las figuras anteriores, el período fundamental de las funciones dadas es 4 y 6, respectivamente.

En general, para cualquier función periódica no constante, el período fundamental está definido de modo único y todos los demás períodos son múltiplos de él.

Un ejemplo de función periódica no constante sin período fundamental, lo constituye la función de Dirichlet, definida para todos los reales con la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

4.3.7 Funciones Acotadas

Cuando el rango de una función está contenido en cierto intervalo limitado, se dice que f es acotada.

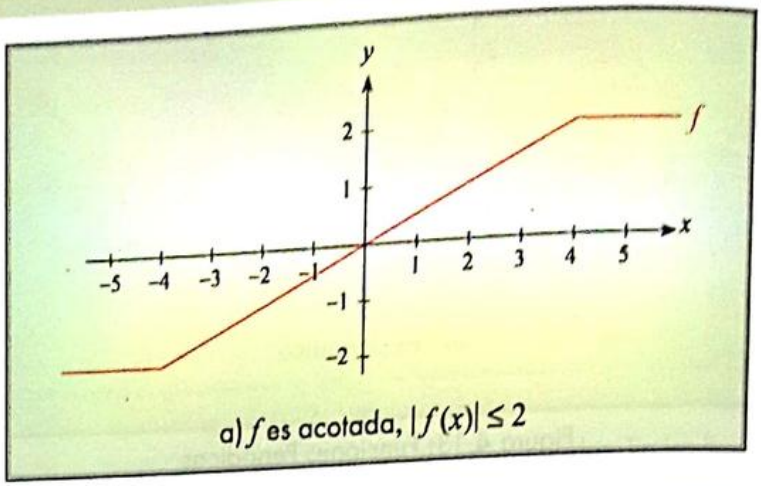
Scanned by CamScanner

Definición 4.15 (Función Acotada)

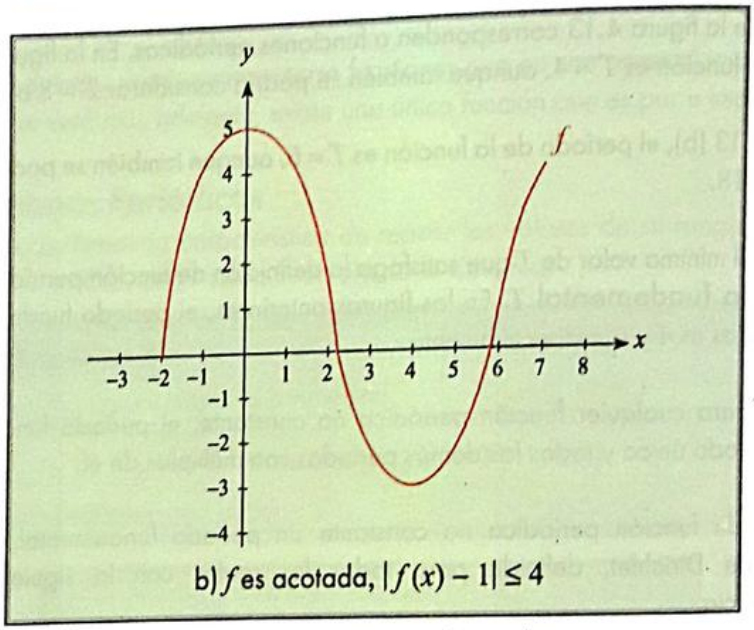
Una función f que tiene la propiedad:

$$\exists M, N \in \mathbb{R}\ \forall x \in dom\, f\ [\, N \leq f(x) \leq M]$$

se dice que es una función acotada, donde M y N son valores reales que se denominan cota superior y cota inferior, respectivamente.



a) f es acotada, $|f(x)| \leq 2$



b) f es acotada, $|f(x) - 1| \leq 4$

Figura 4.14: Funciones Acotadas.

Las gráficas (a) y (b) de la figura 4.14 corresponden a funciones acotadas. En la figura 4.14 (a), la cota superior de f es $M = 2$ y la cota inferior de f es $N = -2$. En la figura 4.14 (b), la cota superior de f es $M = 5$ y la cota inferior de f es $N = -3$.

Existen funciones que solamente tienen cota superior o cota inferior; en tales casos, se dice que la función es acotada superiormente o acotada inferiormente según corresponda, tal como se lo muestra en las siguientes figuras 4.15 y 4.16, respectivamente:

Scanned by CamScanner

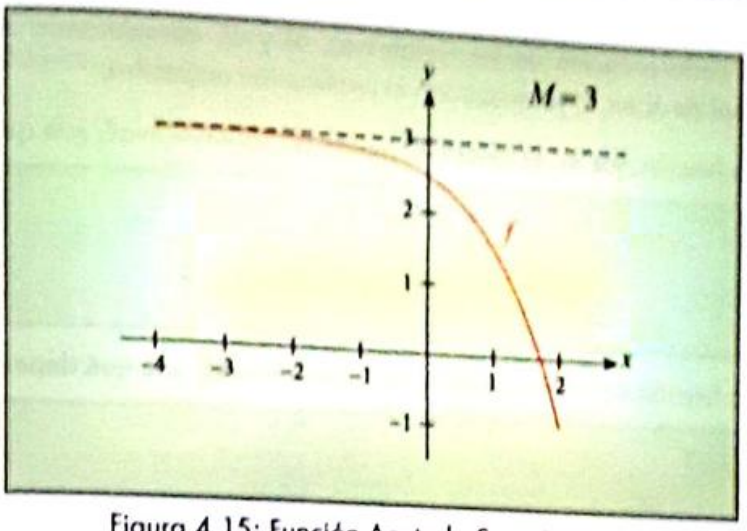


Figura 4.15: Función Acotada Superiormente.

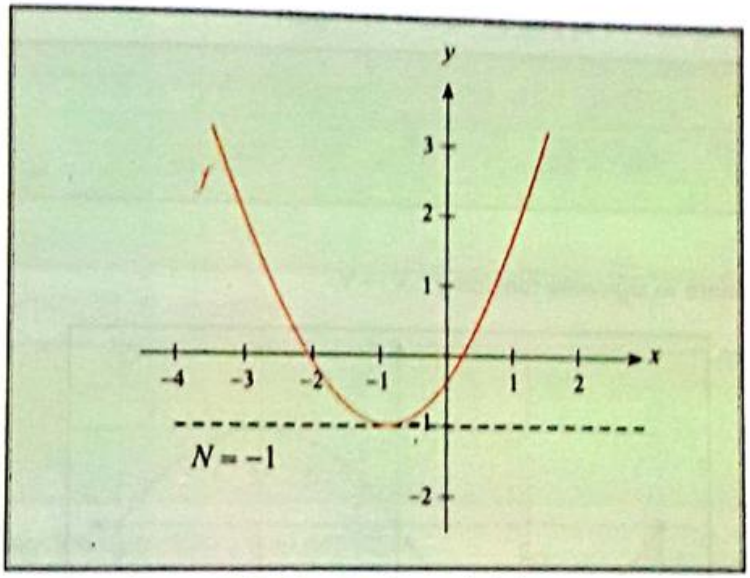


Figura 4.16: Función Acotada Inferiormente.

Cabe recalcar que las cotas son números reales que no necesariamente deben pertenecer al rango de la función.

Scanned by CamScanner

1) Responda cada pregunta de los literales a), b) y c), considerando una función de variable real de X en Y; y, realizando la justificación respectiva:

a) ¿Una función que no es inyectiva, puede ser sobreyectiva?, ¿de qué depende?

Si depende de que rg F = y

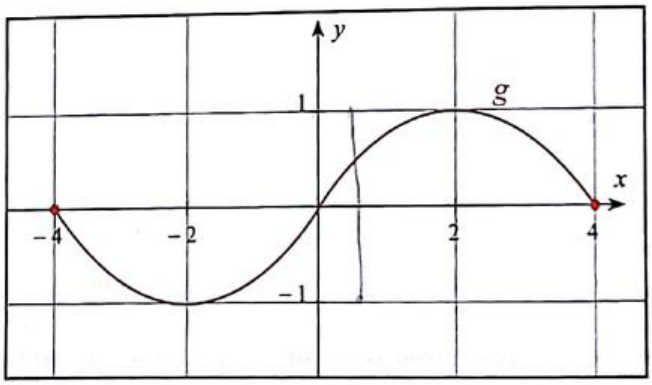
b) ¿Una función inyectiva puede no ser sobreyectiva?, ¿de qué depende?

Si, depende de que rg F = y

c) Si una función no es par, ¿entonces es impar?

No Porque, la unica Funcion que, es par e impar a la vez es la funcion periodica

d) Considere la siguiente función $g: X \mapsto Y$.

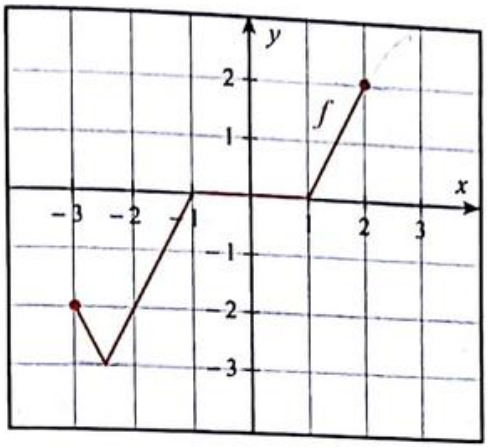


Si $Y = [-1, 1]$, ¿la función g es sobreyectiva?

Si Porque F Rg es [-1, 1] y se relaciona con el dom g [-4, 4] en algun punto (0,0).

Scanned by CamScanner

2) Dada la gráfica de la función $f: [-3, 2] \mapsto [-3, 2]$, califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas.



a) f es inyectiva y sobreyectiva.

f es sobreyectiva, pero no es inyectiva.
Falso.

b) $\forall x \in [-2, 2], f(-x) = f(x)$ = 0

0 0
Falso

c) La función es acotada o es periódica. = 1

Es acotada.

d) $\forall x \in [-3, -2]$, f es monótona.

[-3,-2] No es monótona porque de -3 a -2,5 decrece y de -2,5 a -3 crece

Scanned by CamScanner

4.4 Funciones Lineales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada la regla de correspondencia de una función lineal, reconocer los elementos que la definen como tal.
- Dada una función lineal, interpretar gráfica y analíticamente sus características.
- Dadas las condiciones de un problema de la vida cotidiana, reconocer si puede ser modelado por una función lineal.

Definición 4.16 (Función Lineal)

Sean a y b números reales, la función f de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ cuya regla de correspondencia es $f(x) = ax + b$, recibe el nombre de función lineal.

Su gráfica representa una recta cuya pendiente está dada por a y su intercepto con el eje y es el punto $(0, b)$.

La pendiente a de una recta es el cociente entre la variación de las ordenadas y la variación de las abscisas de un par de puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que pertenecen a la recta y se calcula de la siguiente forma:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Para graficar una función lineal, es suficiente obtener dos puntos de ella y trazar la recta que los contenga. Se sugiere que estos dos puntos sean las intersecciones con los ejes coordenados, es decir, determinar el valor de y cuando $x = 0$; y, determinar el valor de x cuando $y = 0$. Esto no impide que se evalúe otro par de puntos que satisfaga la regla de correspondencia de f.

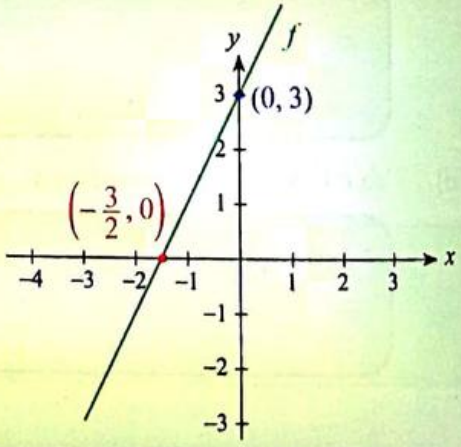
Ejemplo 4.10 Función Lineal.

Sea $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, grafique $f(x) = 2x + 3$ e indique sus características.

Solución:

Cuando $x = 0, f(0) = 2(0) + 3 = 3$

Cuando $f(x) = 0, 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$



Scanned by CamScanner

Analizando la gráfica de la función, podemos concluir que: f es inyectiva, sobreyectiva, estrictamente creciente (monótona), no es par ni impar, no es periódica ni acotada.

Nótese que el comportamiento de la función lineal varía según los valores de a y b. Si el valor de a es positivo, la gráfica representa una función estrictamente creciente, tal como lo muestran las figuras 4.17 (a) y 4.17 (b). Si el valor de a es negativo, su gráfica corresponde a una función estrictamente decreciente, tal como lo indican las figuras 4.17 (c) y 4.17 (d).

Si el valor de b es positivo, la intersección con el eje Y se localiza sobre el eje X, como lo muestran las figuras 4.17 (a) y 4.17 (c). Si el valor de b es negativo, la intersección con el eje Y se localiza bajo el eje X, como lo indican las figuras 4.17 (b) y 4.17 (d). Si el valor de b es igual a cero, la gráfica de f interseca a los ejes en el origen de coordenadas.

Por otra parte, la intersección de la función lineal con el eje X estará dada por el valor $-\frac{b}{a}$, el cual se ubicará en el semieje X positivo en los casos (b) y (c), y en el semieje X negativo en los casos (a) y (d).

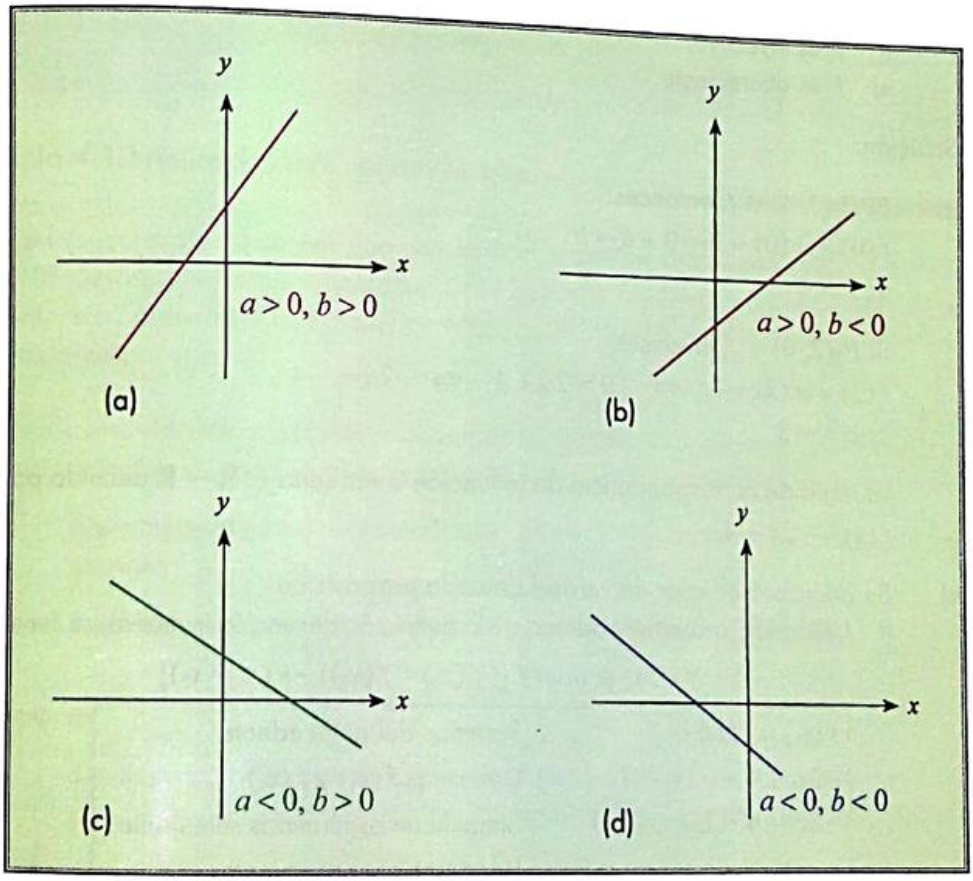
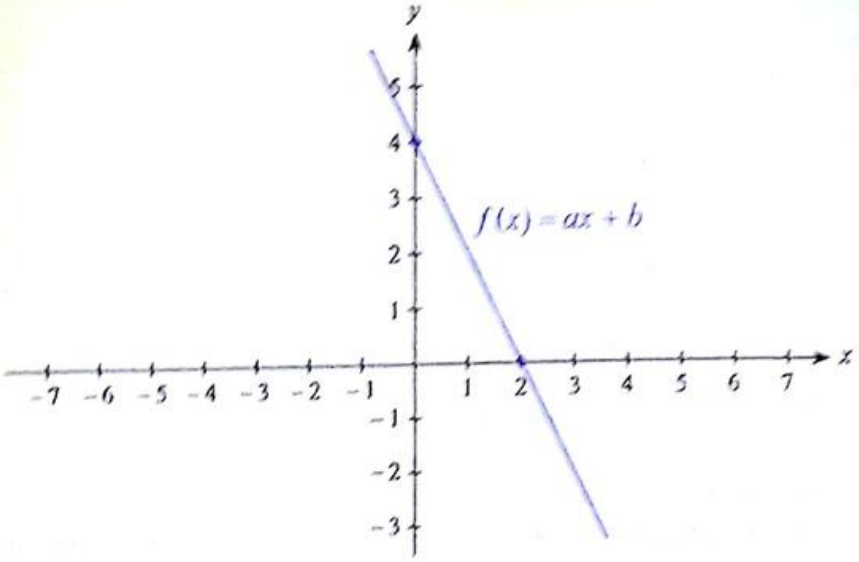


Figura 4.17: Funciones Lineales.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.11 Función Lineal.

Dada la siguiente gráfica de la función lineal f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:



a) Determine las constantes a y b de la regla de correspondencia de la función f.

b) Justificando su respuesta, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i) f es inyectiva.
ii) f es decreciente.

Solución:

a) Si $P_1(0, 4) \in f$, entonces:

$f(0) = a(0) + b = 0 + b = b$

$\therefore b = 4$

Si $P_2(2, 0) \in f$, entonces:

$f(2) = a(2) + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2a + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = -4$

$\therefore a = -2$

La regla de correspondencia de la función lineal sería $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x + 4$.

b) Se analizará el valor de verdad de cada proposición:

i) Utilizando la contrarrecíproca de la definición de función inyectiva, se tiene:

$$\forall x_1, x_2 \in dom\, f\ [(f(x_1) = f(x_2)) \rightarrow (x_1 = x_2)]$$

$f(x_1) = f(x_2)$	Partimos del antecedente
$-2x_1 + 4 = -2x_2 + 4$	Definimos $f(x_1)$ y $f(x_2)$
$-2x_1 + \cancel{4} + 2x_2 - \cancel{4} = 0$	Simplificamos términos semejantes
$x_1 = x_2$	Llegamos al consecuente

Scanned by CamScanner

También, con el criterio de la recta horizontal, cualquier recta paralela al eje X, interseca la gráfica de f sólo en un punto.

$\therefore$ La proposición es verdadera.

ii) Utilizando la contrarrecíproca de la definición de función decreciente, se tiene:

$$\forall x_1, x_2 \in dom\, f\ [(f(x_1) < f(x_2)) \rightarrow (x_1 \geq x_2)]$$

$f(x_1) < f(x_2)$	Partimos del antecedente
$-2x_1 + 4 < -2x_2 + 4$	Definimos $f(x_1)$ y $f(x_2)$
$-2x_1 + \cancel{4} + 2x_2 - \cancel{4} < 0$	Simplificamos términos semejantes
$x_1 > x_2$	Aplicamos la propiedad de números reales y llegamos al consecuente

En otras palabras, a medida que aumentan los valores del dominio de la función, los valores de su rango disminuyen o se mantienen iguales.

$\therefore$ La proposición es verdadera.

Ejemplo 4.12 Aplicación de funciones lineales.

Un fabricante de portaminas ha contabilizado que las ventas ascienden a 20 000 unidades en una semana cuando el precio es de \$1.50 por unidad. Pero, si se reduce el precio a \$1.25 cada portaminas, las ventas se incrementan a 25 000 unidades por semana.

Considerando como variable independiente el precio p de cada portaminas y como variable dependiente las ventas v de este producto durante una semana:

a) Determine la función lineal D que relaciona las ventas y el precio de los portaminas.

b) Realice una representación gráfica de la función lineal D.

Solución:

a) De acuerdo a los datos del problema se deduce que se han proporcionado dos puntos, cuyos pares ordenados pertenecen a la función lineal D, esto es:

$$P_1\,(1.50, 20\,000) \in D \wedge P_2\,(1.25, 25\,000) \in D$$

Scanned by CamScanner

La regla de correspondencia de la función lineal D sería de la forma: $v = D(p) = ap + b$, donde a y b son valores que se deben calcular.

Se obtiene el valor a de la pendiente:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{p_2 - p_1} = \frac{25\,000 - 20\,000}{1.25 - 1.50} = \frac{5\,000}{-0.25} = -20\,000$$

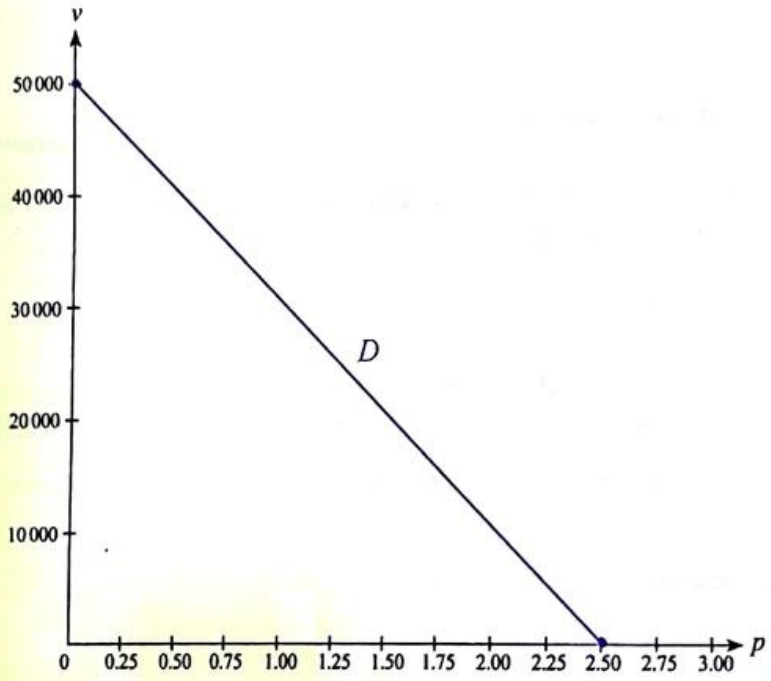
Puesto que $P_1 \in D$, entonces ese punto satisface su regla de correspondencia:

$$20\,000 = -20\,000\,(1.50) + b$$
$$20\,000 = -30\,000 + b$$
$$b = 50\,000$$

Luego, la función lineal D requerida es:

$$v = D(p) = -20\,000\,p + 50\,000$$

b) Al graficar la función lineal D, se observa que se hace necesario restringir los valores de la variable precio p, que deberán ser positivos y menores que \$2.50 porque a un precio igual o superior no se generaría venta alguna.



El comportamiento de la función lineal D estará dado por:

$$v = D(p) = -20\,000\,p + 50\,000,\ \forall p \in (0.00,\ 2.50)$$

Scanned by CamScanner

Cuando $a = 0$, la función lineal sería $f(x) = (0)x + b = b$, la cual constituye una **función constante**, cuya gráfica es una recta horizontal. Como se observa en la figura 4.18, $dom\, f = \mathbf{R}$ y $rg\, f = \{b\}$.

Las funciones constantes son crecientes y decrecientes a la vez. Además son funciones periódicas puesto que para cualquier número T, $f(x+T) = f(x)$. Nótese, sin embargo, que estas funciones carecen de período fundamental.

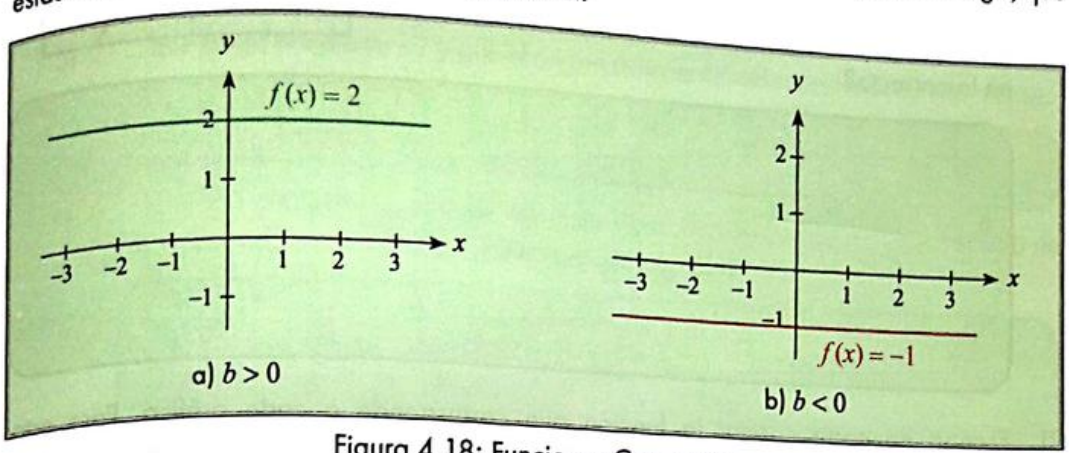


Figura 4.18: Funciones Constantes.

La función constante $f(x) = 0$ es la única función de variable real que es par e impar al mismo tiempo.

Cuando $a = 1$ y $b = 0$, tenemos $f(x) = (1)\,x + 0$, la cual constituye la **función identidad** $f(x) = x$, siendo $dom\, f = rg\, f = \mathbf{R}$. Esta función es inyectiva, sobreyectiva, estrictamente creciente e impar.

A continuación se muestra su gráfica:

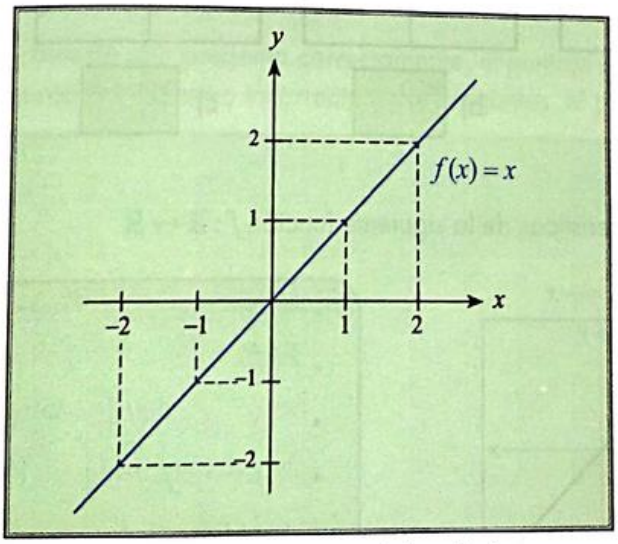
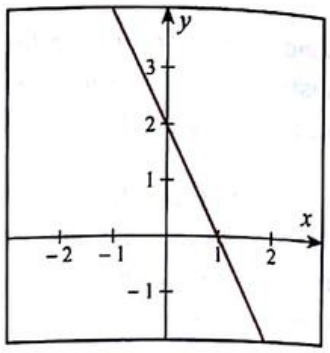


Figura 4.19: Función Identidad.

Scanned by CamScanner

1) José y Kevin, están en desacuerdo respecto al comportamiento de una función lineal (véase figura adjunta). Kevin insiste en que la función es decreciente, pero José argumenta que si la observa de derecha a izquierda, es creciente. Para salir de la duda, decidieron calcular la pendiente.



¿Cuál es el valor de la pendiente a?; y, ¿quién está en lo correcto?

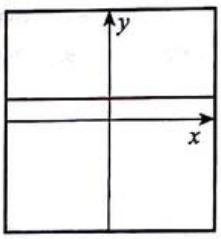
$F(x) = ax+b$

$a = \frac{0-R}{1-0} = -2$ //

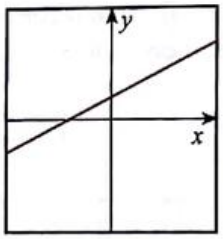
La Pendiente es -2 y Kevin está en lo correcto

2) Escriba en cada casilla, la función que corresponda a cada gráfica. Para esto, seleccione entre las posibles reglas de correspondencia (f_1, f_2, f_3 o f_4) que se presentan a continuación:

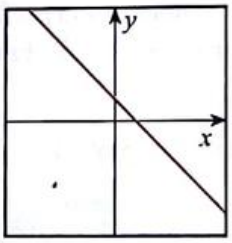
$f_1(x) = 10x - 20$ $\quad f_2(x) = \frac{1}{2}x + 3$ $\quad f_3(x) = 2$ $\quad f_4(x) = -x + 2$



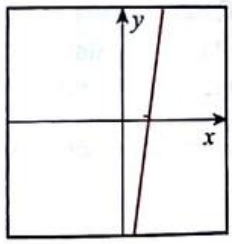
a) $f_3(x)$



b) $F_2(x)$



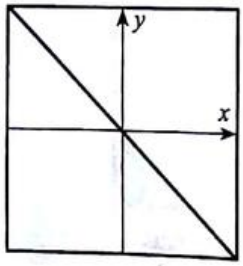
c) $F_4(x)$



d) $F_1(x)$

3) Escriba 5 características de la siguiente función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$f(x) = -x$



* Es una función lineal
* Dom: $\mathbb{R}$
* $b = 0$, porque la grafica $F(x)$ intersecta con los ejes y
* Es impar $F(-x) = -F(x)$
* Estrictamente decreciente

Scanned by CamScanner

4) Escriba una posible regla de correspondencia para cada caso.

Una función lineal f...

a) ... que tenga pendiente 5 e intercepto con el eje Y en el punto $P(0, 3)$.

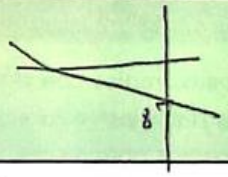
$f(x) = 5x + 3$

b) ... que tenga pendiente -2 y que el origen de coordenadas pertenezca a la misma.

$f(x) = -2x$

c) ... que sea decreciente, el valor absoluto de su pendiente igual a 8; y, la suma de los valores de su pendiente e intercepto, sea igual a cero.

$f(x) = -8x + 8$



d) ... que sea creciente y decreciente a la vez; y, contenga el punto $P\left(\sqrt[3]{5}, \pi\right)$.

$f(x) = \pi$

5) Imagínese que usted imparte clases en un colegio del país y debe calificar una evaluación que rindieron sus estudiantes. Las 10 preguntas con las que evaluó a sus estudiantes tenían la misma dificultad y puntaje. Genere una función lineal f que asigne una calificación de 0 a 35 basada en la cantidad x de preguntas que no se contestaron correctamente.

Ej: Si no se contestó una pregunta correctamente, el puntaje será 31.5
Si se contestaron en forma incorrecta ocho preguntas, el puntaje será 7

$f(x) = -3,5x + 35$

$x \in [0, 10]$

Scanned by CamScanner

4.5 Funciones Cuadráticas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada la regla de correspondencia de una función cuadrática, reconocer los elementos que la definen como tal.
- Dada la forma general de una función cuadrática, expresarla en su forma canónica.
- Dada una función cuadrática en forma canónica, interpretar y analizar los elementos que caracterizan su ecuación y su gráfica: vértice, eje de simetría, ceros y discriminante.
- Dada una función cuadrática, discutir sus características.
- Dadas las condiciones de un problema de la vida cotidiana, reconocer si puede ser modelado por una función cuadrática.

Definición 4.17 (Función Cuadrática)

Sean a, b y c números reales con $a \neq 0$, la función f de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ cuya regla de correspondencia es $f(x) = ax^2 + bx + c$, recibe el nombre de función cuadrática.

Su gráfica corresponde geométricamente a una parábola cóncava hacia arriba o hacia abajo.

4.5.1 Forma canónica de la función cuadrática

Nos proponemos obtener, completando cuadrados, una expresión equivalente a $f(x) = ax^2 + bx + c$, la misma que será de utilidad para el estudio de ciertas propiedades de esta función.

$$
\begin{aligned}
f(x) = ax^2 + bx + c \quad &\equiv \quad f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&\equiv \quad f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&\equiv \quad f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&\equiv \quad f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}
\end{aligned}
$$

Esta última expresión es la forma canónica de la función cuadrática, siendo $\Delta = b^2 - 4ac$, valor que se denomina **discriminante**.

El punto de coordenadas $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ es el vértice de la parábola, punto en el cual la gráfica de f alcanza su valor máximo o mínimo en y.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.13 Forma canónica de la función cuadrática.

Obtenga la forma canónica de $f(x) = x^2 - 5x - 6$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Solución:

Observamos que: $a = 1$
$b = -5$
$c = -6$
$\Delta = 49$

Por lo tanto, $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$.

4.5.2 Rango de la función cuadrática

Se trata de determinar el subconjunto de $\mathbf{R}$ que es el rango de la función cuadrática, esto es, el conjunto de valores que toma $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuando x varía de $-\infty$ a $+\infty$.

Consideremos los siguientes casos, utilizando la forma canónica:

i) $a > 0$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$$

$$f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow f(x) \in \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

$$\therefore rg f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

ii) $a < 0$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

$$f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow f(x) \in \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

$$\therefore rg f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.14 Rango de una función cuadrática.

Obtenga el rango de $f(x) = x^2 - 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

En el ejemplo anterior se determinó la forma canónica de esta función cuadrática.

Por lo tanto, $rg\, f = \left[-\frac{49}{4}, +\infty\right)$

4.5.3 Forma factorizada de la función cuadrática

Dada la regla de correspondencia de f, si $\Delta \geq 0$, siempre es posible descomponerla en factores o factorizarla; llevándola a la forma $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación cuadrática $f(x) = 0$.

Ejemplo 4.15 Forma factorizada de la función cuadrática.

Obtenga la forma factorizada de $f(x) = x^2 - 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

La expresión equivalente factorizada es: $f(x) = (x - 6)(x + 1)$.

Las raíces de la ecuación cuadrática $f(x) = 0$ son: $(x = 6) \vee (x = -1)$.

4.5.4 Gráfica de la función cuadrática

Para graficar la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ en el plano cartesiano, se debe tener en cuenta que:

- Su gráfica es una parábola.
- Tiene simetría con respecto a la recta vertical $x = -\frac{b}{2a}$; evidenciándose un cambio en la monotonía de la función.
- El signo del coeficiente a indica la concavidad de la curva. Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba; y, si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo.
- El signo del discriminante Δ está relacionado con la cantidad de intersecciones con el eje X, también llamadas ceros o raíces de la función. Si $\Delta > 0$, la gráfica de f tiene dos intersecciones con el eje X. Si $\Delta = 0$, la gráfica de f interseca al eje X en un solo punto. Por último, si $\Delta < 0$, la gráfica de f no interseca al eje X.
- La función es acotada inferiormente si $a > 0$, o es acotada superiormente si $a < 0$.
- La intersección de f con el eje Y es el punto $(0, c)$.

Scanned by CamScanner

A partir de lo anotado, se pueden dar los siguientes casos:

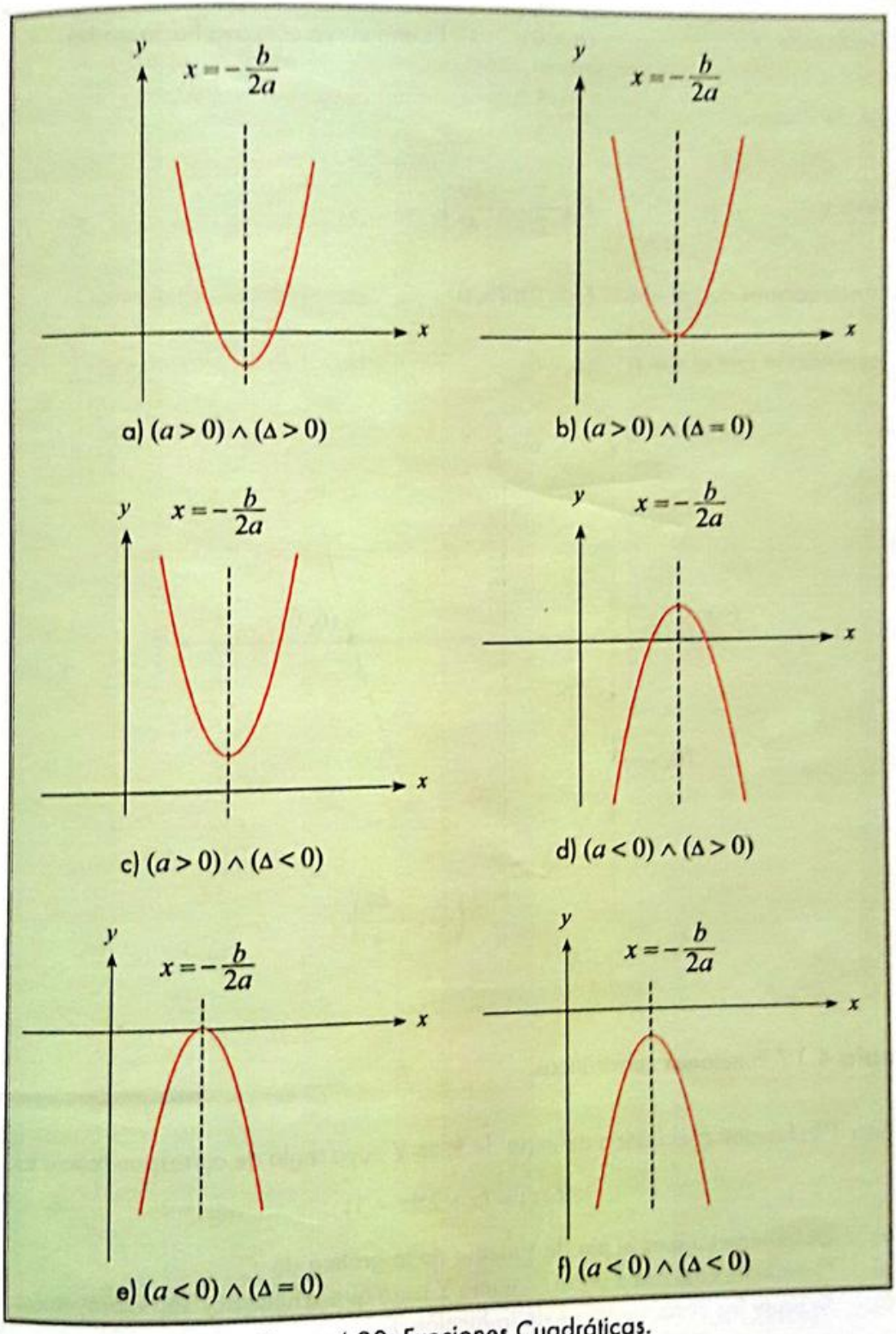


Figura 4.20: Funciones Cuadráticas.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.16 Gráfica de la función cuadrática.

Grafique la función $f(x) = x^2 - 5x - 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

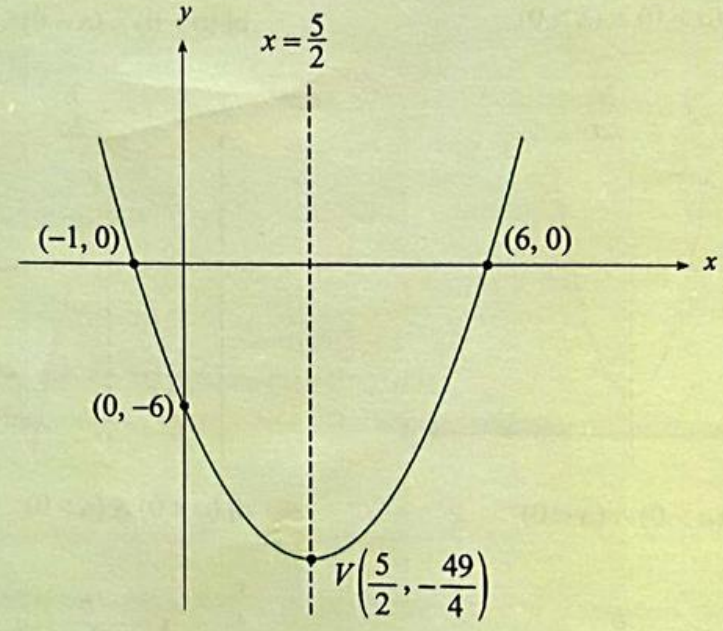
Gráfica de f: $(a > 0) \Rightarrow$ Es una curva cóncava hacia arriba.

Eje de simetría: $x = \frac{5}{2}$

Vértice: $V\left(\frac{5}{2}, -\frac{49}{4}\right)$

Intersecciones con el eje X: $(-1, 0)$; $(6, 0)$

Intersección con el eje Y: $(0, -6)$



Ejemplo 4.17 Funciones cuadráticas.

Sea f la función cuadrática definida de $\mathbb{R}$ en Y cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = (x + 2)(x - 3)$$

a) Determine cuál es el eje de simetría de la gráfica de f.
b) Determine cuál debe ser el conjunto Y para que la función f sea sobreyectiva.
c) Indique las características de la función f.

Scanned by CamScanner

Solución:

a) Al estar la regla de correspondencia expresada en forma factorizada, se deduce que los ceros de la función se dan cuando:

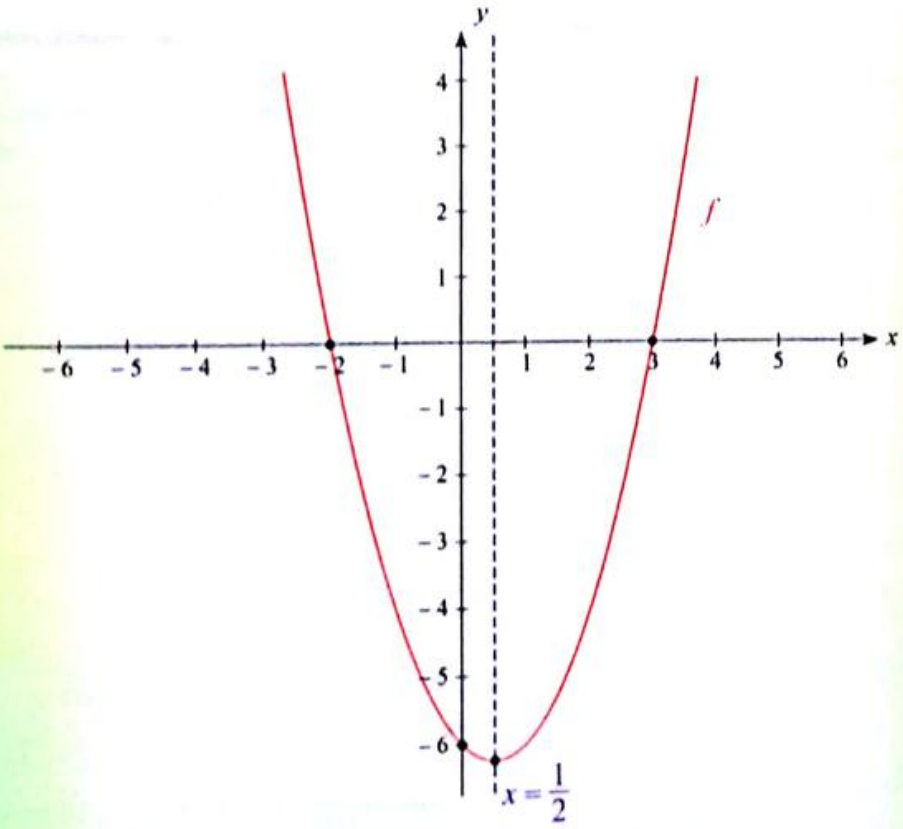
$$(x+2)(x-3)=0 \Leftrightarrow (x+2=0) \vee (x-3=0) \Leftrightarrow (x=-2) \vee (x=3)$$

Su eje de simetría debe estar ubicado en la mitad de estas abscisas.

Observe que la intersección con el eje Y se da en $(0, -6)$.

El eje de simetría de la gráfica de f es $x=\frac{1}{2}$.

A continuación se grafica la función, ubicando el eje de simetría y presentando otras características ya analizadas.



b) Se multiplican los términos de la expresión y se obtiene:

$$f(x)=x^2-x-6$$

Scanned by CamScanner

Se lleva la regla de correspondencia de f a la forma canónica:

$$f(x) = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \left(6 + \frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{24}{4} + \frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

$$\therefore \text{Y} = rgf = \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right)$$

c) Intersecciones con el eje X: $(-2, 0)$ y $(3, 0)$

Vértice: $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

La gráfica de la parábola es cóncava hacia arriba.

f es acotada inferiormente.

f es estrictamente decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

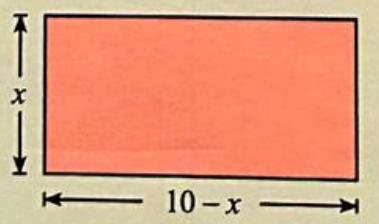
f es estrictamente creciente en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Ejemplo 4.18 Aplicación de funciones cuadráticas.

Considere un alambre de longitud 20 *cm*, con el que se desea construir un rectángulo. Si x representa la longitud en centímetros de uno de sus lados, obtenga una expresión para el área de la superficie de dicho rectángulo.

Solución:

Si se denomina x la medida de uno de los lados que tendrá el rectángulo, el otro lado medirá $\frac{20 - 2x}{2}$, y puede simplificarse como $10 - x$.



Con lo cual, la expresión para el área de la superficie del rectángulo es:

$$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2;\ x \in (0, 10)$$

Ésta es una función cuadrática cuya gráfica tiene su vértice en $(5, 25)$ y es cóncava hacia abajo. Este vértice y la concavidad son de mucha importancia, porque indican que el valor máximo de área que se puede obtener para el rectángulo construido de esta manera es de 25 cm^2; siendo así todos sus lados tendrían una longitud de 5 *cm*, tratándose por lo tanto de un cuadrado.

Scanned by CamScanner

1) El valor de a es importante en una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. ¿Por qué no debe ser cero?

Porque el valor de a debe ser un # Real ya que $a \neq 0$

2) Dada la siguiente función cuadrática $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 12x - 21$$

a) Especifique cuáles son los valores de a, b y c para esta función cuadrática y obtenga su discriminante Δ.

$a = -3/4$ $\quad \Delta = 81$

$b = 12$

$c = -21$

b) Exprésela en su forma canónica.

$f(x) = -\frac{3}{4}(x^2 + 16x + 64) - 27 + 6$

$-\frac{3}{4}(x + 8)^2 + 27$

c) Determine el vértice de su gráfica y el rango de f.

$V = (-8, 27)$ $\quad Rg(f) = (-\infty, 27]$

Scanned by CamScanner

3) Grafique la función cuadrática $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2x - 3$, mostrando su vértice, eje de simetría e intersecciones con los ejes coordenados.

$x^2 - 2x + 1) - 3 - 1$

$(x-1)^2 - 4$

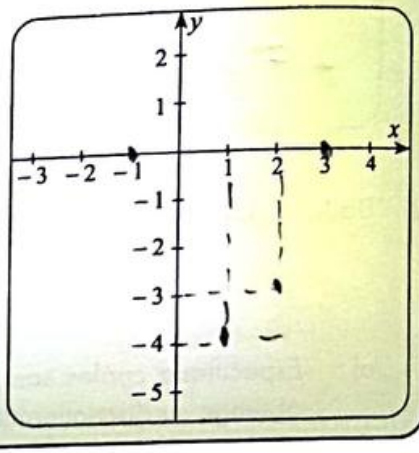
$V(1, 4)$

Eje simetría $x = 1$

Intersecciones $(-1, 0)$

$(3, 0)$

$(0, -3)$



4) Cuando se lanza un objeto verticalmente hacia arriba y despreciando la resistencia del aire, la altura que alcanza desde el suelo (altura "cero") está dada por la función $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$, $\forall t \in \left[0, \frac{2v_0}{g}\right]$; donde g es la aceleración de la gravedad y v_0 la rapidez inicial, ambos valores positivos. Demuestre que la máxima altura que debería alcanzar el objeto está dada por $h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$.

$h(t) = -\frac{1}{2g}\left(t^2 + \frac{2v_0 t}{g} + \frac{v_0^2}{g^2}\right)$

$-\frac{1}{2}g\left(t + \frac{v_0}{g}\right)^2$

$\forall t \in \left[-\frac{v_0}{g}, 0\right]$

Scanned by CamScanner

4 | Funciones de una Variable Real

4.6 Funciones definidas por tramos

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada la regla de correspondencia de una función de variable real definida por tramos, identificar los elementos del rango sobre el intervalo respectivo.
- Reconocer gráficamente la continuidad o discontinuidad de funciones definidas por tramos.
- Dadas las condiciones de un problema de la vida cotidiana, reconocer si puede ser modelado por una función definida por tramos.

Hasta este momento hemos graficado funciones del tipo $y = f(x)$, donde una misma expresión nos describe el comportamiento de la función en todo su dominio. Sin embargo, podemos tener funciones que presenten diferente comportamiento en distintos intervalos de su dominio.

Ejemplo 4.19 Funciones definidas por tramos.

Para la función de variable real f:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & -2 \le x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Determine:

- $f(-1)$, $f(2)$ y $f(5)$.
- $dom\, f$
- $rg\, f$

Solución:

Para determinar $f(-1)$, la ecuación para f es $f(x) = x - 1$, por lo tanto, $f(-1) = -1 - 1 = -2$.

Para determinar $f(2)$, la ecuación para f es $f(x) = x^2$, por lo tanto, $f(2) = 2^2 = 4$.

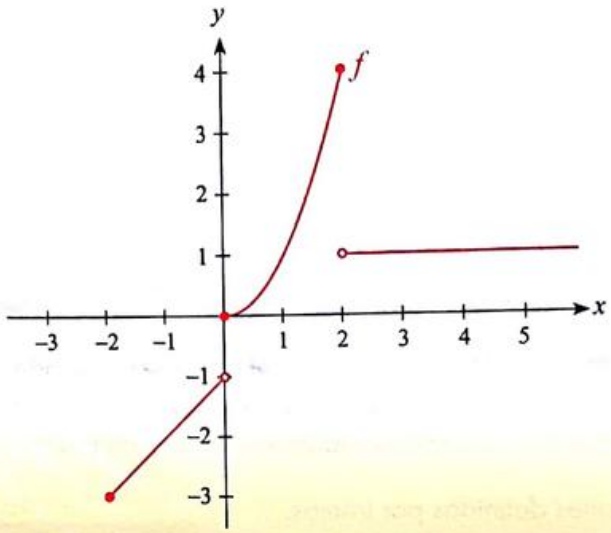
Para determinar $f(5)$, la ecuación para f es $f(x) = 1$, por lo tanto, $f(5) = 1$.

Para determinar el dominio de f, observamos su definición y concluimos que $dom\, f = \{x / x \ge -2\}$ o $dom\, f = [-2, +\infty)$.

Scanned by CamScanner

Para determinar el rango de f, podemos hacerlo algebraicamente o gráficamente:

$x \in [-2, 0)$	$x \in [0, 2]$	$x \in (2, +\infty)$
$-2 \leq x < 0$	$0 \leq x \leq 2$	$f(x) = 1$
$-2 - 1 \leq x - 1 < -1$	$0 \leq x^2 \leq 4$	$rg\, f = \{1\}$
$-3 \leq f(x) < -1$	$0 \leq f(x) \leq 4$	
$rg\, f = [-3, -1)$	$rg\, f = [0, 4]$	



y concluir que $rg\, f = [-3, -1) \cup [0, 4]$.

Este ejemplo nos induce al concepto de **continuidad** de una función de variable real, el cual se definirá con la rigurosidad matemática necesaria en cursos superiores.

Por ahora, diremos que, si dibujamos la gráfica de una función f con un lápiz, será continua si podemos dibujarla sin tener que levantar el lápiz. Sin embargo, la función será discontinua en un punto, cuando no está definida en él o bien porque en dicho punto hay un salto. En el ejemplo 4.19, se puede notar que f es discontinua en $x = 0$ y en $x = 2$.

Ejemplo 4.20 Aplicación de funciones definidas por tramos.

Al analizar el voltaje V de un circuito, el cual se mide en voltios, se conoce que:

- V es una función del tiempo t que se mide en segundos.
- El voltaje se mantiene constante en un valor de 5 voltios desde $t = 0$ segundos hasta $t = 1$ segundo.
- Desde $t = 1$ segundo hasta $t = 2$ segundos, el voltaje del circuito tiene el comportamiento de la función $f(t) = 5\,(2 - t)$.
- Desde $t = 2$ segundos hasta $t = 3$ segundos, el voltaje del circuito sigue el comportamiento de la función $g(t) = -5\,(2 - t)$.
- La función V es periódica con período fundamental $T = 3$ segundos.

Scanned by CamScanner

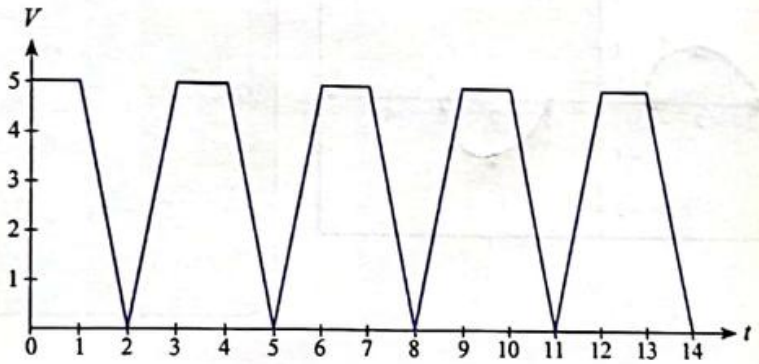
a) Bosqueje la gráfica de la evolución del voltaje V, desde $t = 0$ segundos hasta $t = 14$ segundos.

b) Respecto a la función V, califique la siguiente proposición como verdadera o falsa, justificando su respuesta:

"V es una función acotada y no es inyectiva"

Solución:

a) La gráfica de V, en los 3 primeros segundos, está conformada por una función constante, una función lineal estrictamente decreciente y una función lineal estrictamente creciente; y, por su periodicidad, los valores de su rango se repiten cada 3 segundos.



En esta gráfica, el eje vertical es el voltaje V (voltios) y el eje horizontal es el tiempo t (segundos).

b) La proposición compuesta que se ha planteado tiene dos proposiciones:

- V es una función acotada.
- V no es una función inyectiva.

Se puede considerar que V tiene a $N = 0$ como una cota inferior y a $M = 5$ como una cota superior. Al ser V una función acotada inferior y superiormente, se concluye que V es una función acotada entre 0 y 5 voltios. Esto es, cumple con la definición:

$$\exists\, M, N \in \mathbf{R}\ \forall\, t \in dom\, V\ [N \leq V(t) \leq M]$$

Por otra parte, con el criterio de la recta horizontal, se observa que la gráfica interseca a la función en más de un punto. Por lo que se concluye que V no es una función inyectiva.

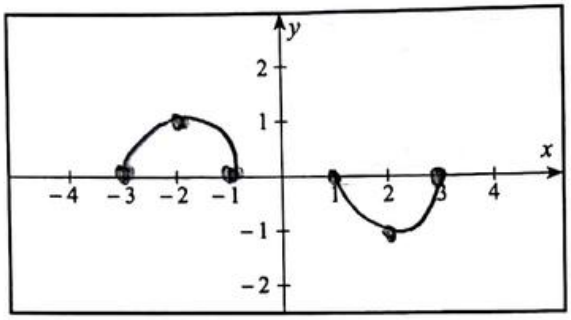
La conjunción de ambas proposiciones, que son verdaderas, también es verdadera. Por lo tanto, la proposición compuesta dada es verdadera.

Scanned by CamScanner

1) Dada la siguiente función de variable real:

$$f(x)=\begin{cases} -(x+2)^2+1, & -3\le x<-1 \\ 0, & -1\le x\le 1 \\ (x-2)^2-1, & 1<x\le 3 \end{cases}$$

Grafíquela y determine su dominio y rango.



Dom $f(x) = [-3, 3]$

Rg $f(x) = [-1, 1]$

2) Considere las funciones f y g definidas a continuación:

$$f(x)=\begin{cases} -x-1, & x\le 0 \\ -x+2, & x>0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ -x^2-1, & x\ge 0 \end{cases}$$

Obtenga el valor numérico de:

a) $\dfrac{f(0)-g(0)}{1000}+\dfrac{f(2)-f(102)}{100}-\dfrac{g(-3)}{10}+1$

$\dfrac{-1-(-1)}{1000}+\dfrac{0+100}{1}-\dfrac{10}{10}+1=1$

b) $(f(1)-g(1))(f(1)+g(1))$

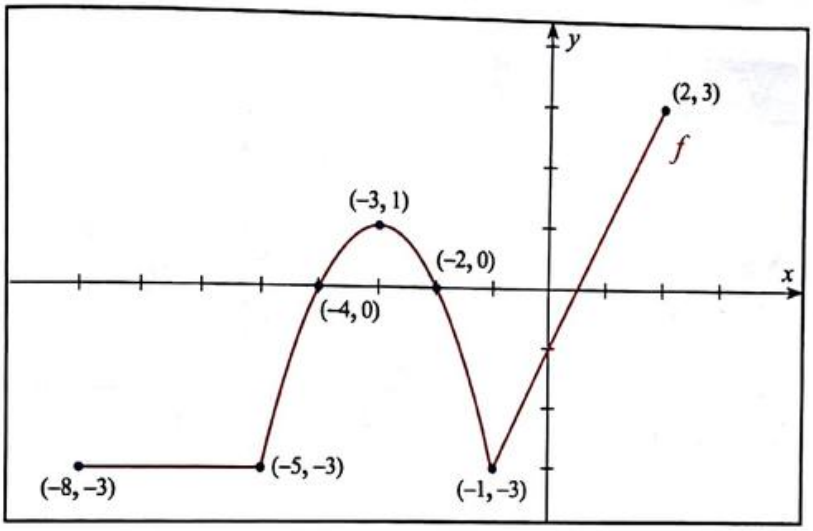
-3

Scanned by CamScanner

c) $\dfrac{f(3)-f(-3)}{g(2)-g(-2)}$

$\frac{-1-2}{-5-5} = \frac{-3}{-10} = 0,3$

3) A partir de la gráfica de la función f definida por tramos:

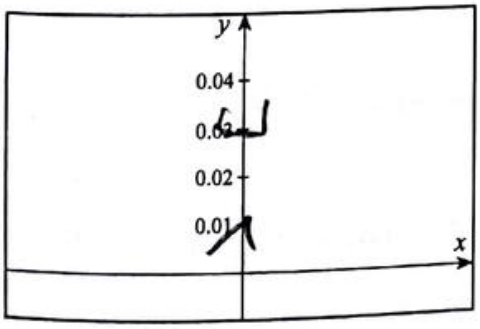


Complete su regla de correspondencia:

$$f(x)=\begin{cases} -3, & -8 \le x < -5 \\ -(x+4)(x+2), & -5 \le x \le -1 \\ 2x+1, & -1 < x \le 2 \end{cases}$$

4) Grafique la siguiente función definida por tramos y califique las proposiciones de los literales a) y b) como verdaderas o falsas.

$$f(x)=\begin{cases} 0.03, & -x \le 0 \\ 0.01, & -x > 0 \end{cases}$$



a) $100\left(f(-\sqrt{8})-f(\sqrt{8})\right)=2$

Falso

b) f no es discontinua en $x=0$.

falso

Scanned by CamScanner

4.7 Funciones Especiales

Objetivos

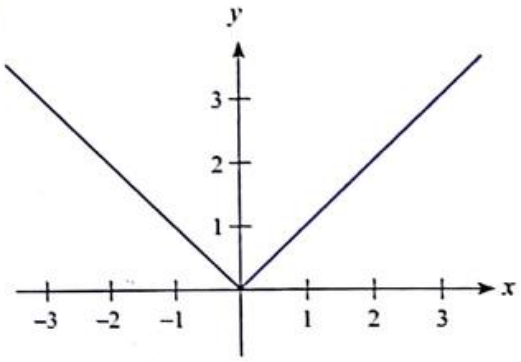
Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una expresión numérica que involucre a las funciones valor absoluto, signo, escalón o entero mayor, calcular su valor empleando la definición de estas funciones.
- Dada una función especial, discutir sus características.
- Dada una ecuación o inecuación planteada a partir de condiciones que involucran a funciones especiales, resolverla analíticamente.

Función Valor Absoluto

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & f(x)=|x| \end{array}$$

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

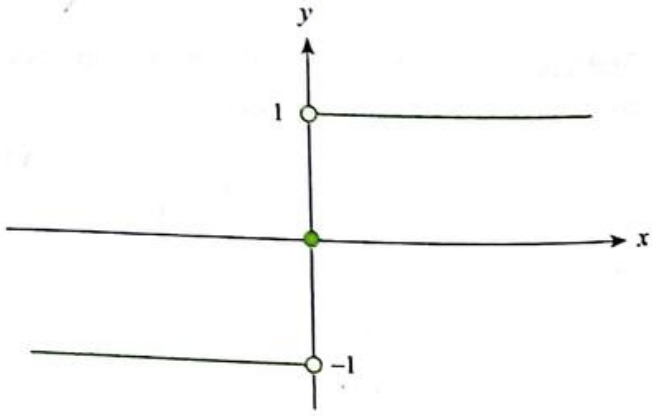


Se puede observar que $dom\, f=\mathbf{R}$, $rg\, f=[0,+\infty)$, f es estrictamente decreciente en $(-\infty,0)$, f es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$, f es par, f es acotada inferiormente y f es continua en $\mathbf{R}$.

Función Signo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \xrightarrow{f} & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & f(x)=sgn\,(x) \end{array}$$

$$f(x)=sgn\,(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$



Se puede observar que $dom\, f=\mathbf{R}$, $rg\, f=\{-1,0,1\}$, f es creciente en $\mathbf{R}$, f es impar, f es acotada, f presenta una discontinuidad en $x=0$.

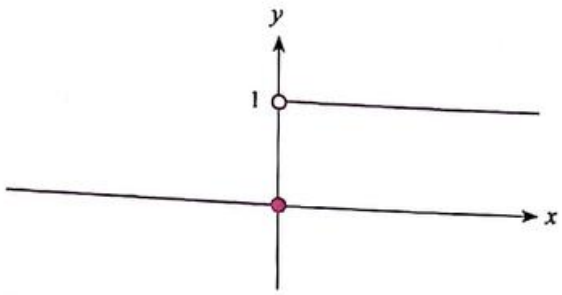
Scanned by CamScanner

4 | Funciones de una Variable Real

Función Escalón

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \mu(x)$$

$$f(x) = \mu(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



Se puede observar que $dom\, f = \mathbb{R}$, $rg\, f = \{0, 1\}$, f es creciente en $\mathbb{R}$, f es acotada, f presenta una discontinuidad en $x = 0$. Dependiendo de los fines aplicativos, la regla de correspondencia de esta función podría variar, encontrándose casos en los cuales $f(0) = 1$; sin embargo, en el desarrollo de esta obra utilizaremos la definición antes dada.

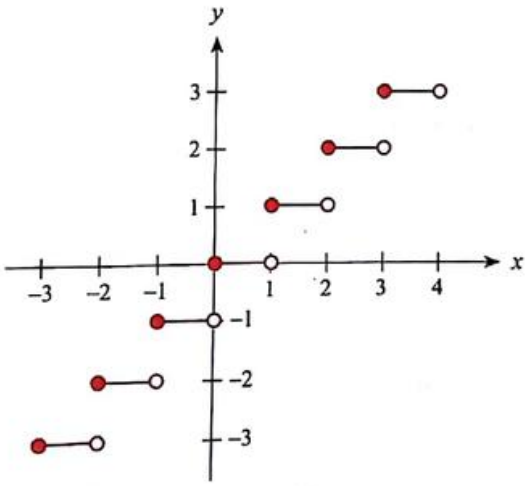
Función Máximo Entero o Entero Mayor

La función entero mayor se puede describir para un número real x como el mayor entero, menor o igual que x.

A partir de esta descripción, el entero mayor de 2.1 es 2, de -1.05 es -2, el de π es 3, el de $-e$ es -3, el de -5 es -5, y así podemos verificar para otros números.

Esto permite definir y graficar esta función especial de la siguiente manera:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = [\![x]\!]$$



$$f(x) = [\![x]\!] = k, \qquad k \leq x < k + 1;\ x \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{Z}$$

Se puede observar que $dom\, f = \mathbb{R}$, $rg\ f = \mathbb{Z}$, f es creciente en $\mathbb{R}$, las intersecciones con el eje X son todos los números reales del intervalo $[0, 1)$, f es constante en todo intervalo de la forma $[k, k + 1)$ siendo k un número entero; y, f presenta discontinuidades para todos los valores enteros del dominio de f.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.21 Funciones especiales.

Calcule el valor numérico de: $\dfrac{\mu\left(3-\sqrt{17}\right)+sgn\left(e^2\right)}{\left|1-\left|2-\left|3\right|-4\right|\right|}$

Solución:

$$\sqrt{17}>4 \quad \Rightarrow \quad 3-\sqrt{17}<0 \quad \Rightarrow \quad \mu\left(3-\sqrt{17}\right)=0$$

$$e\approx 2.71 \quad \Rightarrow \quad e^2>0 \quad \Rightarrow \quad sgn\left(e^2\right)=1$$

$$\left|1-\left|2-\left|3\right|-4\right|\right| = \left|1-\left|2-3-4\right|\right| = \left|1-\left|-5\right|\right| = \left|1-5\right| = \left|-4\right| = 4$$

$$\frac{\mu\left(3-\sqrt{17}\right)+sgn\left(e^2\right)}{\left|1-\left|2-\left|3\right|-4\right|\right|} = \frac{0+1}{4} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 4.22 Funciones especiales.

Sea el conjunto referencial $\mathrm{Re}=\mathbb{R}$ y el predicado $p(x)$: $[\![2x-1]\!]=1$, determine el conjunto de verdad $Ap(x)$.

Solución:

Se aplica la definición de la función entero mayor:

$$[\![x]\!]=1 \quad \Rightarrow \quad 1\le x<2$$

Lo cual nos indica que se debe resolver una inecuación lineal:

$$[\![2x-1]\!]=1 \quad \Rightarrow \quad 1\le 2x-1<2$$

$$2\le 2x<3$$

$$1\le x<\frac{3}{2}$$

$$\therefore Ap(x)=\left[1,\frac{3}{2}\right)$$

Ejemplo 4.23 Funciones especiales.

Dada la función $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $f(x)=x^{1-sgn(x)}$

a) Grafique la función f e indique sus características.

b) Para que la función f sea sobreyectiva, redefina el conjunto de llegada.

Scanned by CamScanner

Solución:

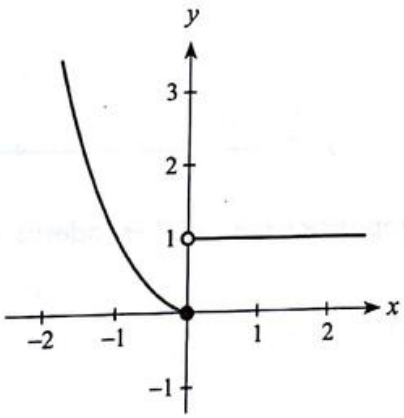
a) Se aplica la definición de la función signo:

$$sgn(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

Partiendo de la definición de la función signo, se tiene:

- Si $x>0$, $sgn(x)=1$
  Remplazando esta condición, se obtiene $f(x)=x^{1-1}=x^0=1$
- Si $x=0$, $sgn(x)=0$, luego $f(x)=x^{1-0}=x$
- Si $x<0$, $sgn(x)=-1$, y $f(x)=x^{1-(-1)}=x^2$

$$f(x)=x^{1-sgn(x)}=\begin{cases}1, & x>0\\ x, & x=0\\ x^2, & x<0\end{cases}$$



La función f es:

- Estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.
- Constante en el intervalo $(0, +\infty)$.
- Acotada inferiormente.
- Discontinua en $x=0$.

b) Dado que $rg\, f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, el conjunto de llegada debería ser el rango de la función.

La función redefinida $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ tal que $f(x)=x^{1-sgn(x)}$ corresponde a una función sobreyectiva.

Scanned by CamScanner

1) Obtenga cada valor indicado:

a) $|87|$ $|87| = 87$

b) $[\![5.02]\!]$ 5

c) $[\![5 - 0.02]\!]$ 4

d) $\mu(-100000)$ 0

e) $sgn\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{e}\right)$ $\frac{1}{3,14} - \frac{1}{2,71} = 0,3 - 0,3 = 0$ $sng = 0$

f) $\mu\left(\left|sgn\left(-\frac{7}{9}\right)\right|\right)$ 0

g) $sgn\left(2 - \sqrt{2}\right)$ 1

h) $|\mu(1 - 0.\bar{9}) - 1|$ $\frac{9}{90}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{9}{10} = 1 - 1 = 0$

2) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas; luego, justifique sus respuestas.

a) Si $a \in \{-1, 0, 1\}$, entonces se cumple que $a \cdot sgn(a) = |a|$ 0

$2 \cdot sng(a) = |a|$

$sng \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$ $-1 \cdot +1 = -1 \equiv 0$

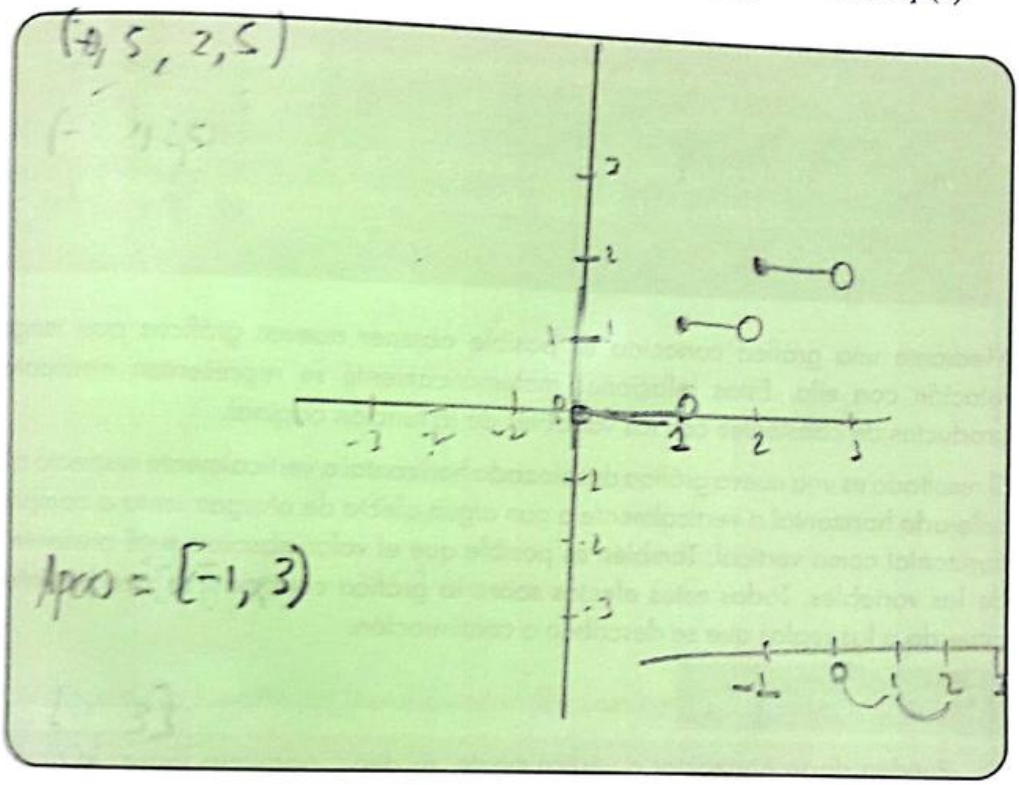
b) $\mu((-1)(-2)) = \mu(-1) \cdot \mu(-2)$ 1

$V = Dom \forall \mathbb{R}$

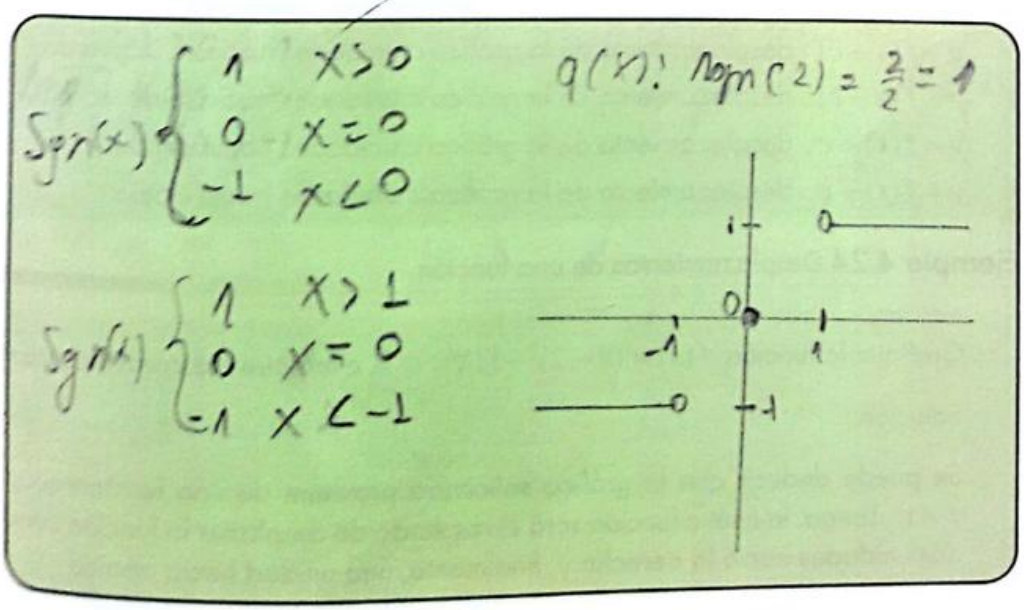
Scanned by CamScanner

3) Para cada caso, resuelva gráficamente.

a) Sea $Re = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$, si se define el predicado $p(x)$: $x = [\![x]\!]$, determine $Ap(x)$.



b) Dado el referencial $Re = \mathbb{R}$ y considerando el predicado $q(x)$: $sgn(x) = \frac{x}{2}$, determine $Aq(x)$.



Scanned by CamScanner

4.8 Técnicas de Graficación de Funciones

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada la gráfica de una función de variable real, construir la gráfica de una nueva función aplicando técnicas de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión horizontales.
- Dada la gráfica de una función de variable real, construir la gráfica de una nueva función aplicando técnicas de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión verticales.
- Dada la gráfica de una función de variable real, construir la gráfica de una nueva función aplicando la definición de valor absoluto sobre la variable dependiente e independiente.

Mediante una gráfica conocida es posible obtener nuevas gráficas que tengan alguna relación con ella. Estas relaciones matemáticamente se representan mediante sumas o productos de constantes con las variables de la función original.

El resultado es una nueva gráfica desplazada horizontal o verticalmente respecto a la original, reflejada horizontal o verticalmente o con algún efecto de alargamiento o compresión tanto horizontal como vertical. También es posible que el valor absoluto esté presente sobre una de las variables. Todos estos efectos sobre la gráfica conocida se pueden interpretar de acuerdo a las reglas que se describen a continuación.

Desplazamientos

Pueden darse horizontal o verticalmente, es decir, podemos mover la gráfica de una función hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba o hacia abajo.

Dada la regla de correspondencia de f, siendo $c>0$, se pueden generar las nuevas funciones:

$y=f(x+c)$: desplazamiento de la gráfica c unidades hacia la izquierda.
$y=f(x-c)$: desplazamiento de la gráfica c unidades hacia la derecha.
$y=f(x)+c$: desplazamiento de la gráfica c unidades hacia arriba.
$y=f(x)-c$: desplazamiento de la gráfica c unidades hacia abajo.

Ejemplo 4.24 Desplazamientos de una función.

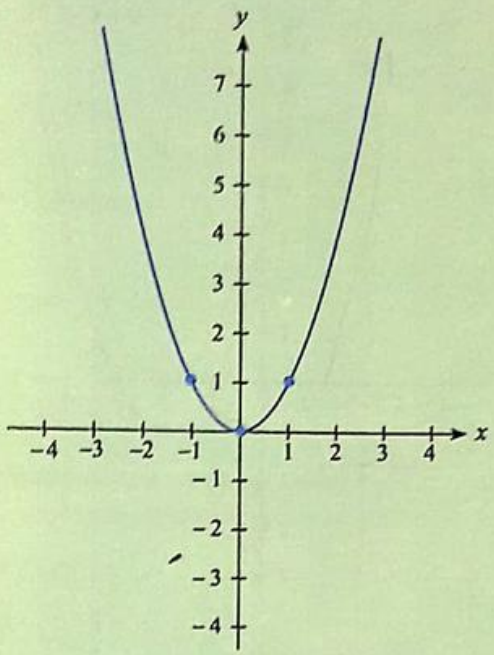
Grafique la función $f(x)=(x-2)^2-1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e indique sus características.

Solución:

Se puede deducir que la gráfica solicitada proviene de una función cuadrática $y=x^2$. Luego, la nueva función será el resultado de desplazar la función cuadrática dos unidades hacia la derecha y, finalmente, una unidad hacia abajo.

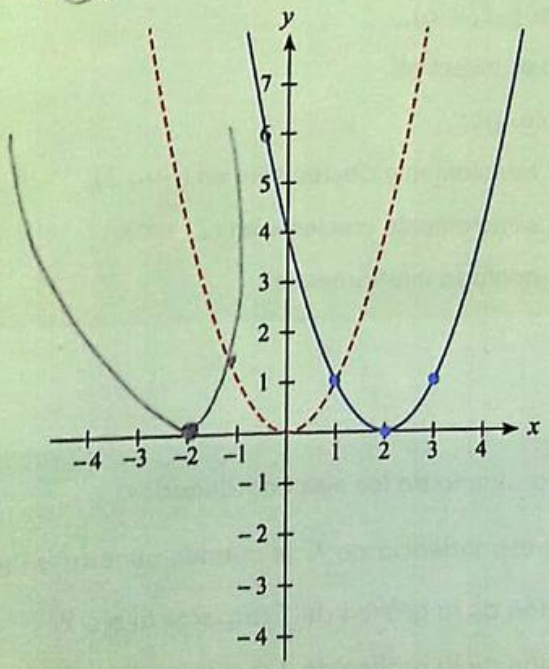
Scanned by CamScanner

a) Gráfica de la función $y = x^2$.



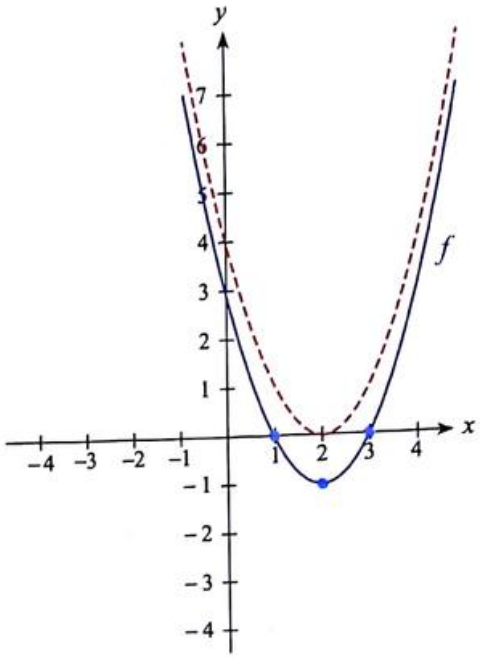
b) Gráfica de la función del literal anterior desplazada dos unidades hacia la derecha $y = (x - 2)^2$.

$(x+2)^2$



Scanned by CamScanner

c) Gráfica de la función del literal anterior desplazada una unidad hacia abajo $y = (x-2)^2 - 1$, para obtener la función requerida.



Intersecciones con el eje X: $(1, 0)$ y $(3, 0)$.

Intersección con el eje Y: $(0, 3)$.

El dominio de f es $\mathbb{R}$.

El rango de f es $[-1, +\infty)$.

La función f no es inyectiva.

La función f no es par.

La función f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$.

La función f es estrictamente creciente en $(2, +\infty)$.

La función f es acotada inferiormente.

Reflexiones

Pueden ser respecto a alguno de los ejes coordenados.

Dada la regla de correspondencia de f, se pueden generar las nuevas funciones:

- $y = f(-x)$: reflexión de la gráfica de f respecto al eje Y.
- $y = -f(x)$: reflexión de la gráfica de f respecto al eje X.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.25 Reflexiones de la gráfica de una función.

A partir de la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 2 \\ -1, & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2, & x < -1 \end{cases}$$

Grafique las siguientes funciones:

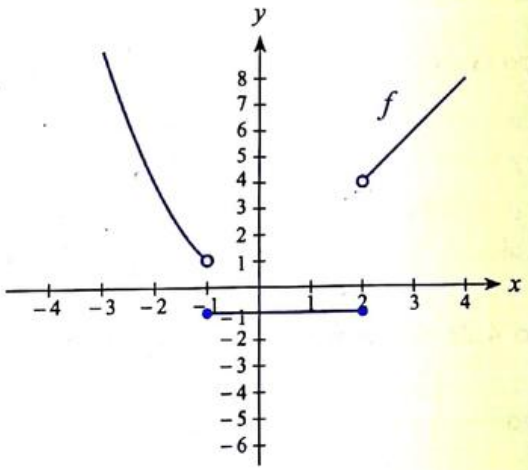
a) $g(x) = f(-x)$
b) $h(x) = -f(x)$

Solución:

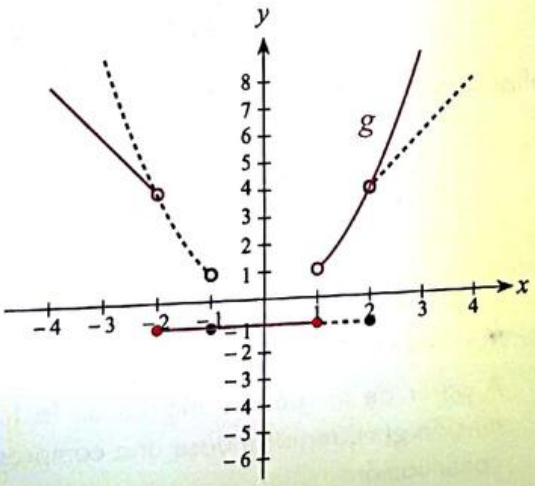
a) $g(x) = f(-x)$

La gráfica solicitada constituye la reflexión de la gráfica original en torno al eje Y, tal como se puede observar a continuación.

Gráfica de $y = f(x)$



Gráfica de $g(x) = f(-x)$

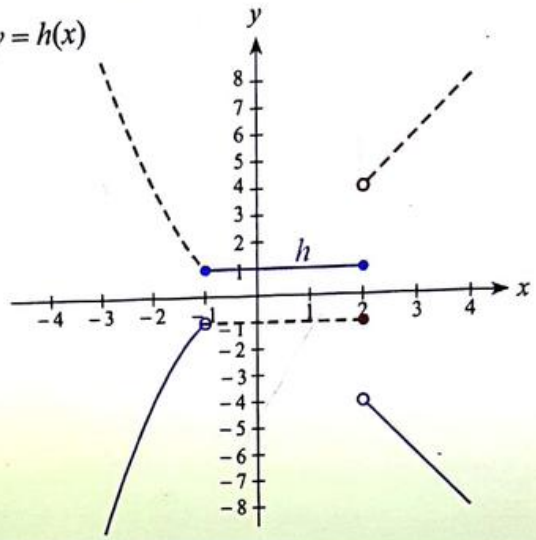


Scanned by CamScanner

b) $h(x) = -f(x)$

Se puede deducir que la gráfica solicitada constituye la reflexión de la gráfica original en torno al eje X, tal como se puede observar a continuación.

Gráfica de $y = h(x)$



Compresiones o alargamientos

Dada la regla de correspondencia de f, se pueden generar las nuevas funciones:

- $y = kf(x)$: si el valor de $0 < k < 1$, la gráfica de f se comprime verticalmente y si $k > 1$, la gráfica de f evidencia un alargamiento vertical.
- $y = f(kx)$: la gráfica de f experimenta compresión horizontal si $k > 1$ y alargamiento en sentido horizontal si $0 < k < 1$.

Ejemplo 4.26 Compresiones o alargamientos de una función.

A partir de la gráfica de la función f: $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -4 < x < 6 \\ \mu(x) - 2, & x \leq -4 \vee x \geq 6 \end{cases}$$

Grafique las siguientes funciones:

a) $g(x) = \frac{1}{2} f(x)$

b) $h(x) = f(4x)$

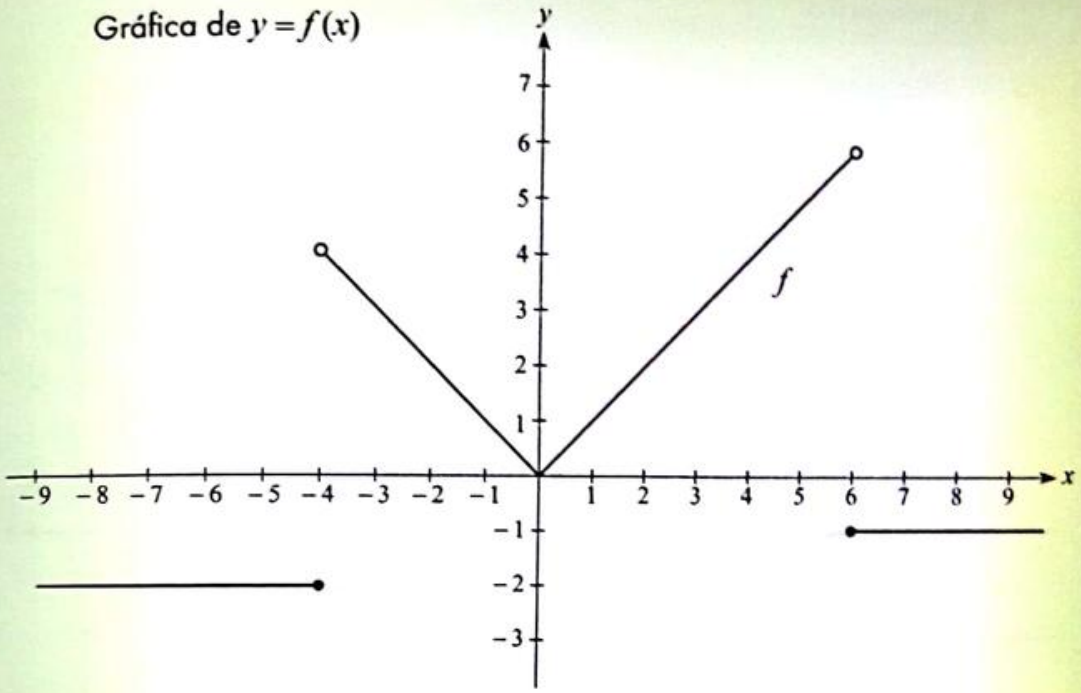
Solución:

a) $g(x) = \frac{1}{2} f(x)$

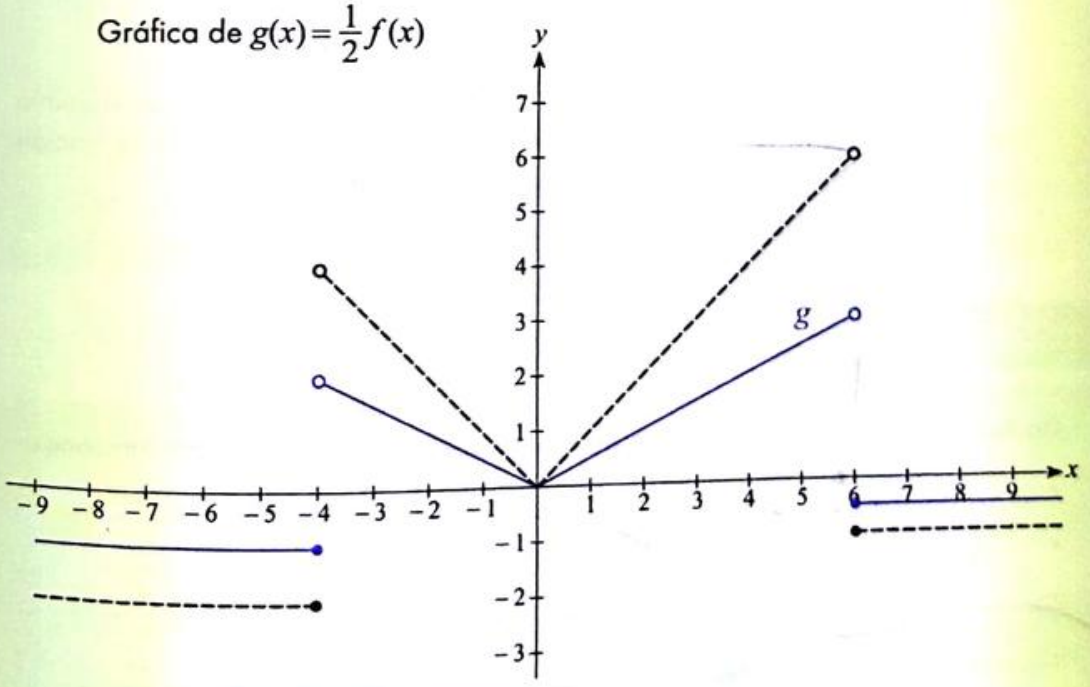
A partir de la gráfica original de la función $f(x)$, se construye la nueva función $g(x)$, registrándose una compresión vertical, tal como se observa a continuación:

Scanned by CamScanner

Gráfica de $y = f(x)$



Gráfica de $g(x) = \frac{1}{2} f(x)$

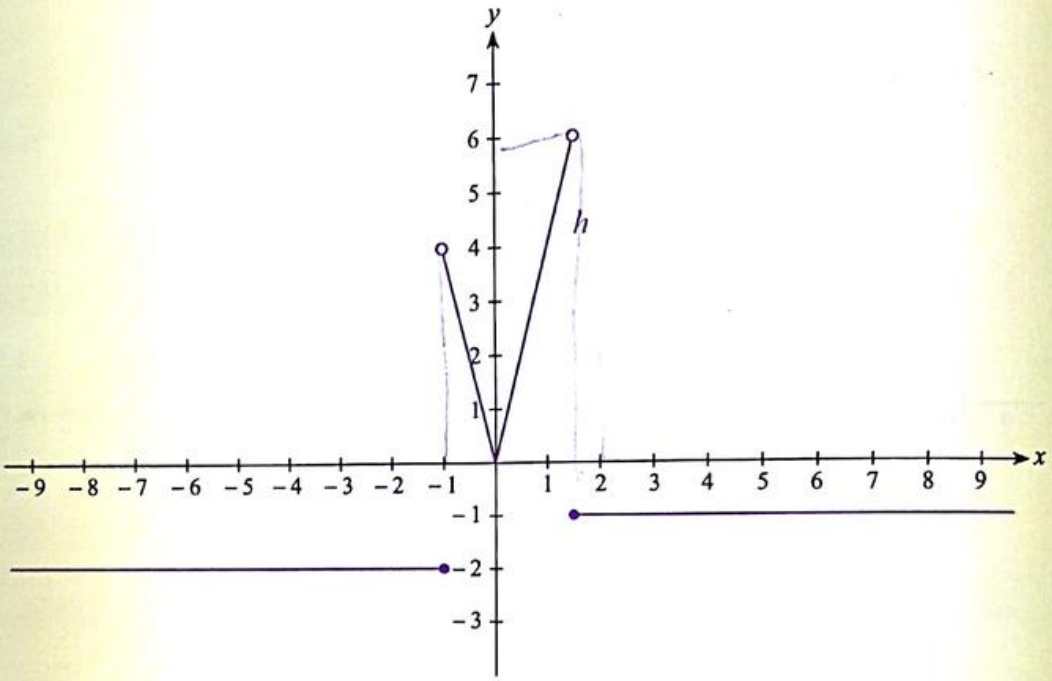


Observe que al realizar este efecto, los extremos de los intervalos del rango de la función comprimida verticalmente comparados con los de la función original, se reducen, en valor absoluto, a la mitad.

Scanned by CamScanner

b) $h(x) = f(4x)$

A partir de la gráfica original de la función $f(x)$, se construye la nueva función $h(x)$, registrándose una compresión horizontal, tal como se observa a continuación:



Observe que al realizar este efecto, los extremos de los intervalos del dominio de la función comprimida horizontalmente, comparados con los de la función original, se reducen, en valor absoluto, a su cuarta parte.

Valores Absolutos

Dada la regla de correspondencia de f, se pueden generar las nuevas funciones:

- $f(|x|)$: Reflexión de la gráfica de f cuando $x > 0$, respecto al eje Y.
- $f(-|x|)$: Reflexión de la gráfica de f cuando $x < 0$, respecto al eje Y.
- $|f(x)|$: Reflexión de la gráfica de f cuando $y < 0$, respecto al eje X.

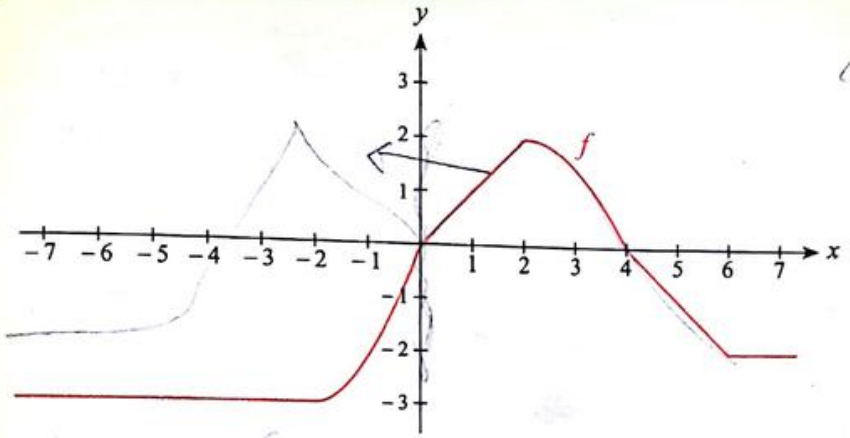
Nótese que en los dos primeros casos se obtiene una función par, ya que:

$$f(|x|) = f(|-x|)$$
$$f(-|x|) = f(-|-x|)$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.27 Valores Absolutos.

A partir de la gráfica de f:



Bosqueje las gráficas de:

a) $g(x) = f(|x|)$

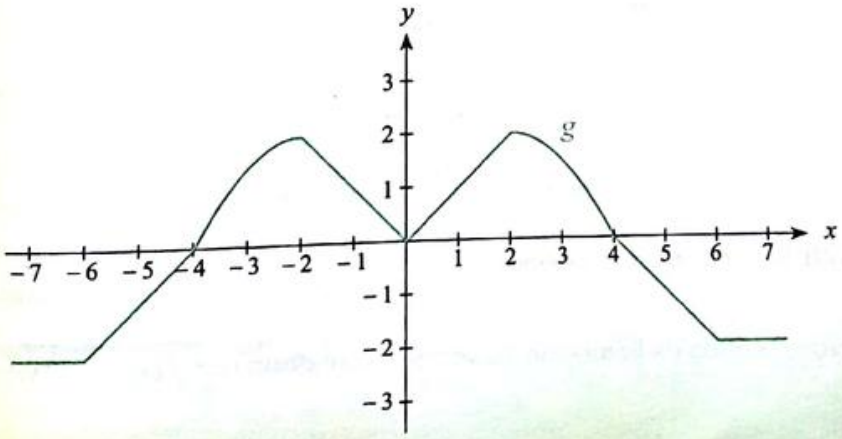
b) $h(x) = f(-|x|)$

c) $m(x) = |f(x)|$

Solución:

a) $g(x) = f(|x|)$

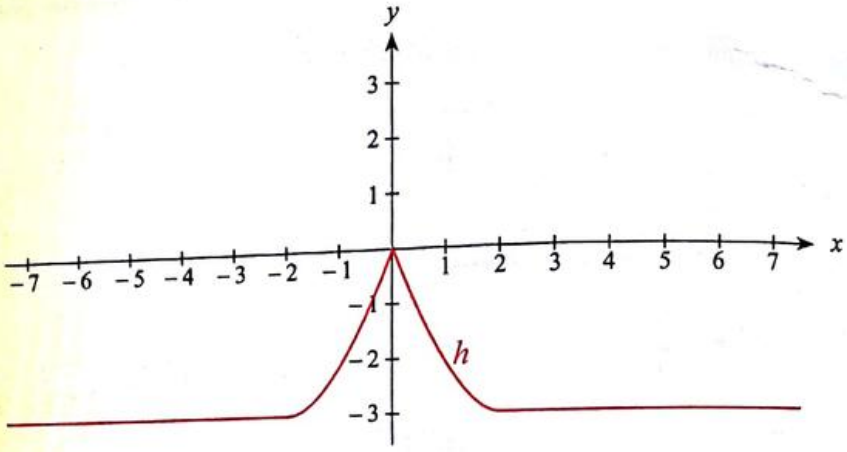
En este caso se produce la reflexión de la gráfica de f cuando $x > 0$, respecto al eje Y.



Scanned by CamScanner

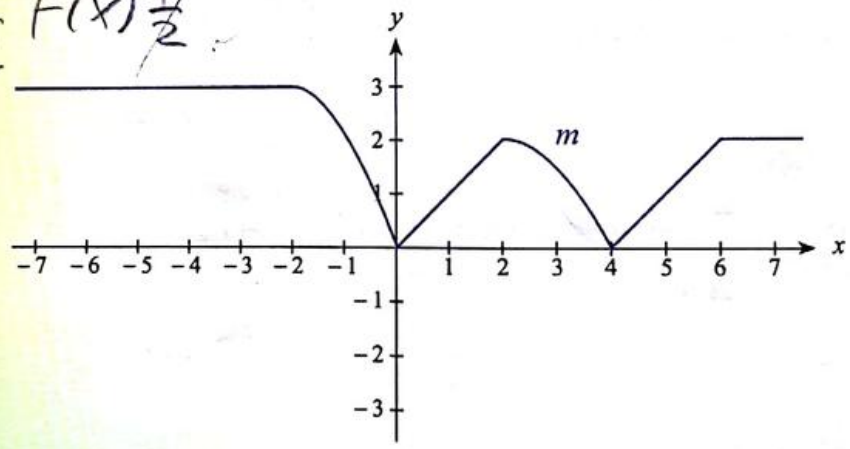
b) $h(x) = f(-|x|)$

En este caso se produce la reflexión de la gráfica de f cuando $x < 0$, respecto al eje Y.



c) $m(x) = |f(x)|$

En este caso se produce la reflexión de la gráfica de f cuando $y < 0$, respecto al eje X.



Ejemplo 4.28 Técnicas de graficación.

Construya la gráfica de la función de variable real dada por: $f(x) = -|2x + 1| + 3$.

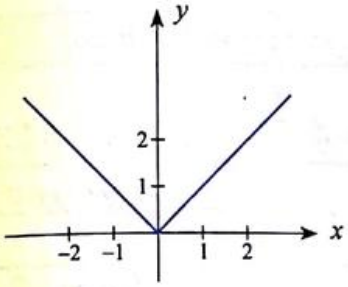
Solución:

Se puede obtener la función solicitada mediante los siguientes pasos:

Scanned by CamScanner

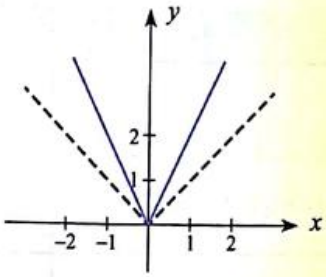
1) $y = |x|$

Función Valor Absoluto



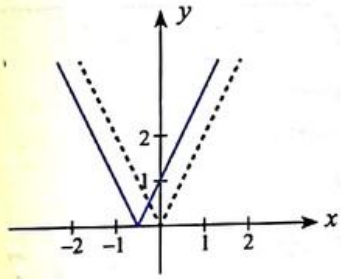
2) $y = |2x|$

Compresión horizontal



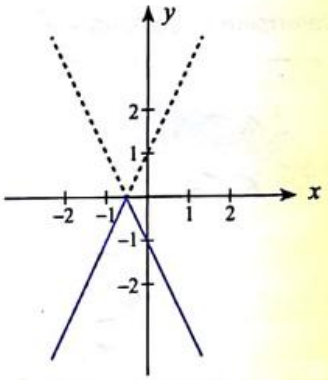
3) $y = |2x + 1|$

Desplazamiento de 0.5 unidades a la izquierda



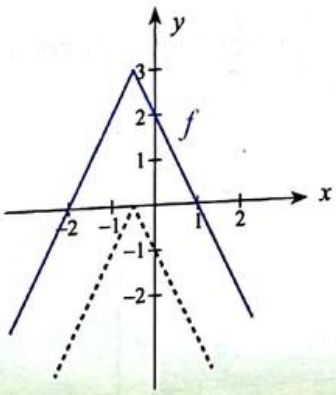
4) $y = -|2x + 1|$

Reflexión respecto al eje X



5) $y = -|2x + 1| + 3$

Desplazamiento de 3 unidades hacia arriba



Scanned by CamScanner

1) Considere una función continua f tal que: $dom\, f = [-2, 2]$ y $rg\, f = [0, 1]$.

a) Tomando como punto de partida a la función f, describa cada efecto de graficación indicado a continuación para llegar a obtener la función:

$$g(x) = 3f(2x-4)+1$$

$f(x)$	Descripción del efecto
$f(2x)$	Se desplaza y luego se comprime 3 U.
$f(2(x-2)) = f(2x-4)$	Se desplaza 3 Unidades hacia lo derecho
$3f(2x-4)$	Se desplaza 3 Unidades hacia lo derecho y se comprime
$g(x) = 3f(2x-4)+1$	Se desplaza 2 Unidades hacia lo derecho y 1 Unidad hacia arriba

b) Determine el dominio y el rango de la nueva función g.

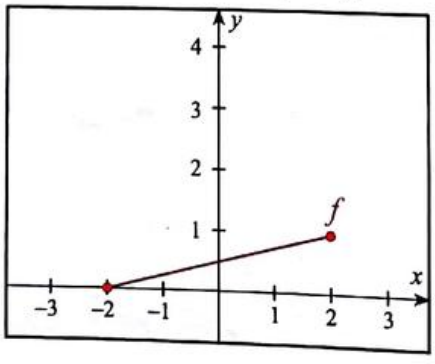
$2x-4=0$

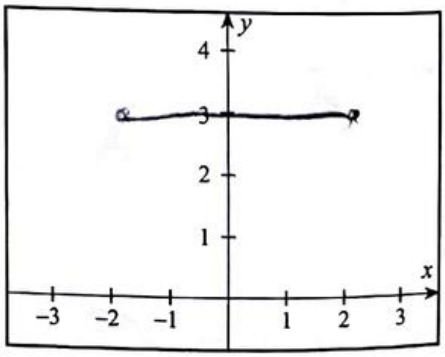
$x=2$

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{2\}$

$Rg\, g(x) = [3, +\infty)$

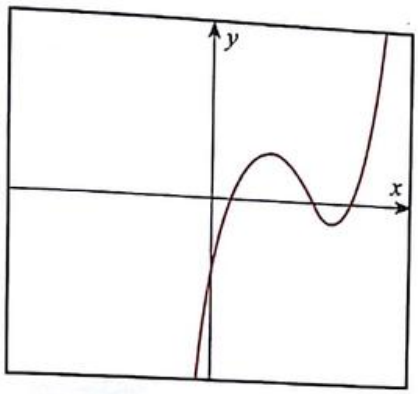
c) Verifique los resultados anteriores graficando la función g, considerando para esto, la función $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, x \in [-2,2]$ dada a continuación.



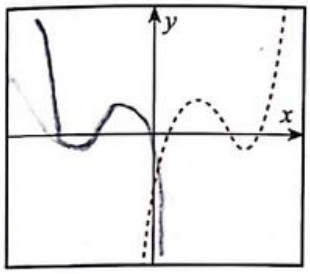


Scanned by CamScanner

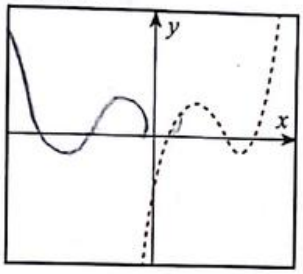
2) Dada la gráfica de la función f, obtenga las gráficas de las variaciones indicadas:



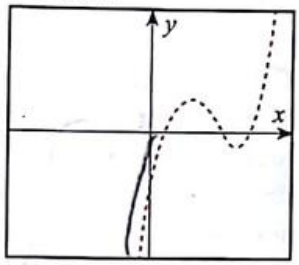
a) $f(-x)$



b) $f(|x|)$

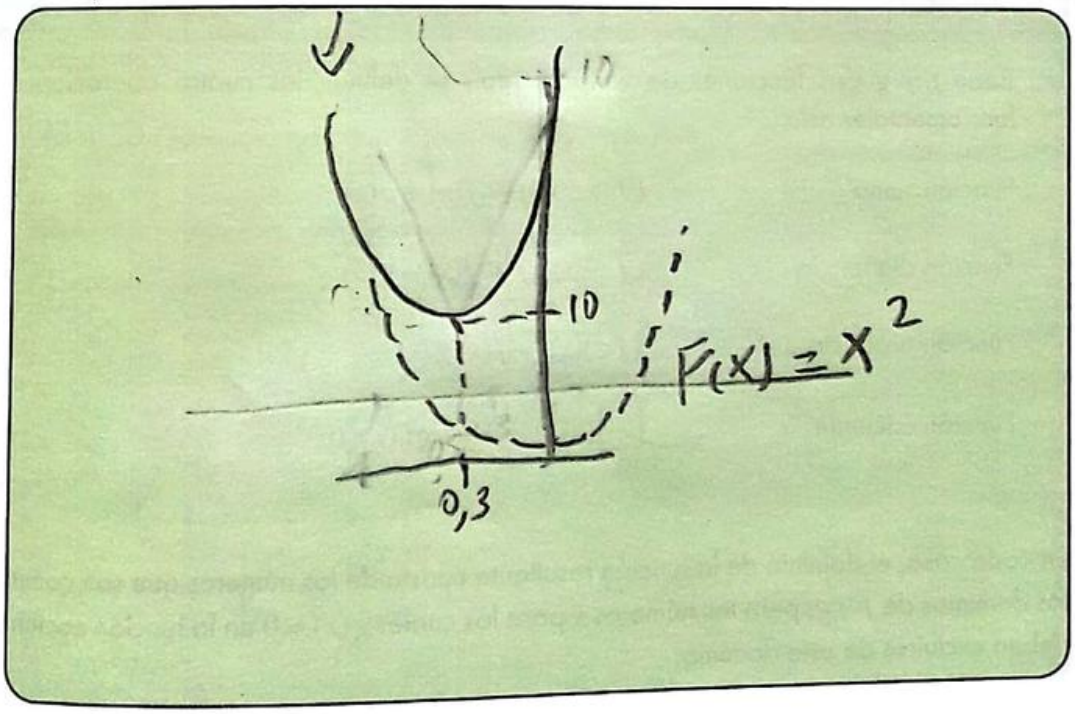


c) $|f(|x|)|$



3) Describa una de las posibles maneras de obtener la gráfica de la siguiente función con el uso de técnicas de graficación:

$$g(x) = |(-3|x| + 1)^2 + 10|, \text{ partiendo de } f(x) = x^2$$



Scanned by CamScanner

4.9 Operaciones con Funciones de Variable Real

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dadas las reglas de correspondencia de dos o más funciones de variable real, determinar la regla de correspondencia de la función suma, diferencia, producto o división, especificando el dominio de la operación.
- Interpretar el efecto de la suma, producto y división entre funciones inyectivas, sobreyectivas, constantes, crecientes, decrecientes, pares, impares, acotadas y periódicas.
- Dadas dos funciones de variable real, reconocer si es posible realizar la composición entre ellas.
- Dadas las reglas de correspondencia de dos funciones de variable real, realizar la composición entre ellas.

Cuando estudiamos operadores lógicos, la conjunción, la disyunción, la condicional y la bicondicional se usaron para realizar operaciones entre las proposiciones. En conjuntos, hicimos operaciones con ellos tales como la unión, intersección, diferencia y complementación. En el conjunto de los números reales hemos realizado las operaciones fundamentales con sus elementos. Ahora tenemos un nuevo conjunto, que es el conjunto de las funciones, así que también podemos definir operaciones en este conjunto.

Al igual que los números, las funciones de variable real se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir.

Definición 4.18 (Operaciones con Funciones)

Sean f y g dos funciones de variable real, se definen las cuatro operaciones fundamentales así:

Función suma	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
Función diferencia	$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
Función producto	$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$
Función cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

En cada caso, el dominio de la función resultante consta de los números que son comunes a los dominios de f y g, pero los números x para los cuales $g(x)=0$ en la función cociente $\frac{f}{g}$, deben excluirse de este dominio.

Scanned by CamScanner

Algunas propiedades de las operaciones (siempre y cuando estén definidas) sobre los tipos de funciones son:

- La suma (diferencia) y el producto (cociente) de dos funciones pares es par.
- La suma (diferencia) de dos funciones impares es impar.
- El producto (cociente) de dos funciones impares es par.
- La suma (diferencia) de una función par y una impar, ambas no nulas, no es par, ni impar.
- El producto (cociente) de una función par y una impar es impar.
- La suma de dos funciones crecientes (decrecientes) también es creciente (decreciente).

Estas propiedades pueden ser demostradas aplicando las definiciones dadas para tipos de funciones.

Ejemplo 4.29 Propiedades de las operaciones entre funciones.

Demuestre que la suma de dos funciones pares es par.

Solución:

Sean f y g dos funciones pares. Por definición $f(x)=f(-x)$ y $g(x)=g(-x)$.

$f(x)+g(x) = f(-x)+g(-x)$ Sumando ambas igualdades.

$(f+g)(x) = (f+g)(-x)$ Aplicando la definición de suma de funciones.

Con lo que se concluye que la función $(f+g)$ también es par.

Ejemplo 4.30 Operaciones con funciones de variable real.

Obtenga las reglas de correspondencia de las funciones $(f+g)$, $(f-g)$, (fg) y $\left(\frac{f}{g}\right)$ a partir de:

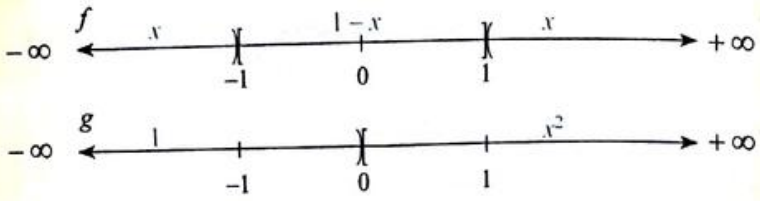
$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \curvearrowright & & \\ \mathbf{R} & & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & g & \\ \curvearrowright & & \\ \mathbf{R} & & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & |x|\leq 1 \\ x, & |x|>1 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$$

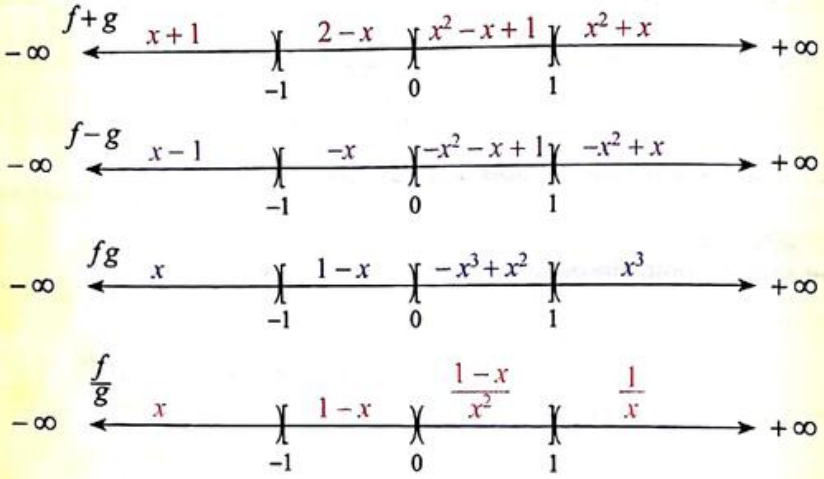
Scanned by CamScanner

Solución:

Para realizar las operaciones solicitadas, marcamos sobre la recta real la regla de correspondencia de cada función con sus intervalos respectivos.



A fin de facilitar nuestro trabajo, marcamos sobre una nueva recta real los intervalos comunes a ambas funciones y efectuamos las operaciones según corresponda.



Las reglas de correspondencia son, respectivamente:

$$(f+g)(x)=\begin{cases} x+1, & x<-1 \\ 2-x, & -1\le x<0 \\ x^2-x+1, & 0\le x\le 1 \\ x^2+x, & x>1 \end{cases}$$

$$(f-g)(x)=\begin{cases} x-1, & x<-1 \\ -x, & -1\le x<0 \\ -x^2-x+1, & 0\le x\le 1 \\ -x^2+x, & x>1 \end{cases}$$

$$(fg)(x)=\begin{cases} x, & x<-1 \\ 1-x, & -1\le x<0 \\ -x^3+x^2, & 0\le x\le 1 \\ x^3, & x>1 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases} x, & x<-1 \\ 1-x, & -1\le x<0 \\ \dfrac{1-x}{x^2}, & 0<x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$$

Note que se excluye del dominio de la función cociente el valor $x=0$.

Ejemplo 4.31 Operaciones entre funciones especiales.

Sean f y g funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x)=sgn(2x-4) \text{ y } g(x)=\mu(3+x)$$

Determine la regla de correspondencia de la función $h(x)=3f(x)-2g(x)$.

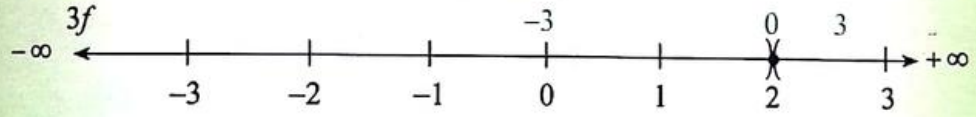
Solución:

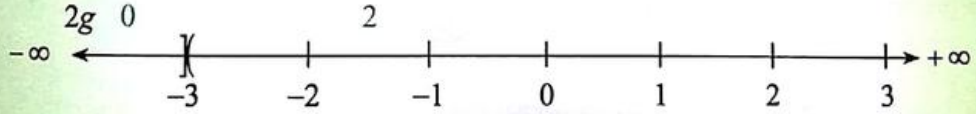
Determinamos las reglas de correspondencia de las funciones involucradas:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x>2 \\ 0, & x=2 \\ -1, & x<2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 1, & x>-3 \\ 0, & x\le -3 \end{cases}$$

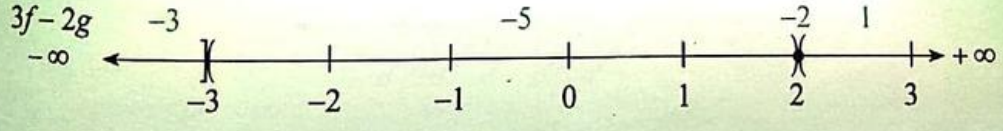
$$3f(x)=\begin{cases} 3, & x>2 \\ 0, & x=2 \\ -3, & x<2 \end{cases} \qquad 2g(x)=\begin{cases} 2, & x>-3 \\ 0, & x\le -3 \end{cases}$$

Graficamos los dominios de ambas funciones:





Graficamos el dominio común y se realiza la operación solicitada:



Scanned by CamScanner

Con lo cual se obtiene:

$$h(x)=\begin{cases} -3, & x\le -3 \\ -5, & -3<x<2 \\ -2, & x=2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Ejemplo 4.32 Operaciones entre funciones especiales.

Sea la función $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ definida por $f(x)=[\![x]\!]-x$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

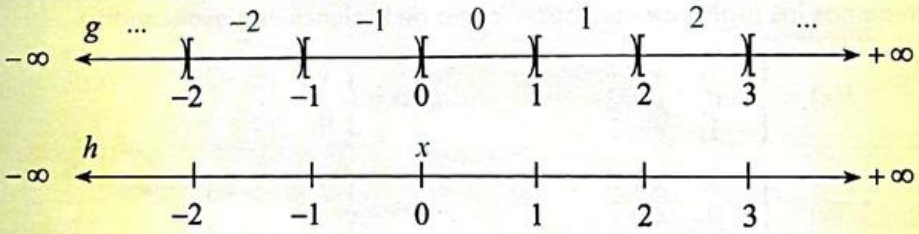
a) Si f es acotada, entonces f es inyectiva.
b) f es sobreyectiva o f es periódica.

Solución:

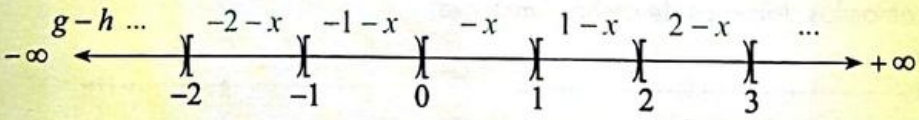
La función f está dada por la resta de dos funciones:
Considere $g(x)=[\![x]\!]$ y $h(x)=x$; luego:

$$f(x)=[\![x]\!]-x=g(x)-h(x)$$

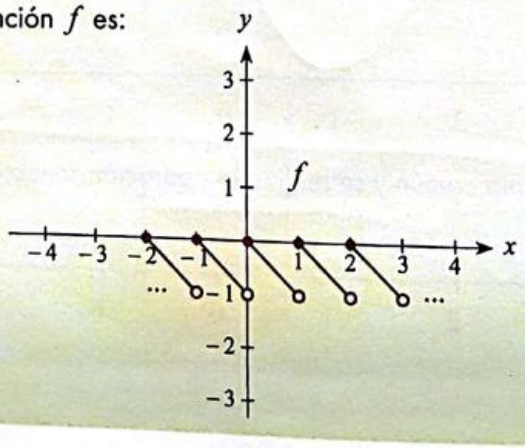
Graficamos los dominios de las funciones:



Graficamos el dominio común y realizamos la operación solicitada:



La gráfica de la función f es:



Scanned by CamScanner

De aquí se evidencia que f es acotada, periódica, no es inyectiva ni sobreyectiva.

Por lo tanto:

a) $1 \to 0 \equiv 0$

b) $0 \vee 1 \equiv 1$

Ya hemos estudiado, en el capítulo 2, la composición de funciones para conjuntos finitos; vamos a ampliar ahora este concepto para funciones de variable real. Una composición de funciones tiene por objetivo combinarlas para formar una nueva función y sus aplicaciones son diversas.

Por ejemplo, un DVD cuesta x dólares al mayoreo. El precio que el almacén paga al distribuidor está dado por la función $p(x) = x + 0.25$. El precio que el cliente paga en el almacén es $c(x) = \left(\frac{7}{5}\right)x$. Si un DVD cuesta \$0.25 al mayoreo, el distribuidor lo vende al almacén a \$0.50 y el almacén se lo vende al cliente a \$0.70. Podemos notar que lo que debe pagar el cliente, en general, es $c(p(x)) = \left(\frac{7}{5}\right)(x + 0.25)$, es decir, se tiene un precio compuesto para el consumidor final.

Definición 4.19 (Composición de Funciones de Variable Real)

Sean f y g dos funciones de variable real:

- La composición de las funciones g con f denotada por $g \circ f$ se define por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

que se lee "g compuesta con f".

Para que esta composición sea la función compuesta $g \circ f$, es necesario que $rg\, f \subseteq dom\, g$.

Se puede verificar que $dom\,(g \circ f) = dom\, f$.

- La composición de las funciones f con g denotada por $f \circ g$ se define por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

que se lee "f compuesta con g".

Para que esta composición sea la función compuesta $f \circ g$, es necesario que $rg\, g \subseteq dom\, f$.

Se puede verificar que $dom\,(f \circ g) = dom\, g$.

En los ejercicios que a continuación se desarrollan, el lector puede comprobar fácilmente que se cumple la condición necesaria para que las funciones compuestas requeridas existan, verificándose así la inclusión de rangos en dominios, según sea el caso.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.33 Composición de funciones de variable real.

Sean $f(x) = \sqrt{x-1}$, $\forall x \geq 1$ y $g(x) = x^2 + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obtenga las reglas de correspondencia de $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución:

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{(x^2+2)-1} = \sqrt{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 2 = x - 1 + 2 = x + 1, \forall x \geq 1$$

Ejemplo 4.34 Composición de funciones de variable real.

Sean: $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 2 \\ 1, & x \leq 2 \end{cases}$

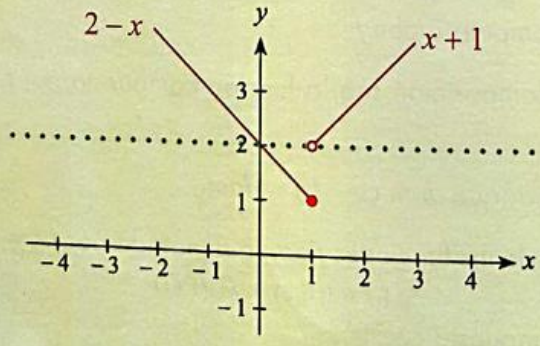
Determine la regla de correspondencia de $(g \circ f)(x)$.

Solución:

Aplicando la definición:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} [f(x)]^2, & f(x) > 2 \ \wedge \ x \in dom\, f \\ 1, & f(x) \leq 2 \ \wedge \ x \in dom\, f \end{cases}$$

Para determinar la correspondencia del rango de la función f con los intervalos de dominio respectivos, nos podemos ayudar de su gráfica:



- $f(x) > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
- $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$

Por lo tanto:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (2-x)^2, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x+1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.35 Composición de funciones.

Sean f y g dos funciones de variable real, tales que:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 2 \\ 4, & 2<x<4 \\ 2-x, & x\ge 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x^2, & x<0 \end{cases}$$

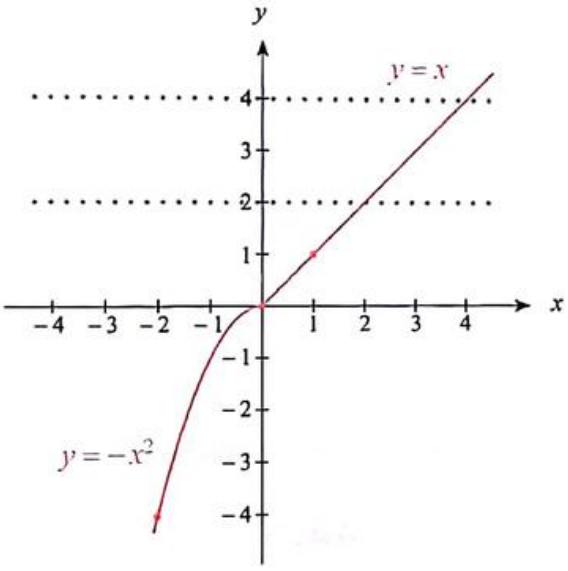
Determine la regla de correspondencia de $(f\circ g)(x)$.

Solución:

Aplicando la definición:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases} [g(x)]^2+1, & g(x)\le 2 \ \wedge \ x\in dom\, g \\ 4, & 2<g(x)<4 \ \wedge \ x\in dom\, g \\ 2-g(x), & g(x)\ge 4 \ \wedge \ x\in dom\, g \end{cases}$$

En este caso, nos podemos apoyar para nuestro análisis en la gráfica de la función g:



- $g(x)\le 2 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty,0)\cup[0,2]$
- $2<g(x)<4 \quad \Leftrightarrow \quad x\in(2,4)$
- $g(x)\ge 4 \quad \Leftrightarrow \quad x\in[4,+\infty)$

Scanned by CamScanner

Para luego concluir que:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \le x \le 2 \\ 4, & 2 < x < 4 \\ 2 - x, & x \ge 4 \end{cases}$$

Ejemplo 4.36 Composición entre funciones especiales.

Sean:

$$f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] - 1, & x \le -2 \\ |x| + 2, & -2 < x \le 1 \\ 2\,sgn(x), & x > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \le 0 \\ sgn(2x), & 0 < x \le 2 \\ [\![x]\!] + \mu(x), & x > 2 \end{cases}$$

Evalúe:

a) $(f \circ g)(3.5)$

b) $(g \circ f)(-2.5)$

Solución:

a) $(f \circ g)(3.5) = f(g(3.5))$

Evaluando $g(3.5) = [\![3.5]\!] + \mu(3.5) = 3 + 1 = 4$.

Luego, evaluando $f(4) = 2\,sgn(4) = 2(1) = 2$.

$\therefore (f \circ g)(3.5) = 2$

b) $(g \circ f)(-2.5) = g(f(-2.5))$

Evaluando $f(-2.5) = [\![-2.5]\!] - 1 = -3 - 1 = -4$.

Luego, evaluando $g(-4) = 1 - |-4| = 1 - 4 = -3$.

$\therefore (g \circ f)(-2.5) = -3$

Ejemplo 4.37 Graficación de funciones de variable real.

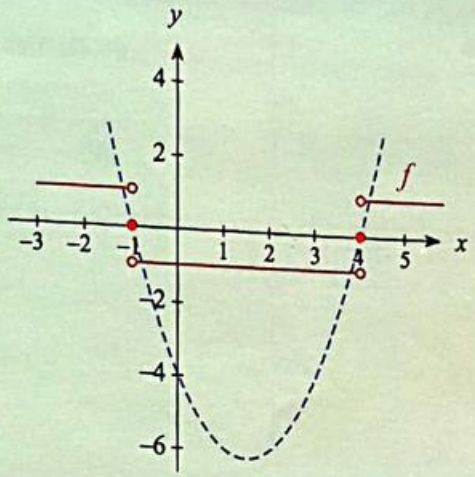
Se requiere la gráfica de $f(x) = sgn\,(x^2 - 3x - 4)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Solución:

Basta graficar la parábola y, sobre los intervalos correspondientes, emplear la definición de la función signo, tomando en cuenta que el argumento de esta función es el rango de la función cuadrática.

Scanned by CamScanner

Así, se obtiene la siguiente gráfica:



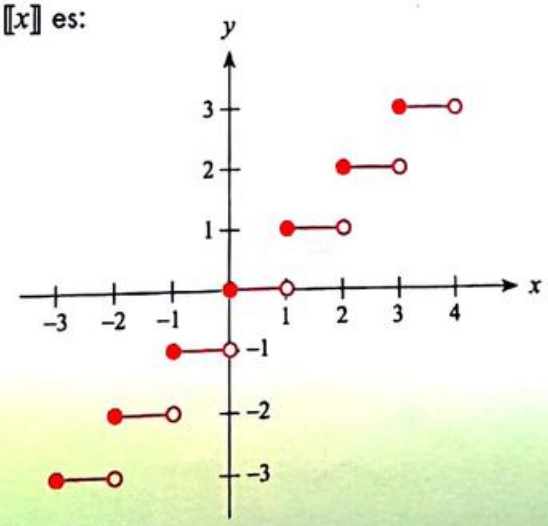
Gráficamente también se pueden resolver ecuaciones o inecuaciones. Así, si se requiere determinar, a partir del ejemplo anterior, el conjunto de verdad del predicado $p(x)$: $sgn(x^2 - 3x - 4) = 1$ con $\text{Re} = \mathbb{R}$, basta graficar la función $sgn(x^2 - 3x - 4)$ y en la gráfica se observa que su rango es 1 si y sólo si $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$. Por lo tanto, este conjunto es $Ap(x)$.

Ejemplo 4.38 Operaciones entre funciones.

Bosqueje la gráfica de la función definida de $[-6, 6]$ en $\mathbb{R}$, cuya regla de correspondencia es $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right] + \mu(x)$.

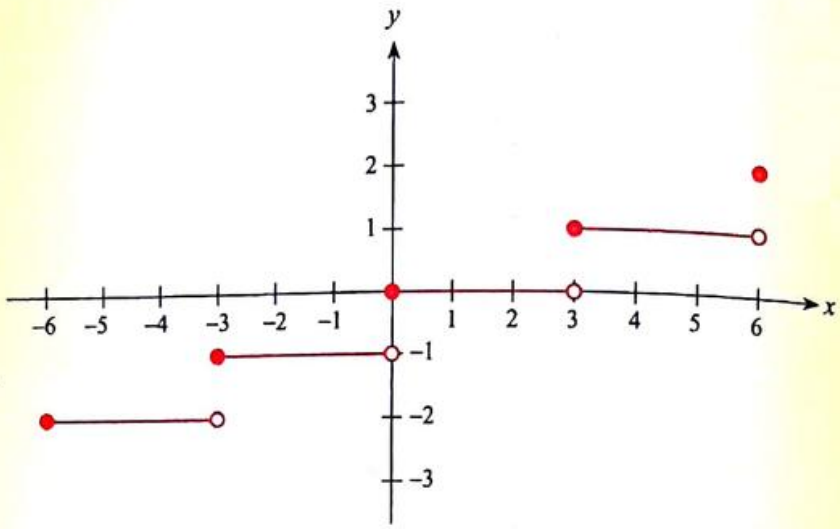
Solución:

La gráfica de $y = [\![x]\!]$ es:



Scanned by CamScanner

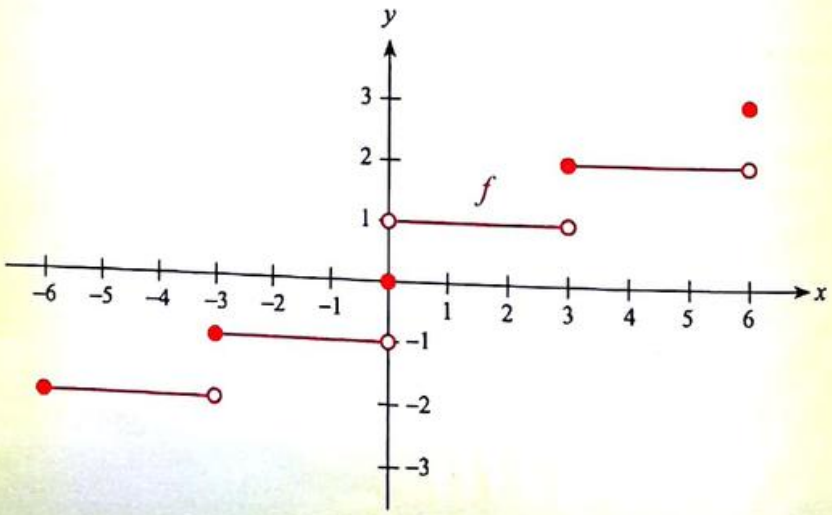
La gráfica de $y = \left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]$ se obtiene aplicando un alargamiento horizontal:



Se aplica la definición de la función escalón $\mu(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, para graficar la nueva función $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right] + \mu(x)$.

La función precedente se obtiene sumando la función entero mayor y la función escalón, por lo que se tendrá la definición de una función por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} \left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right] + 1, & x > 0 \\ \left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right], & x \leq 0 \end{cases}$$



Scanned by CamScanner

4 | Funciones de una Variable Real

4.9 Operaciones con Funciones de Variable Real

Autoevaluación

1) Demuestre que la suma de dos funciones estrictamente crecientes, es también una función estrictamente creciente.

$F(x+1)$ $x \geq 1$

$g(x^3)$ $x \geq 0$

$F+g = |x+1| + |x^3|$

$= x+1 \neq x^3$

$= x^3 + x + 1$

$= x(x+2)$

$(x=0) \; (x=-2)$

$\therefore$ FALSA

2) Sean las funciones de variable real de X en $\mathbb{R}$: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$, determine el dominio de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = (f+g)(x)$

$\left(\sqrt{1-x^2}\right) + |x^2| =$

$X = [-1, 1]$

b) $f_2(x) = (f-h)(x)$

$\left(\sqrt{1-x^2}\right) - \left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right) =$

$x(x-1)$

$X=0 \; \wedge \; x=1 \quad [-1,0) \cup (0,1)$

c) $f_3(x) = (g \cdot h)(x)$

$(x^2) \cdot \left|\dfrac{1}{x(x-1)}\right| =$

$x=0 \; \wedge \; x=1 \quad \mathbb{R} - \{0, 1\}$

d) $f_4(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} =$

$[-1, 0) \cup (0, 1]$

Scanned by CamScanner

3) Considerando las funciones f, g y h del ejercicio anterior, obtenga, de ser posible, las siguientes composiciones. Note que $rg\,f = [0, 1]$.

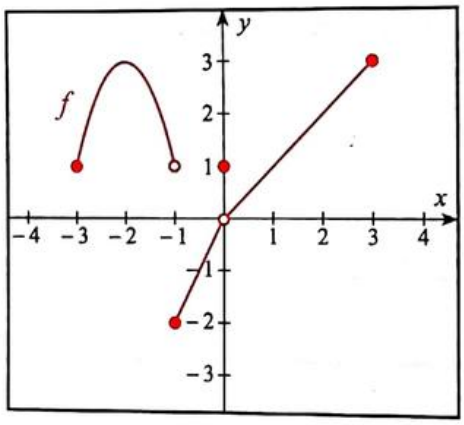
a) $(g \circ f)(x)$

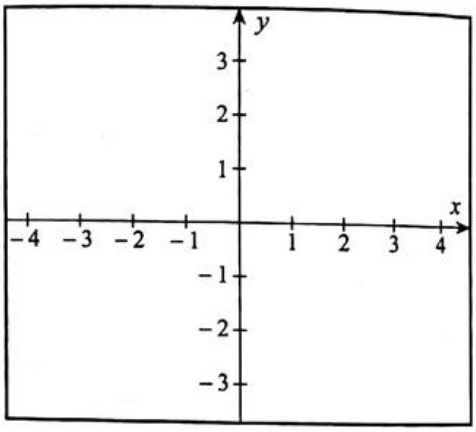
$-x^2, \forall x \in [-1, 1]$

b) $(h \circ f)(x)$

No es posible

4) A partir de la función f graficada a continuación:





Determine la regla de correspondencia de las funciones compuestas $g(x) = \mu(f(x))$ y $h(x) = sgn(1 - f(x))$. Dispone para su facilidad, de un plano cartesiano para graficar la función $1 - f(x)$.

$$\mu f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-3, -1) \cup [0, 3) \\ 0, & x \in [-1, 0) \end{cases}$$

$$sgn(-1 - f(x)) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0 & x \in \{-1, 0, 1\} \\ -1 & x \in (-3, -1) \cup (1, 3] \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

4.10 Función Inversa de una Función Biyectiva

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar las condiciones para la existencia de la inversa de una función de variable real.
- Dada una función biyectiva, determinar la regla de correspondencia de su inversa.
- Interpretar la relación entre la gráfica de una función y la de su inversa.

En el capítulo 2 se definieron los conceptos de función biyectiva e inversa. Basados en estos conceptos, podemos afirmar que una función de variable real $f: X \mapsto Y$ es inversible si y sólo si es biyectiva; esto es, su relación inversa $f^{-1}: Y \mapsto X$ también es una función.

Una forma práctica para obtener la inversa f^{-1} de una función biyectiva, consiste en realizar lo siguiente:

- Cambiar $f(x)$ por x y reemplazar x por y.
- Despejar y.

La regla de correspondencia de f^{-1} sería la ecuación obtenida, con el conjunto de partida de f como el conjunto de llegada de la inversa, y el conjunto de llegada de f como el conjunto de partida de la inversa. Es decir, $dom\, f = rg\, f^{-1}$ y $rg\, f = dom\, f^{-1}$.

Gráficamente, cuando se representan f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano, ambas son simétricas respecto a la función identidad $f(x) = x$.

Otro aspecto a considerar, es que la monotonía de f se mantiene con respecto a su función inversa. Si f es estrictamente creciente, f^{-1} también lo es; mientras que si f es estrictamente decreciente, f^{-1} presenta la misma característica.

No hay que olvidar que la composición entre la función y su inversa constituye una función identidad en X, mientras que la composición entre la inversa y la función permite construir una función identidad en Y, lo cual ratifica que la composición de funciones no es conmutativa.

Con base en lo expuesto en el párrafo anterior, otro procedimiento conceptualmente viable para obtener la regla de correspondencia de la función inversa, consiste en realizar previamente la composición entre la función y su inversa, igualando este resultado a la función identidad, tal como se detalla en el siguiente ejemplo.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.39 Función Inversa.

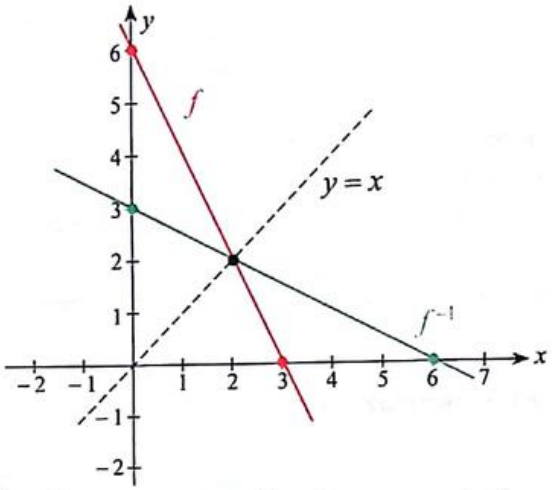
Sea $f(x) = -2x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$, determine f^{-1} y grafíquela.

Solución:

Dado que la función es biyectiva, al realizar la composición entre la función y su inversa e igualando luego a la función identidad, se obtiene:

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) = \; & f(f^{-1}(x)) = x \\ & -2f^{-1}(x) + 6 = x \\ & -2f^{-1}(x) = x - 6\end{aligned}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{6-x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$



Nótese que ambas funciones tienen la misma monotonía, en este caso son estrictamente decrecientes. Ambas gráficas guardan simetría respecto a la función identidad.

Ejemplo 4.40 Inversa de una función.

Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x + 1, & -1 < x < 0 \\ -(x+1)^2, & x \leq -1 \end{cases}$$

a) Determine, de ser posible, la regla de correspondencia de la función inversa f^{-1}.

b) Considerando el resultado obtenido previamente, bosqueje en el mismo plano cartesiano las gráficas de la función identidad y las funciones f y f^{-1}.

Solución:

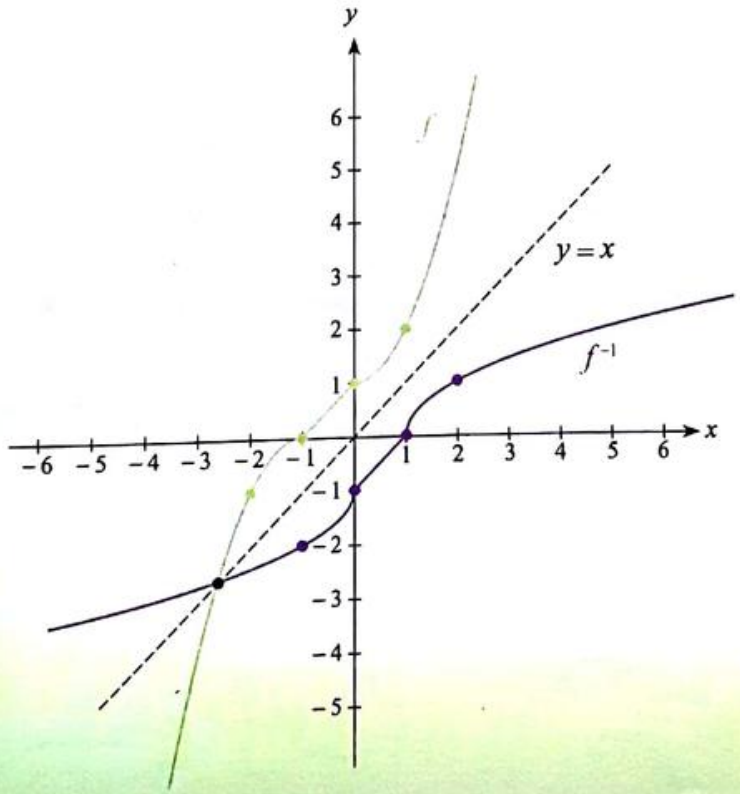
Se analizará cada tramo de la función, la cual es biyectiva:

Scanned by CamScanner

$f(x)=x^2+1$	$f(x)=x+1$	$f(x)=-(x+1)^2$
$(x\geq 0)\rightarrow(y\geq 1)$	$(-1<x<0)\rightarrow(0<y<1)$	$(x\leq -1)\rightarrow(y\leq 0)$
$x=y^2+1$	$x=y+1$	$x=-(y+1)^2$
$y^2=x-1$	$y=x-1$	$(y+1)^2=-x$
$\lvert y\rvert=\sqrt{x-1}$	$f^{-1}(x)=x-1, 0<x<1$	$\lvert y+1\rvert=\sqrt{-x}$
$y=\pm\sqrt{x-1}$		$y=-1\pm\sqrt{-x}$
$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}, x\geq 1$		$f^{-1}(x)=-1-\sqrt{-x}, x\leq 0$

Observe que:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x\geq 1\\ x-1, & 0<x<1\\ -1-\sqrt{-x}, & x\leq 0\end{cases}$$



Scanned by CamScanner

1) Sean las funciones f, g y h de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 2x + 3,\ g(x) = \frac{1}{2}(1 - x) \text{ y } ((2f - h)(f^{-1} + g))(x) = x - 2$$

De ser posible, determine la regla de correspondencia de la función h.

$F(x) = 2x+3$

$g(x) = \frac{1}{2}(1-x)$

$((2f-h)(f^{-1}+g))(x) = x-2$

$(2(2x+3)-h)\left(\left(\frac{y-3}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}(1-x)\right)\right) = x-2$

$h = 5x + 4$

$F(x) = 2x+3$

$y = 2x+3$

$-2x = -y+3$

$2x = y-3$

$F^{-1}(x) = \frac{y-3}{2}$

2) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas, justificando sus respuestas.

a) Sea la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$, entonces $f^{-1}(x) = bx + a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

∴ FALSA

$F(x) = ax + b$ $\quad a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

$F^{-1}(x) = bx + a = 0$ $\quad y = ax + b$

$ax = -y + b$

$F^{-1}(x) = \frac{x+b}{a} = 1$ $\quad x = \frac{-y+b}{a}$

Scanned by CamScanner

b) Sea $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ una función biyectiva, entonces $g(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ es su función inversa.

FALSA

$F(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$

$g(x) = x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ∴ 0

$F(x)^{-1} = x^2$ $x > 0$ ∴ 1

$y = \sqrt{x}$

$y^2 = x$

$y = x^2$ $x > 0$

3) Considere las funciones biyectivas $f(x) = \sqrt{x-1}$, $\forall x \geq 1$ y $g(x) = \frac{1}{4}(x+3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

a) Obtenga las funciones inversas f^{-1} y g^{-1} indicando sus dominios.

$F(x) = \sqrt{x-1}$

$y = \sqrt{x-1}$

$y^2 = x - 1$

$-x = -y^2 - 1$

$x = y^2 + 1$

$y = x^2 + 1$

$F^{-1}(x) = x^2 + 1$

$g(x) = \frac{1}{4}(x+3)$

$y = \frac{1}{4}(x+3)$

$x = \frac{1}{4}(y+3)$

$4x = y + 3$

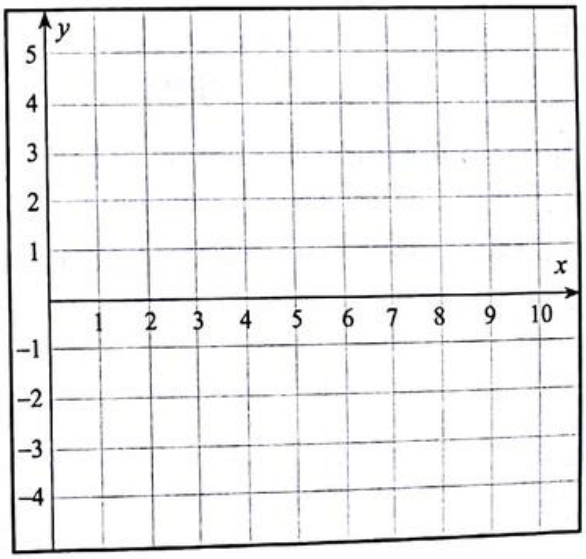
$-y = 3 - 4x$

$y = -3 + 4x$

$g^{-1}(x) = -3 + 4x$

b) Grafique f^{-1}, g^{-1} del literal anterior y califique la siguiente proposición como verdadera o falsa:

$(f^{-1}(2) = g^{-1}(2)) \wedge (f(5) = g(5))$



Scanned by CamScanner

4.11 Funciones Polinomiales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar los elementos que conforman una función polinomial de grado n.
- Dadas dos funciones polinomiales, realizar operaciones entre ellas.
- Dadas dos funciones polinomiales, dividirlas y especificar el polinomio dividendo, divisor, cociente y residuo.
- Dada una división entre polinomios, obtener el residuo de la división empleando el teorema del residuo.
- Dada una división entre polinomios, reconocer si es exacta empleando el teorema del factor.
- Dada una ecuación polinomial, analizar e interpretar sus raíces.
- Dado un polinomio definido sobre un intervalo cerrado, inspeccionar la existencia de un cero en ese intervalo.

En este mismo capítulo hemos estudiado funciones lineales y cuadráticas, mismas que pertenecen a la clase de funciones polinomiales sobre las cuales se profundizará en la presente sección.

Definición 4.20 (Función Polinomial)

Una función polinomial es una función de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales, y $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. El dominio de esta función lo constituyen todos los números reales.

El grado de una función polinomial es el mayor exponente de la variable presente en el polinomio, en este caso el exponente n, si $a_n \neq 0$.

Ejemplo 4.41 Identificación de funciones polinomiales.

Determinar cuáles de las siguientes funciones son polinomiales:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4, \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $g(x) = \sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$.

c) $h(x) = 5, \ \forall x \in \mathbf{R}$.

d) $m(x) = \dfrac{x-2}{x+1}, \ \forall x \neq -1$.

Scanned by CamScanner

Solución:

a) f es una función polinomial de grado tres.
b) g no es una función polinomial. La variable $(x-1)$ está elevada a la potencia $1/2$, que es un número fraccionario.
c) h es una función polinomial de grado cero.
d) m no es una función polinomial, ya que está dada por el cociente entre dos polinomios.

4.11.1 Gráficas de funciones polinomiales

Definición 4.21 (Función Potencia)

Una función potencia de grado n es de la forma:

$$f(x) = ax^n$$

donde $dom\, f = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

La gráfica de una función potencia de grado 1, $f(x) = ax$, es una recta con pendiente a que contiene al origen de coordenadas. El rango de esta función incluye todos los reales.

La gráfica de una función potencia de grado 2, $f(x) = ax^2$, es una parábola que contiene al origen de coordenadas y que es cóncava hacia arriba si $a > 0$, o cóncava hacia abajo si $a < 0$.

La gráfica de una función potencia de grado n, $f(x) = ax^n$, siendo n un número par y mayor que uno, tiene un comportamiento similar al de la función cuadrática, tal como se muestra en la Figura 4.21.

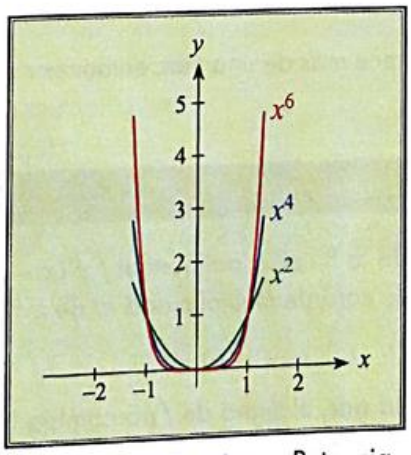


Figura 4.21: Funciones Potencia.

A medida que n crece, la función potencia sufre un alargamiento vertical cuando $|x| > 1$ y una compresión vertical cuando $|x| < 1$. El rango de estas funciones incluye el cero y todos los reales positivos.

Scanned by CamScanner

La gráfica de una función potencia de grado n, $f(x) = ax^n$, siendo n un número impar y mayor que uno, tiene un comportamiento similar al de la función cúbica, tal como se muestra en la Figura 4.22.

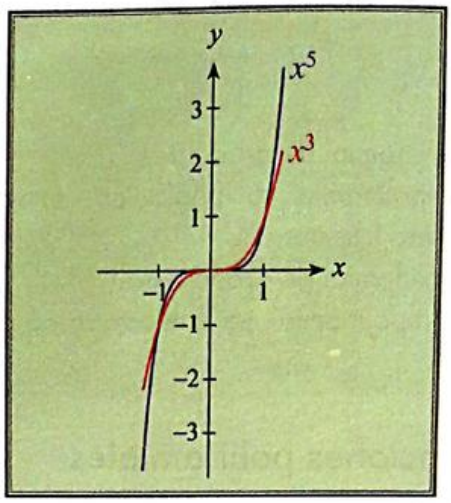


Figura 4.22: Funciones Potencia.

A medida que n crece, la función potencia sufre un alargamiento vertical cuando $|x| > 1$, y una compresión vertical cuando $|x| < 1$. El rango de estas funciones incluye todos los reales.

Para graficar la mayoría de las funciones polinomiales de grado 3 o superior, se necesitan otras técnicas. Sin embargo, la gráfica de toda función polinomial es **suave** y **continua**. Por suave queremos decir que la gráfica no tiene esquinas o puntas; continua significa que la gráfica no tiene saltos y que puede ser graficada sin interrupciones.

Si se descompone completamente en factores una función polinomial f, es fácil resolver la ecuación polinómica $f(x) = 0$ y localizar las intersecciones con el eje X.

En general, si f es una función polinomial y r es un número real para el cual $f(r) = 0$, entonces r es denominado **cero** o **raíz** de f. Por lo tanto, los ceros reales de la función polinomial son las intersecciones de su gráfica con el eje X.

Si el mismo factor $(x - r)$ aparece más de una vez, entonces r es denominado cero repetido o cero múltiple de f.

Definición 4.22 (Cero de Multiplicidad m)

Si $(x - r)^m$ es un factor de la función polinomial f y $(x - r)^{m+1}$ no es factor de f, entonces r es denominado cero de multiplicidad m de f.

Si r es un cero de multiplicidad par, el signo de f no cambia localmente de un lado al otro de r. La gráfica interseca al eje X en r.

Si r es un cero de multiplicidad impar, el signo de f cambia localmente de un lado al otro de r. La gráfica interseca al eje X en r.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.42 Identificación de ceros y de sus multiplicidades.

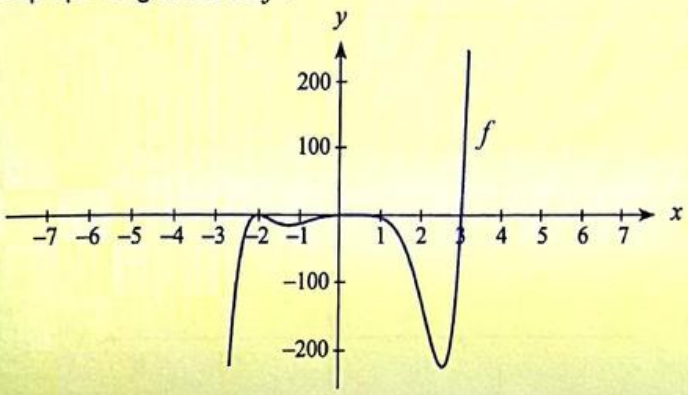
Identifique la multiplicidad de los ceros de la función polinomial:

$$f(x) = (x-3)\,(x+2)^2\left(x-\frac{1}{3}\right)^4,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solución:

3 es un cero de multiplicidad 1.
-2 es un cero de multiplicidad 2.
$\frac{1}{3}$ es un cero de multiplicidad 4.

Podemos bosquejar la gráfica de f:



Ejemplo 4.43 Identificación de ceros y de sus multiplicidades.

Construya una función polinomial f que cumpla las siguientes condiciones:

- f es de grado 5
- $x = 2$ es una raíz de multiplicidad 2
- $x = 1$ es una raíz de multiplicidad 1
- El coeficiente de x^5 es 2
- $f(0) = -8$
- $f(3) = 40$

Solución:

Debido a que $(x-2)^2$ y $(x-1)$ son factores de $f(x)$ y 2 es coeficiente de x^5, se tendría:

$$f(x) = 2\,(x-2)^2\,(x-1)\,(x^2+bx+c)$$

Si $f(0) = -8$, entonces:

$$-8 = 2\,(-2)^2\,(-1)\,(c) \quad \Rightarrow \quad -8 = -8c \rightarrow c = 1$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow f(x) = 2\,(x-2)^2\,(x-1)\,(x^2+bx+1)$$

Si $f(3) = 40$, entonces:

$$40 = 2\,(3-2)^2\,(3-1)\,(3^2+b(3)+1) \quad \Rightarrow \quad 40 = 4(10+3b) \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

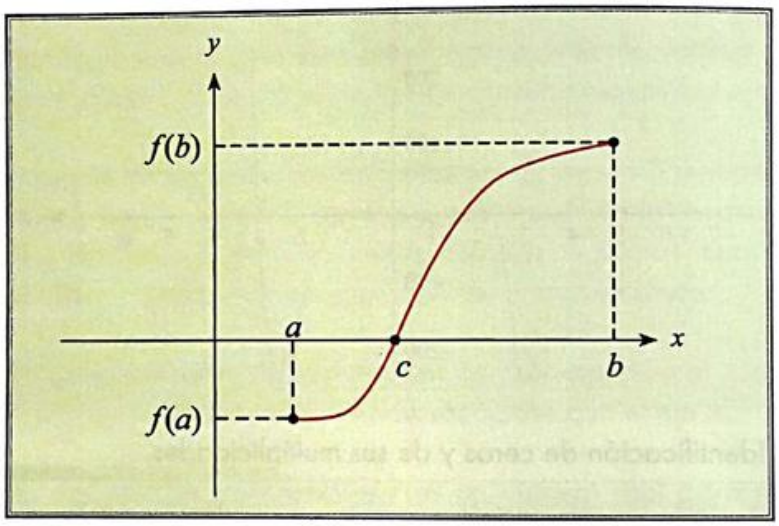
La función polinomial resultante sería:

$$f(x) = 2\,(x-2)^2\,(x-1)\,(x^2+1),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

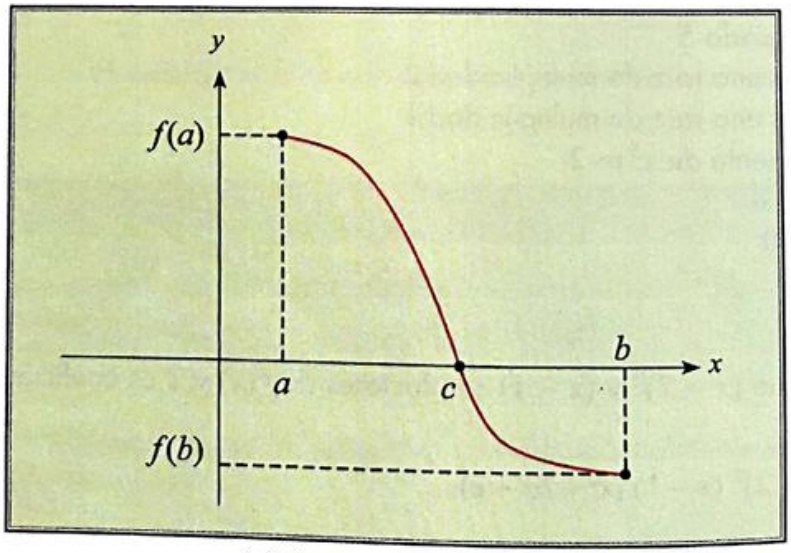
Teorema 4.3 (Valor intermedio)

Sea f una función polinomial. Si $a < b$ y además $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, entonces hay al menos un cero de f entre a y b.

Aunque la demostración de este teorema demanda métodos avanzados de cálculo, es fácil verificar por qué es verdadero en la figura 4.23.



$(f(a) < 0) \wedge (f(b) > 0)$



$(f(a) > 0) \wedge (f(b) < 0)$

Figura 4.23: Valor Intermedio.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.44 Aplicación del teorema del valor intermedio.

Respecto a la función polinomial $f(x) = 8x^4 - 2x^2 + 5x - 1$, demuestre que tiene una raíz en $[0, 1]$.

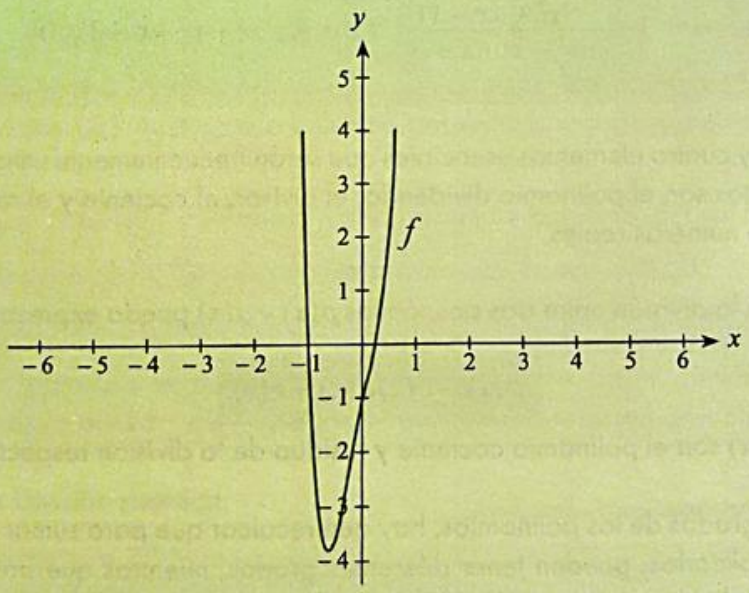
Solución:

Lo que debemos verificar es que hay un cambio de signo al evaluar la función en $x = 0$ y $x = 1$.

$f(0) = -1$
$f(1) = 8\,(1)^4 - 2(1)^2 + 5(1) - 1 = 8 - 2 + 5 - 1 = 10$

Como $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$, entonces efectivamente hay una raíz en el intervalo $[0, 1]$.

Al bosquejar la gráfica de f, se obtiene:



4.11.2 Operaciones con funciones polinomiales

De las operaciones que pueden realizarse con las funciones polinomiales: sumar, restar, multiplicar y dividir, nos interesa de manera particular esta última. Las tres primeras operaciones se realizan de acuerdo a las definiciones dadas en la sección 4.9 de este capítulo, empleando las mismas reglas que se utilizan en operaciones con expresiones algebraicas.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.45 Operaciones con funciones polinomiales.

Considerando las funciones f y g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ y $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 3$, obtenga: $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$, $(f/g)(x)$.

Solución:

- $(f+g)(x) = (3x^3 - 2x^2 + x + 2) + (-x^3 - x^2 + x + 3)$
  $(f+g)(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 5, \forall x \in \mathbb{R}$
- $(f-g)(x) = (3x^3 - 2x^2 + x + 2) - (-x^3 - x^2 + x + 3)$
  $(f-g)(x) = 4x^3 - x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- $(fg)(x) = (3x^3 - 2x^2 + x + 2)(-x^3 - x^2 + x + 3)$
  $= -3x^6 - 3x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 6x^2 - x^4 - x^3 + x^2$
  $+ 3x - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$
  $(fg)(x) = -3x^6 - x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 5x + 6, \forall x \in \mathbb{R}$
- $(f/g)(x) = (3x^3 - 2x^2 + x + 2) \div (-x^3 - x^2 + x + 3)$
  $(f/g)(x) = -3 + \frac{-5x^2 + 4x + 11}{-x^3 - x^2 + x + 3}; \forall x \in \mathbb{R},\ x^3 + x^2 - x - 3 \neq 0$

En la división hay cuatro elementos esenciales que serán frecuentemente utilizados en futuras aplicaciones; estos son el polinomio dividendo, el divisor, el cociente y el residuo, tal como en la división de números reales.

Esto permite que la división entre dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ pueda expresarse de la forma:

$$p(x) = c(x)q(x) + r(x)$$

donde $c(x)$ y $r(x)$ son el polinomio cociente y residuo de la división respectivamente.

En cuanto a los grados de los polinomios, hay que recalcar que para sumar dos polinomios, restarlos o multiplicarlos, pueden tener diferentes grados, mientras que para la división es necesario que el dividendo tenga un grado no menor al del divisor.

De esta forma, si el grado del dividendo es n y el del divisor es m, el cociente tendrá grado $n - m$ y el residuo será de grado $m - 1$.

División Sintética

Para determinar el cociente y el residuo, cuando se divide una función polinomial de grado mayor o igual que 1 entre $g(x) = x - c$, una versión abreviada de la división tradicional, denominada división sintética, hace la tarea más sencilla.

Scanned by CamScanner

Para comprender cómo se realiza la división sintética, iniciaremos dividiendo la función polinomial $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4$ entre $g(x) = x - 2$, en forma tradicional.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4 & x - 2 \\ \cline{2-2} -4x^3 + 8x^2 & 4x^2 + 5x + 2 \\ \cline{1-1} \quad 5x^2 - 8x & \\ \quad -5x^2 + 10x & \\ \cline{1-1} \quad\quad 2x + 4 & \\ \quad\quad -2x + 4 & \\ \cline{1-1} \quad\quad\quad 8 & \end{array}$$

El proceso de la división sintética surge de reescribir la división tradicional en forma compacta, en la cual no se considera la variable x, sino solamente los coeficientes de la función polinomial. Para realizar la **división sintética**, considere los siguientes pasos:

1) Escriba los coeficientes de la función polinomial f en potencias descendentes de x en el primer renglón y complete con ceros en caso de no existir algún coeficiente.
2) Traslade el término de la izquierda del primer renglón al tercer renglón.
3) Multiplique dicho término por el valor c de la función polinomial g, coloque este resultado bajo la segunda columna del segundo renglón y efectúe la suma algebraica.
4) Este nuevo resultado colóquelo en la segunda columna del tercer renglón.
5) Repita los pasos 3 y 4 para los siguientes términos hasta completar la operación.
6) La última entrada del tercer renglón representa el residuo de la división.
7) Las otras entradas representan los coeficientes en orden descendente del cociente de la división, cuyo grado es uno menos que el del dividendo.

Ejemplo 4.46 División sintética.

Utilice la división sintética para dividir la función polinomial:

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4 \text{ entre } g(x) = x - 2$$

Solución:

$$\begin{array}{r|cccc} & 4 & -3 & -8 & 4 \\ \hline \boxed{2} & & 8 & 10 & 4 \\ \hline & 4 & 5 & 2 & 8 \end{array}$$

Como resultado de la división, se obtiene:

- Cociente: $4x^2 + 5x + 2$
- Residuo: 8

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.47 División sintética.

Utilice la división sintética para dividir la función polinomial $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 1$ entre $g(x) = x + 3$.

Solución:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ \boxed{-3} & & -12 & 36 & -99 & 297 \\ \hline & 4 & -12 & 33 & -99 & 298 \end{array}$$

Como resultado de la división, se obtiene:

- Cociente: $4x^3 - 12x^2 + 33x - 99$
- Residuo: 298

Esto nos induce al siguiente teorema, que facilita la división de una función polinomial entre una lineal de la forma $x - c$.

Teorema 4.4 (Teorema del residuo)

Sea f una función polinomial, si $f(x)$ es dividida entre $(x - c)$, entonces el residuo es $f(c)$.

Ejemplo 4.48 Teorema del residuo.

Determine el residuo si $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se divide entre:
a) $x - 2$
b) $x + 3$

Solución:

a) $f(2) = (2)^3 - (2)^2 + 2(2) + 4$

$f(2) = 8 - 4 + 4 + 4$

$f(2) = 12$

b) $f(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 + 2(-3) + 4$

$f(-3) = -27 - 9 - 6 + 4$

$f(-3) = -38$

Ejemplo 4.49 Teorema del residuo.

Determine el valor de la suma $(k_1 + k_2)$ para que:

- Al dividir el polinomio $p(x) = 2x^3 + k_1x^2 - x - 3k_2$ entre $(x - 1)$, se obtenga como residuo -1; y,
- Al dividir el polinomio $p(x)$ entre $(x + 2)$, se obtenga como residuo 0.

Scanned by CamScanner

Solución:

Considerando la primera condición:

$$p(1) = 2(1)^3 + k_1(1)^2 - (1) - 3k_2 = -1 \Leftrightarrow 2 + k_1 - 1 - 3k_2 = -1 \Leftrightarrow k_1 - 3k_2 = -2$$

Considerando la segunda condición:

$$p(-2) = 2(-2)^3 + k_1(-2)^2 - (-2) - 3k_2 = 0 \Leftrightarrow -16 + 4k_1 + 2 - 3k_2 = 0 \Leftrightarrow 4k_1 - 3k_2 = 14$$

Al despejar de la primera ecuación la variable k_1 se obtiene $(k_1 = 3k_2 - 2)$ y se reemplaza esta expresión en la segunda ecuación:

$$4(3k_2 - 2) - 3k_2 = 14 \Leftrightarrow 12k_2 - 8 - 3k_2 = 14 \Leftrightarrow 9k_2 = 22 \Leftrightarrow k_2 = \frac{22}{9}$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$k_1 - 3\left(\frac{22}{9}\right) = -2 \Leftrightarrow k_1 - \frac{22}{3} = -2 \Leftrightarrow k_1 = \frac{16}{3}$$

Por lo tanto, el valor de la suma $(k_1 + k_2)$ es igual a:

$$k_1 + k_2 = \frac{16}{3} + \frac{22}{9} = \frac{48 + 22}{9} = \frac{70}{9}$$

Ejemplo 4.50 Aplicación del teorema del residuo.

Al dividir cierto polinomio $p(x)$ por $(x - 1)$, el residuo es 2; y al dividirlo por $(x - 2)$, el residuo es 5. Determine el residuo al dividir $p(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$.

Solución:

Si analizamos la división de un polinomio por otro, notaremos que el grado del polinomio del residuo es menor en uno al grado del polinomio del divisor.

Como en este caso se va a dividir $p(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$, el grado del residuo debe ser 1, es decir, $r(x)$ tendrá forma lineal.

$$r(x) = ax + b$$

Por lo tanto, se cumple que: $p(x) = c(x)(x - 1)(x - 2) + r(x)$, siendo $c(x)$ el cociente y $r(x)$ el residuo.

Esto es, $p(x) = c(x)(x - 1)(x - 2) + ax + b$.

Scanned by CamScanner

Aplicando el teorema del residuo, se tiene que:

$$p(1) = a + b$$
$$p(2) = 2a + b$$

Por condición del problema $p(1) = 2$ y $p(2) = 5$, con lo cual se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$

Obteniéndose, a partir de las condiciones dadas, los siguientes valores de a y b:

$$(a = 3) \wedge (b = -1)$$

Es decir, el residuo será:

$$r(x) = 3x - 1$$

En algunos problemas sobre división de polinomios, es de interés saber si ésta es exacta; dicho de otra forma, si el polinomio divisor es factor del polinomio dividendo, o el polinomio dividendo es divisible para el polinomio divisor.

Tal como ocurre con los números, una división entre polinomios es exacta si y sólo si su residuo es cero. De acuerdo a esto, se puede deducir un teorema para el caso de las divisiones exactas, conocido como el teorema del factor.

Teorema 4.5 (Teorema del factor)

Sea f una función polinomial, entonces $(x - c)$ es un factor de $f(x)$ si y sólo si $f(c) = 0$.

Ejemplo 4.51 Teorema del factor.

Utilice el teorema del factor para verificar que $(x + 4)$ es un factor de la función $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 16$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Solución:

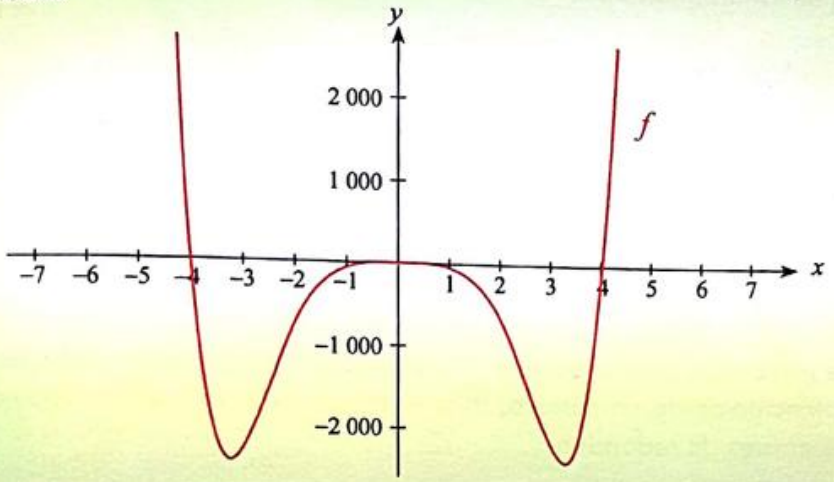
$$f(-4) = 4(-4)^6 - 64(-4)^4 + (-4)^2 - 16$$
$$f(-4) = \cancel{(4)^7} - \cancel{(4)^7} + \cancel{16} - \cancel{16} = 0$$

Como $f(-4) = 0$, concluimos por el teorema del factor que $x + 4$ es un factor de la función polinomial $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 16$.

Pero también $f(4) = 0$, porque f es una función par.

Scanned by CamScanner

Con la ayuda de un software graficador, se puede evidenciar el comportamiento de la función.



Ejemplo 4.52 Teorema del factor.

Dada la función polinomial $p(x) = x^5 - mx^4 + 17x^3 - 17x^2 + kx$, si se conoce que $p(x)$ es divisible por $(x-2)$ y $x = 1$ es una raíz de multiplicidad 2, determine de ser posible los valores de m y k.

Solución:

Se aplicará dos veces el teorema del factor:

$$p(1) = (1)^5 - m(1)^4 + 17(1)^3 - 17(1)^2 + k(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - m + \cancel{17} - \cancel{17} + k = 0 \Leftrightarrow m = k + 1$$

$$p(2) = (2)^5 - m(2)^4 + 17(2)^3 - 17(2)^2 + k(2) = 0 \Leftrightarrow 32 - 16m + 136 - 68 + 2k = 0$$

Al remplazar la variable m por la expresión $(k + 1)$ en la segunda ecuación, se obtiene:

$$32 - 16\,(k+1) + 136 - 68 + 2k = 0 \Leftrightarrow 32 - 16\,k - 16 + 136 - 68 + 2k = 0$$

$$84 - 14k = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$m = 6 + 1 \Leftrightarrow m = 7$$

Luego, los valores de m y k son 7 y 6, respectivamente.

Puesto que el teorema del factor se centra en una equivalencia lógica, en caso de que $f(c) \neq 0$, se concluye que la división no es exacta, y por tanto, $(x - c)$ no es factor de f.

Scanned by CamScanner

Forma anidada de una función polinomial

Considere la función polinomial $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$, podemos factorizar o descomponer en factores a $f(x)$ y se puede expresar como $f(x) = [(x - 1)\,x + 2]\,x + 4$. Observe que esta forma sólo contiene expresiones lineales. Una función polinomial escrita de esta manera se dice que está en forma anidada.

Si queremos evaluar f en $x = 4$:

- Sin forma anidada, $f(4) = 4^3 - 4^2 + 2(4) + 4 = 64 - 16 + 8 + 4 = 60$. Se tienen que realizar 6 multiplicaciones y 3 sumas algebraicas.
- Con forma anidada, $f(4) = [(4 - 1)\,4 + 2]\,4 + 4 = 60$. Se tienen que realizar 2 multiplicaciones y 3 sumas algebraicas.

La ventaja de evaluar un polinomio que está expresado en forma anidada, es que se evita realizar la potenciación de un número, lo que en una calculadora o computadora puede causar graves errores de redondeo.

Además, las computadoras pueden realizar la suma mucho más rápido que la multiplicación; mientras que, la forma anidada necesita de menos multiplicaciones que la forma ordinaria de un polinomio.

4.11.3 Raíces de una ecuación polinómica

Los ceros reales de una función polinomial f son las soluciones, si las hay, de la ecuación polinómica $f(x) = 0$ y gráficamente representan las intersecciones de f con el eje X.

Ya hemos visto la importancia de localizar los ceros para construir la gráfica de una función polinomial. Sin embargo, en la mayoría de los casos, los ceros de una función polinomial son difíciles de determinar, ya que no hay fórmulas sencillas disponibles como en el caso de la ecuación cuadrática.

Para determinar los ceros de una función polinomial, se dispone de otros teoremas: del número de ceros, regla de los signos de Descartes, de los ceros racionales y el teorema fundamental del álgebra.

Teorema 4.6 (Teorema del número de ceros)

Una función polinomial no puede tener más ceros que el valor de su grado.

La demostración está basada en el teorema 4.5. Si r es un cero de una función polinomial f, entonces $f(r) = 0$ y $(x - r)$ es un factor de $f(x)$, por lo tanto, cada cero corresponde a un factor de grado 1. El resultado es consecuencia de que f no puede tener más factores de primer grado que el valor de su grado.

Scanned by CamScanner

Teorema 4.7 (Regla de los signos de Descartes)

Sea f una función polinomial:

- El número de ceros positivos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(x)$, o es igual a ese número menos un entero par.
- El número de ceros negativos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(-x)$, o es igual a ese número menos un entero par.

Ejemplo 4.53 Regla de los signos de Descartes.

Utilice la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros positivos y negativos puede tener la función polinomial:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solución:

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ tiene una variación de signo, por lo tanto, puede tener una raíz positiva.

$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 - 5(-x) - 6 = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$ tiene dos variaciones de signo, por lo tanto, puede tener dos raíces negativas o ninguna.

Aunque realmente no hemos determinado los ceros de la función en el ejemplo anterior, sabemos algo acerca de su número y cuántos podrían ser positivos o negativos. El siguiente teorema proporciona información acerca de los ceros racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Teorema 4.8 (Teorema de los ceros racionales)

Sea f una función polinomial de grado 1 o superior, de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0$$

donde cada coeficiente es un entero. Si $\frac{p}{q}$ irreducible es un cero racional de f, entonces p debe ser un factor de a_0 y q un factor de a_n.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.54 Teorema de los ceros racionales.

Utilice el teorema de los ceros racionales para determinar las posibles raíces de la función polinomial $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

$a_0 = -6 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$a_n = 1 \Rightarrow q = \pm 1$

$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ (son las posibles raíces).

Probando para los primeros valores con el teorema del residuo:

- $f(1) = 1 + 2 - 5 - 6 = -8 < 0$
- $f(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$

Con el último valor y aplicando la división sintética:

	1	2	−5	−6
[2]		2	8	6
	1	4	3	0

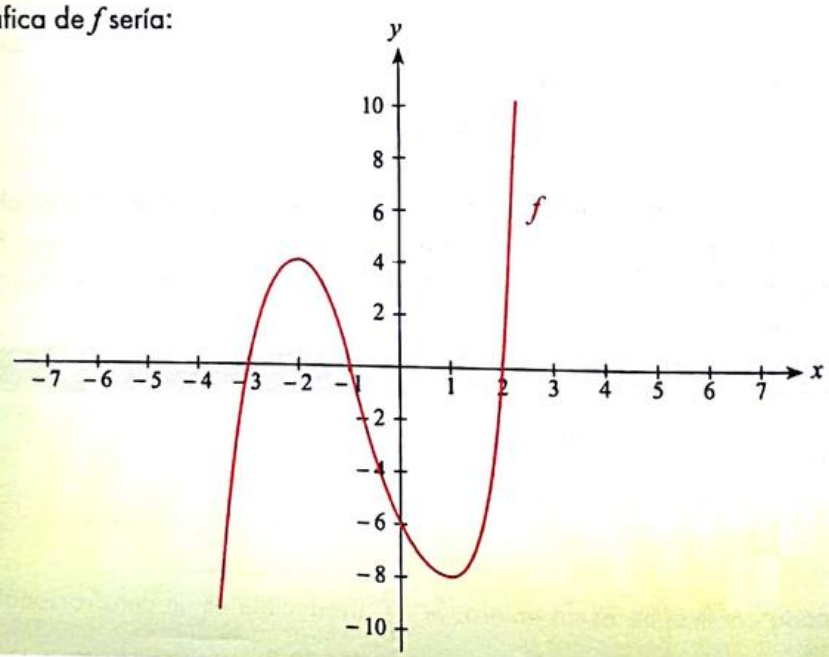
Con lo cual, la función puede ser expresada así:

$$f(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$$

Descomponiendo en factores: $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$.

Las raíces son: $2, -1, -3$.

La gráfica de f sería:



La ventaja de utilizar este teorema es que se reduce la cantidad de posibles raíces a un conjunto de menor cardinalidad, por lo que hay que probar para cada posible cero. Note que puede ocurrir que no hayan ceros racionales.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.55 Ceros de una función polinomial.

Determine las raíces de la función polinomial $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

Con el teorema del número de ceros, como f es de grado 4, tiene cuando más, 4 raíces.

Mediante la regla de los signos de Descartes:

- $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$, las dos variaciones de signo indican que pueden haber dos raíces positivas o ninguna.
- $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^3 - 6(-x)^2 + 4(-x) + 8 = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$, las dos variaciones de signo indican que pueden haber dos raíces negativas o ninguna.

Aplicando el teorema de los ceros racionales restringimos el conjunto de valores posibles:

- $a_0 = 8 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$
- $a_n = 1 \Rightarrow q = \pm 1$
- $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ (son las posibles raíces racionales)

Probando para los primeros valores con el teorema del residuo:

- $f(1) = 1 - 1 - 6 + 4 + 8 = 6 > 0$
- $f(2) = 16 - 8 - 24 + 8 + 8 = 0$

Con el último valor y aplicando la división sintética:

	1	−1	−6	4	8
[2]		2	2	−8	−8
	1	1	−4	−4	0

Con lo cual, la función puede ser expresada así:

$$f(x) = (x - 2)(x^3 + x^2 - 4x - 4)$$

Descomponiendo en factores:

$f(x) = (x - 2)\,[(x^3 + x^2) + (-4x - 4)]$

$f(x) = (x - 2)\,[x^2(x + 1) - 4(x + 1)]$

$f(x) = (x - 2)\,(x^2 - 4)\,(x + 1)$

$f(x) = (x - 2)^2\,(x + 2)\,(x + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Las raíces son: 2, de multiplicidad 2; − 2 y −1, cada una de multiplicidad 1.

Scanned by CamScanner

1) Identifique si las funciones dadas son o no polinomiales.

a) $f_1(x)=\sqrt[3]{(x)^3}+1$ — Sí

b) $f_2(x)=5x^2-7+x^{-1}$ — no

c) $f_3(x)=\sqrt{x^2}+1$ — no

d) $f_4(x)=\dfrac{3x^3+13x+8}{x-1}$ — no

e) $f_5(x)=\dfrac{9x^8+8x^7+7x^6}{100}$ — Sí

2) Considere la función polinomial de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por: $p(x)=32x^2\left(x-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2(2x+7)$.

a) Identifique cada raíz con su respectiva multiplicidad.

* 0 es raíz Multiplicidad 2
* $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, es una raíz de 2

b) Determine el residuo que se obtiene a partir de la división de $p(x)$ para el polinomio $q(x)=2x^3+7x^2$.

$2x+7=6$
$2x=-7$
$x=-\frac{7}{2}$, es multiplicidad 1

c) Determine el residuo que debería obtenerse al dividir $p(x)$ para $r(x)=x-\frac{1}{2}$.

$32x^2\left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2(2x+7) \div x-\frac{1}{2}$ | $x=\frac{1}{2}$

$32x^2\left(\frac{2x-\sqrt{5}+1}{2}\right)(2x+7)$

$32\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)-\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right)+7\right)$

Residuo -80

Scanned by CamScanner

3) Observe la siguiente resolución de un ejercicio:

> Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa:
> Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios del mismo grado, entonces siempre se cumple que:
> $$[(p(1) = q(1)) \rightarrow (p(x) = q(x))]$$
> Solución:
> Sean $p(x) = x^2 + 1$ y $q(x) = (x + 1)(x - 1) + 2$, $p(1) = 2$ y $q(1) = 2$
> Además $q(x) = x^2 - 1 + 2 = x^2 + 1 = p(x)$
> $\therefore$ La proposición es VERDADERA

¿Está de acuerdo con el análisis y la conclusión presentados? Explique.

Es verdadero ya que el mismo binomio solo que esto uno forma mas fac lizado. Por ejemplo

$P(x) = (x^2 - 25)$ $\quad q(x) = (x+5)(x-5)$

$P(x) = (1)^2 - 25$ $\quad q(1) = (1+5)(1-5)$

$= 1 - 25$ $\quad = (6)\cdot(-4)$

$= -24$ $\quad = -24$

4) Construya un polinomio $p(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:

- $p(x)$ es de grado 5
- El coeficiente de x^5 es diferente de 1
- $p(0) = 0$
- $x = 1$ es un cero de multiplicidad 2
- $p(x)$ es divisible por $(x^2 - 4)$
- El residuo que se obtiene al dividir $p(x)$ para $(x + 1)$ es -36

$P(0) = 0$

$P(x) = -3x(x-1)^2 \cdot (x^2-4)$

$P(0) = -3(0)(0-1)^2(0^2-4)$

$P(x) = 0 \cdot (-4)$

$P(x) = 0$ ✓

$x = 1$

$P(1) = -3x(x-1)^2(x^2-4)$

$= -3(1)(1-1)^2(1^2-4)$

$= 0 \cdot (-3)$

$= 0$

Es cero de Multiplicidad 2

Scanned by CamScanner

4.12 Funciones Racionales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Definir una función racional.
- Identificar funciones racionales propias e impropias.
- Identificar las características de los elementos de una función racional.
- Explicar el concepto de asíntota o salto de la gráfica de una función racional.
- Identificar asíntotas o discontinuidades de una función racional.
- Dada la gráfica de una función racional, reconocer la existencia de discontinuidades y de asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Definición 4.23 (Función Racional)

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios. Se dice que la función:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x+b_0}$$

con dominio $\mathbb{R}-\{x/q(x)=0\}$, m y $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$, es una función racional.

Es decir, una función racional es aquella que puede expresarse como la división de dos polinomios o funciones polinomiales.

Clasificación de funciones racionales

Las funciones racionales se clasifican en propias e impropias; serán propias cuando el grado del polinomio que se encuentra en el numerador es menor que el del polinomio del denominador, es decir, de acuerdo a la definición, deberá cumplirse que $n<m$.

Así mismo, las funciones racionales serán impropias cuando el grado del polinomio localizado en el numerador es mayor o igual que el del polinomio del denominador, lo cual significa, de acuerdo a la definición, que $n\geq m$. Siguiendo la representación de una división entre polinomios, la función racional impropia también puede expresarse como:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

4.12.1 Asíntotas de la gráfica de una función racional

En la figura 4.24, note que conforme x se vuelve "más negativa", esto es, cuando se hace no acotada en la dirección negativa ($x\to-\infty$, se lee "x tiende a menos infinito"), los valores de $f(x)$ tienden a cero. Lo mismo ocurre cuando x se vuelve "más positiva", esto es, cuando se hace no acotada en la dirección positiva ($x\to+\infty$, se lee "x tiende a más infinito").

Scanned by CamScanner

Por otra parte, cuando $x \to 0$, es decir, en la vecindad de cero, podemos observar que los valores de $f(x)$ tienden a $\pm\infty$.

Estos comportamientos para las gráficas de una función determinan la existencia de asíntotas, como en el caso de la función recíproca.

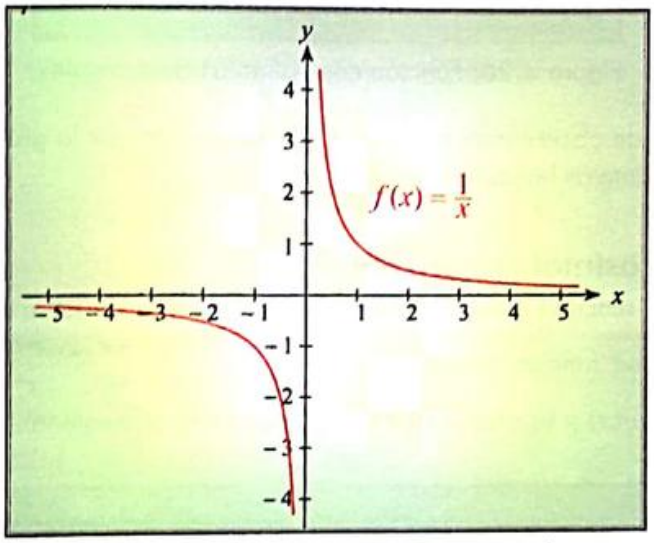


Figura 4.24: Asíntotas de la gráfica de una función.

Definición 4.24 (Asíntota horizontal)

Si cuando $x \to -\infty$, o cuando $x \to +\infty$, los valores de $f(x)$ tienden a algún número fijo L, entonces la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

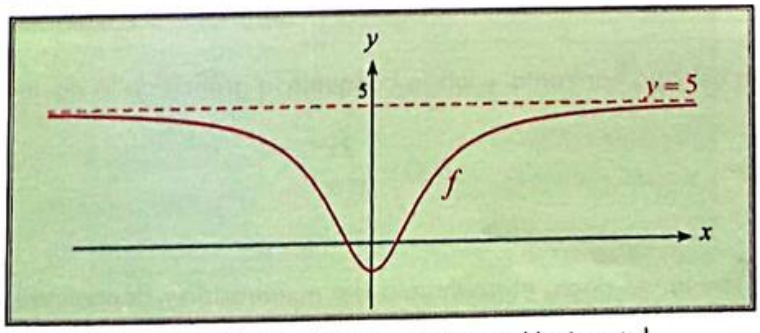


Figura 4.25: Función con Asíntota Horizontal.

En la figura 4.25, se aprecia que la recta $y = 5$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Otro ejemplo de asíntota horizontal se muestra en la figura 4.26, en la cual la función se aproxima a 1 cuando x tiende a $+\infty$. En este mismo sentido, la gráfica de la función se aproxima a -1 cuando x tiende a $-\infty$.

Scanned by CamScanner

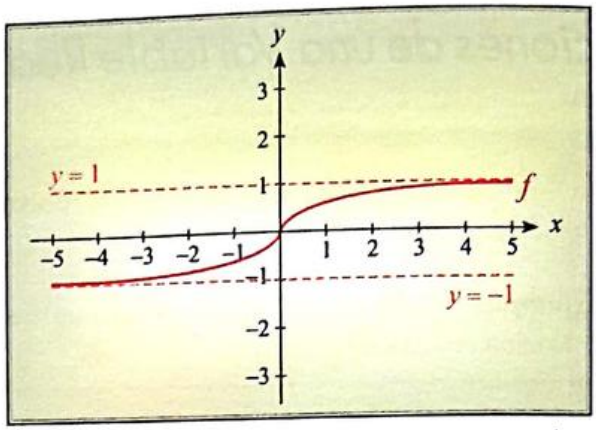


Figura 4.26: Función con Asíntotas Horizontales.

Como el lector puede observar en la figura 4.26, es posible que la gráfica de una función posea hasta dos asíntotas horizontales.

Obtención de asíntotas horizontales

Existen reglas muy sencillas para determinar las ecuaciones de las asíntotas horizontales de la gráfica de una función racional $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x+b_0}$, m y $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$, $q(x)\neq 0$, mismas que se resumen en la siguiente tabla:

CONDICIÓN	ECUACIÓN
$n<m$	$y=0$
$n=m$	$y=\frac{a_n}{b_m}$
$n>m$	No existe

Ejemplo 4.56 Gráfica de una función racional con asíntota horizontal.

Obtenga la asíntota horizontal y luego bosqueje la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2+9}$$

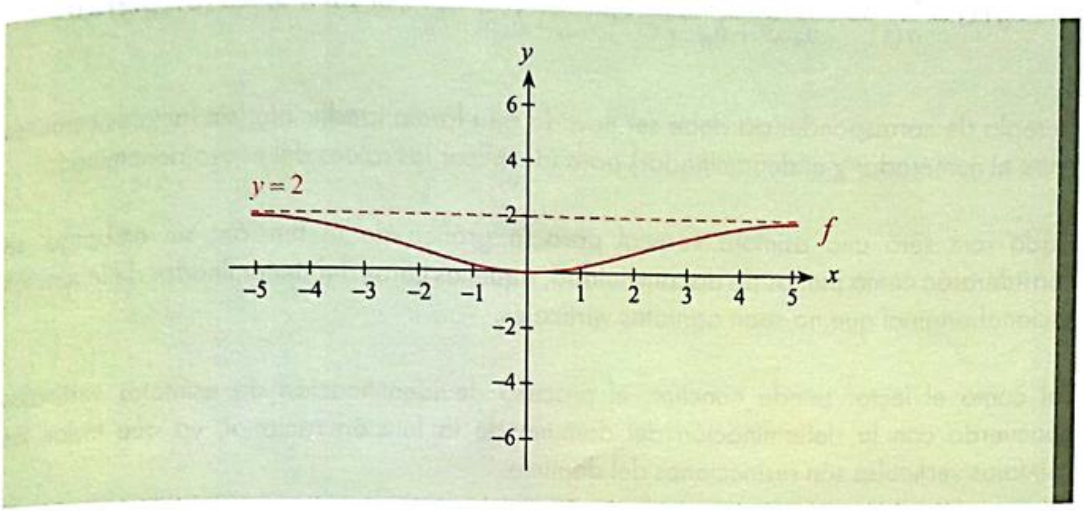
Solución:

Dado que $n=m$, es decir, el polinomio del numerador y denominador tienen el mismo grado, la función racional tendrá una asíntota horizontal.

Como se puede observar $a_n=2$ y $b_m=1$, con lo cual la ecuación de la asíntota horizontal es $y=\frac{2}{1}=2$.

Por tratarse de una función par, considerando además el análisis previo y obteniendo algunos puntos, la gráfica de la función quedaría como:

Scanned by CamScanner



Definición 4.25 (Asíntota vertical)

Si cuando x se aproxima a algún número c, los valores $|f(x)| \to +\infty$, entonces la recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de f.

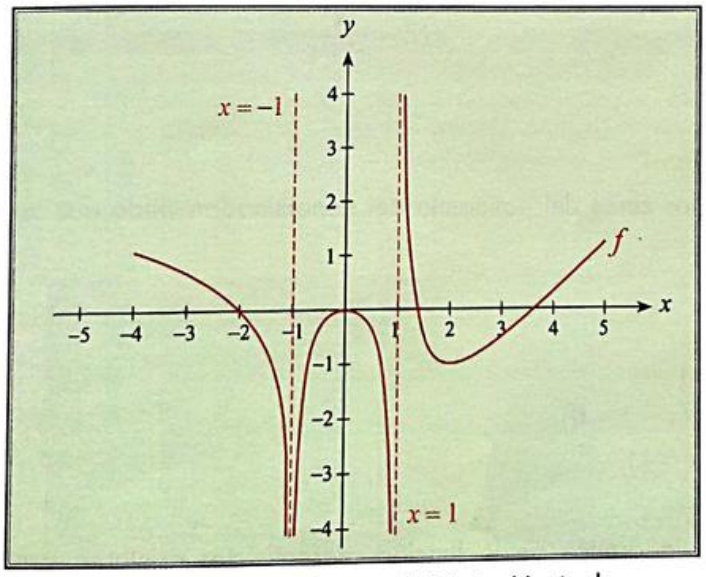


Figura 4.27: Función con Asíntotas Verticales.

En la figura 4.27 se aprecia que las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la gráfica de f.

Se observa que cuando los valores de x se acercan a 1 por derecha, la función tiende a $+\infty$; mientras que cuando los valores de x se acercan a 1 por izquierda, la función tiende a $-\infty$. Así mismo, cuando los valores de x se aproximan a -1 por derecha o por izquierda, la función tiende a $-\infty$.

Scanned by CamScanner

Obtención de asíntotas verticales

Para obtener las asíntotas verticales de una función racional:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x+b_0},\ m \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\},\ q(x)\neq 0$$

su regla de correspondencia debe ser llevada a la forma irreducible (sin factores comunes entre el numerador y el denominador) para identificar las raíces del nuevo denominador.

Cada raíz será una asíntota vertical para la gráfica de la función; sin embargo, se considerarán como puntos de discontinuidad, aquellos ceros del denominador de la función racional original que no sean asíntotas verticales.

Tal como el lector puede concluir, el proceso de identificación de asíntotas verticales concuerda con la determinación del dominio de la función racional, ya que todas las asíntotas verticales son restricciones del dominio.

Ejemplo 4.57 Gráfica de una función racional con asíntota vertical.

Obtenga las asíntotas verticales y luego bosqueje la gráfica de la siguiente función $f: X \mapsto \mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{x^4}{x^2-1}$$

Solución:

Se obtienen los ceros del polinomio del denominador, dado que la fracción es irreducible:

$x^2-1=0$
$(x+1)(x-1)=0$
$(x+1=0)\vee(x-1=0)$
$(x=-1)\vee(x=1)$

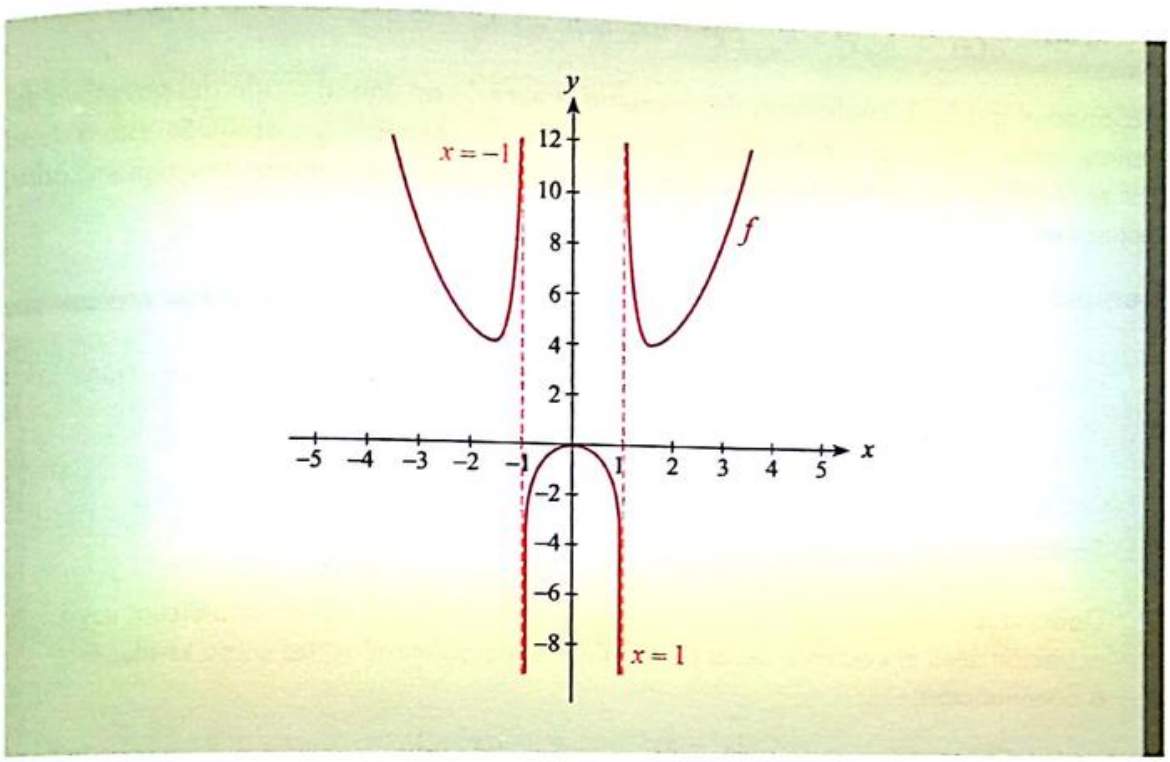
Por lo tanto, la gráfica de la función presenta dos asíntotas verticales cuyas ecuaciones son:

$$x=-1 \text{ y } x=1$$

Lo cual corrobora que $dom\ f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

La gráfica de la función dada quedaría como sigue:

Scanned by CamScanner



Definición 4.26 (Asíntota oblicua)

Si cuando $x \to +\infty$, o cuando $x \to -\infty$, los valores de $f(x)$ se aproximan a una recta que no sea paralela a los ejes coordenados, entonces esta recta es una asíntota oblicua de la gráfica de f.

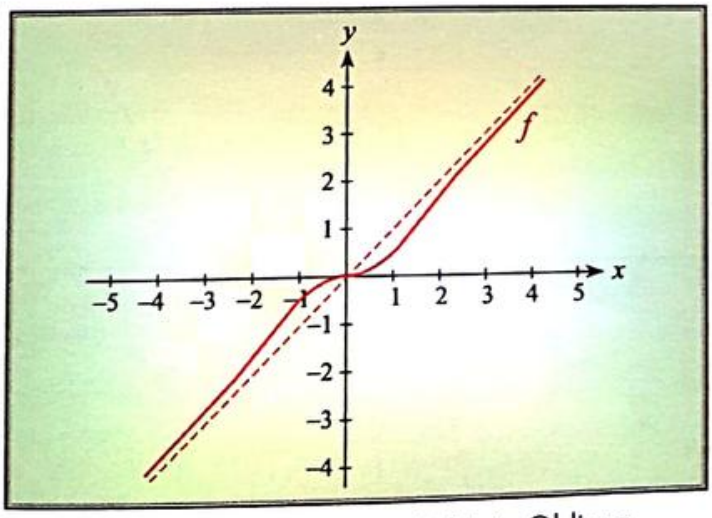


Figura 4.28: Función con Asíntota Oblicua.

Se puede observar en la gráfica que cuando x tiende a $+\infty$ o cuando x tiende a $-\infty$, la gráfica de la función se aproxima a la recta.

Scanned by CamScanner

Obtención de asíntotas oblicuas

A partir de la función racional:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x+b_0},\ m \text{ y } n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\},\ q(x)\neq 0$$

y cuando el grado del polinomio del numerador exceda en uno al grado del polinomio del denominador, la función racional tendrá una asíntota oblicua cuya ecuación estará dada por el cociente resultante de la división de los polinomios del numerador y denominador, respectivamente.

Ejemplo 4.58 Gráfica de una función racional con asíntota oblicua.

Obtenga la asíntota oblicua y luego construya la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\frac{2x^3-5x^2+3}{x^2+1}$$

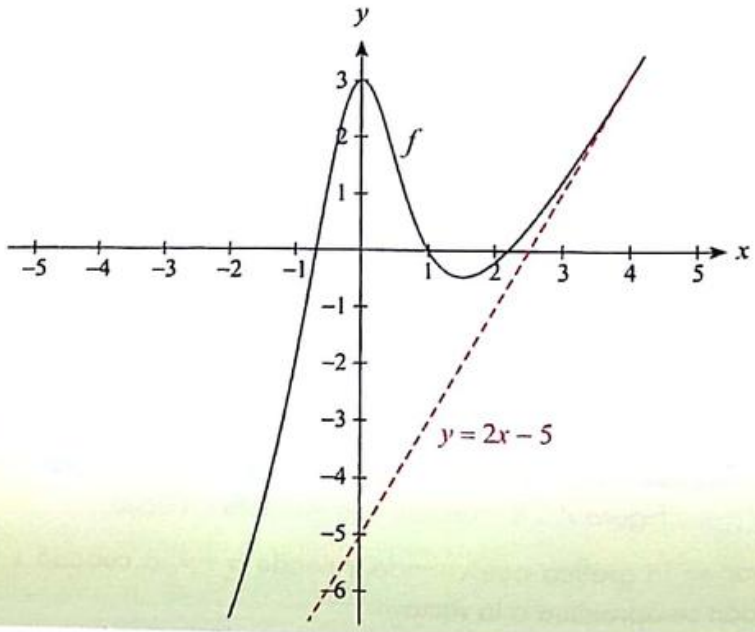
Solución:

Dado que $n = m + 1$, la función racional tendrá una asíntota oblicua cuya ecuación será el cociente de la división entre los polinomios, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r} 2x^3-5x^2\quad\quad+3 \\ -2x^3\quad\quad-2x \\ \hline -5x^2-2x+3 \\ 5x^2\quad\quad+5 \\ \hline -2x+8 \end{array}\quad\Big|\begin{array}{l} x^2+1 \\ \hline 2x-5 \end{array}$$

Por lo tanto, la ecuación de la asíntota oblicua está dada por: $y=2x-5$

A partir del análisis previo, la gráfica de la función quedaría como:



Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.59 Gráfica de una función racional con salto.

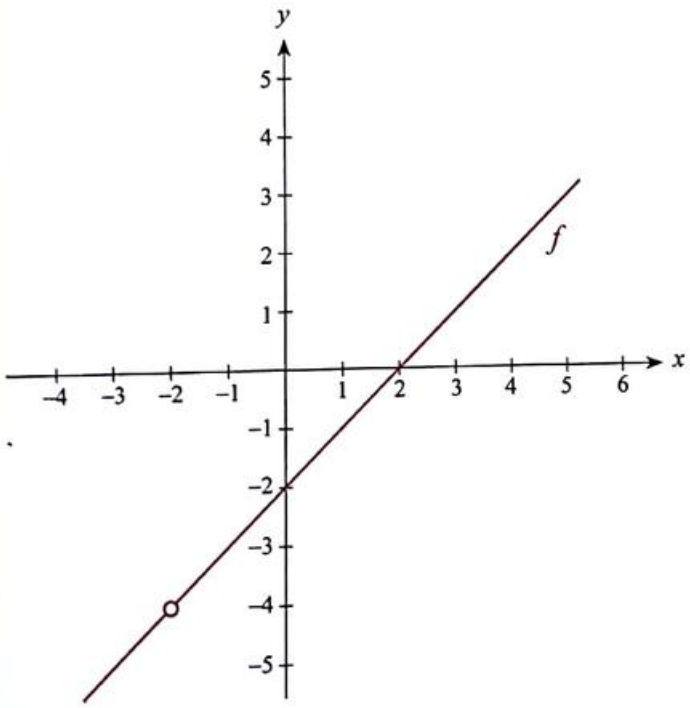
Obtenga la gráfica de la función $f: X \mapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$.

Solución:

Al simplificar la expresión de la función dada, se obtiene:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} = x-2,\ x \neq -2$$

Con lo cual la gráfica que se obtiene no presentará asíntota vertical alguna; en su lugar, se generará un salto en $x = -2$, tal como se muestra en la respectiva gráfica.



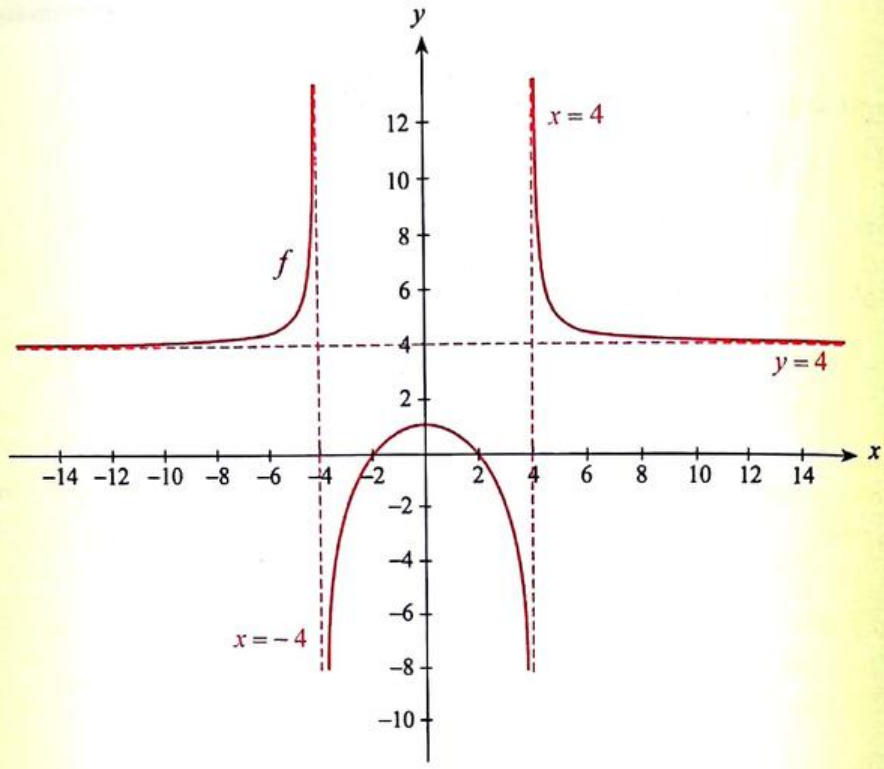
A partir de la gráfica de la función se puede apreciar que conforme x se acerca al valor de -2, la función se acerca al valor de -4, a pesar de no estar definida en este punto.

Análogamente a lo indicado en secciones anteriores, también es posible concluir que la función dada es discontinua en $x = -2$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.60 Regla de correspondencia de una función racional.

Usando la gráfica adjunta, determine de manera aproximada una regla de correspondencia que se ajuste a una función racional.



Solución:

Se puede observar en la gráfica las siguientes características de la función:

Asíntota Horizontal en $y = 4$

Asíntotas Verticales en $x = -4$ y $x = 4$

Además: $f(2) = f(-2) = 0$ y $f(0) = 1$

Ya que la función tiene dos asíntotas verticales y una horizontal podemos concluir que se trata de un cociente de dos funciones cuadráticas, es decir:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}, \forall\, b, c, e, f \in \mathbb{R} \wedge \forall\, a, d \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Dado que existe asíntota horizontal, se establece que:

$$\frac{a}{d} = 4 \qquad (I)$$

Scanned by CamScanner

Para las asíntotas verticales podemos reescribir el denominador de la siguiente forma:

$$dx^2 + ex + f = (x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$$
$$\therefore d = 1,\ e = 0,\ f = -16$$

De (I) se obtiene:

$$\frac{a}{d} = 4 \Rightarrow a = 4(d) = 4$$
$$\therefore a = 4$$

Adicional a esto, se conoce que $f(2) = 0$ y $f(0) = 1$, luego:

$$c = -16 \text{ y } b = 0$$

Finalmente la regla de correspondencia de función será:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 16}{x^2 - 16},\ x \in \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

Esta función presenta las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$
- $rg\, f = (-\infty, 1] \cup (4, +\infty)$
- f es par.
- f es creciente $\forall x \in (-\infty, -4) \cup (-4, 0)$.
- f es decreciente $\forall x \in (0, 4) \cup (4, +\infty)$.
- f no es inyectiva.
- f no es periódica.
- f no es acotada.
- f es continua $\forall x \in (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$.

Scanned by CamScanner

1) Clasifique las siguientes funciones racionales como propias o impropias; en caso de ser impropias, indique el grado k del polinomio cociente.

a) $f_1(x)=\dfrac{9x^2+5x-1}{x^2+1}$ — Impropio $k=0$

b) $f_2(x)=\dfrac{12}{x+3}$ — Propio

c) $f_3(x)=\dfrac{2x^3+4x^2}{x+2}$ — Impropio $k=2$

d) $f_4(x)=\dfrac{1+x+x^2+x^3}{1-x+x^2}$ — Impropio $k=1$

e) $f_5(x)=\dfrac{10x^5+4x^2-x^6+8}{x^2+1}$ — Impropio $k=4$

2) Para las siguientes funciones, determine si existen asíntotas horizontales u oblicuas. En caso de existir, determine el valor de su pendiente.

a) $f_1(x)=\dfrac{8x^2}{1-x}$ — Tendrá una asintota oblicua disponible -8

b) $f_2(x)=\dfrac{30x+15x^2+5x^3+x^4}{5x-3x^2-x^4+8x}$ — Tendrá una asintota horizontal disponible 0

c) $f_3(x)=\dfrac{(7x+1)(2x+1)-14x^2}{5x}$ — Tendrá una asintota horizontal disponible 0

d) $f_4(x)=\dfrac{x^4+x^2-x}{1+2x-5x^3}$ — Tendrá una asintota oblicua $m=\frac{1}{5}$

3) Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa, mostrando un procedimiento que valide su respuesta.

"Si $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional, entonces todos los valores de c para los cuales $q(c)=0$, están relacionados con asíntotas verticales de la forma $x=c$".

$P \to (Q \to R)$ Es falso x que $q(x)=q(c)$

$1 \to (1 \to 0$

$1 \to 0 \equiv 0$

$f(x)=\dfrac{P(x)}{q(x}=\emptyset$

Scanned by CamScanner

4) Sea la función $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \frac{kx-1}{x^2+a}$:

a) Si el punto $P(1, 2) \in f$, calcule el valor numérico de $2a - k$.

b) Si la función tiene asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = -2$, determine la regla de correspondencia de f.

$x \neq 2 \quad \vee \quad x \neq -2$

$(x-2)\,(x+2) = 4 = 4$

$F(x) = \frac{kx-1}{x^2-4}$ $\mathbb{R}$ //

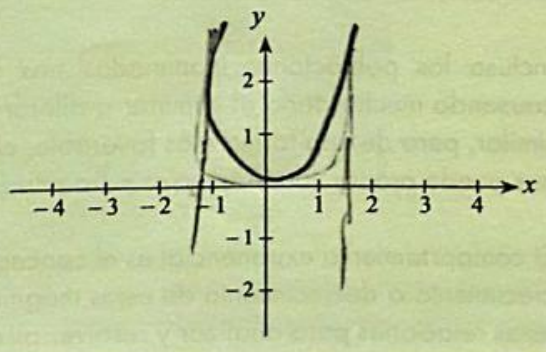
5) Determine las asíntotas horizontales y verticales de la función $f: X \mapsto \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \frac{x-2}{4x^2-9}$. Establezca un conjunto de partida X que sea adecuado para la regla de correspondencia dada y bosqueje la gráfica de la función f.

$4x^2 - 9 \neq 0 \qquad x \neq -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x \neq \frac{3}{2}$

$4x^2 > 9$ Asintota vertical $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

$x^2 > \frac{9}{4}$ Asintota horizontal $\{y = 0$

$x > \pm\frac{3}{2}$ $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right.$



Scanned by CamScanner

4.13 Funciones Exponenciales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Identificar los elementos que definen una función exponencial.
- Dada una función exponencial, discutir sus características y el efecto de su base sobre éstas.
- Dada la gráfica de la función exponencial creciente o decreciente estándar, construir otras gráficas aplicando técnicas de graficación.
- Dadas las condiciones de un problema de la vida cotidiana, resolverlo con la ayuda de una función exponencial.

El estudio realizado hasta ahora ha contemplado solamente funciones relativamente simples, como las polinomiales y racionales, es decir, las denominadas **funciones algebraicas** que pueden expresarse en términos de sumas, restas, productos, cocientes, potencias o raíces de polinomios. Las funciones que no son algebraicas se denominan **trascendentes** (trascienden, esto es, están más allá de las funciones algebraicas).

En esta sección, analizaremos la primera función trascendente, la cual se denomina función exponencial, que es muy importante en matemáticas porque permite describir crecimientos o decrecimientos en distintas situaciones de la vida diaria.

Muchos de los problemas con los que nos encontramos se relacionan con las poblaciones y sus cambios a través del tiempo. A todos nos conciernen los problemas asociados con el crecimiento de la población mundial. Una de las consecuencias de este crecimiento debido a la búsqueda de nuevos territorios para habitar, ha conllevado el contacto con patógenos y su propagación alarmante en el globo, provocando brotes mortales.

Decrecimientos críticos como el evidenciado por el agotamiento de los recursos naturales, causan serios problemas en el equilibro ecosistémico. Hoy en día, se conoce que las comunidades de arrecifes de coral han decaído drásticamente en los últimos años como consecuencia del calentamiento global. Muchas especies que se beneficiaban de los corales como fuente de refugio y alimentación ya no cuentan más con ellos, ocasionándose una alteración en la cadena trófica.

Incluso las poblaciones inanimadas nos afectan, los virus informáticos se propagan, causando mucho daño al eliminar o alterar información de las computadoras. De manera similar, pero de una forma más favorable, el incremento de dinero en una cuenta bancaria nos puede proporcionar recursos para enriquecer nuestras vidas.

El comportamiento exponencial es el concepto matemático fundamental que hay detrás del crecimiento o decrecimiento de estas magnitudes, y es importante saber cómo se modelan estas relaciones para analizar y resolver problemáticas del mundo que nos rodea.

Scanned by CamScanner

Definición 4.27 (Función Exponencial)

Se denomina función exponencial a la función f de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+ \wedge (a \neq 1)$$

En esta definición, considere que a representa la base y x el exponente.

Con el propósito de tener una idea de cómo luce la gráfica de una función exponencial, vamos a analizar los diferentes valores que puede tomar la base a, es decir, cuando $a > 1$ o cuando $0 < a < 1$.

$a > 1$

Si consideramos un valor en este intervalo, por ejemplo $a = 2$, tendremos la siguiente tabla de valores:

x	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\to +\infty$

La representación gráfica de esta función exponencial se presenta en la siguiente figura.

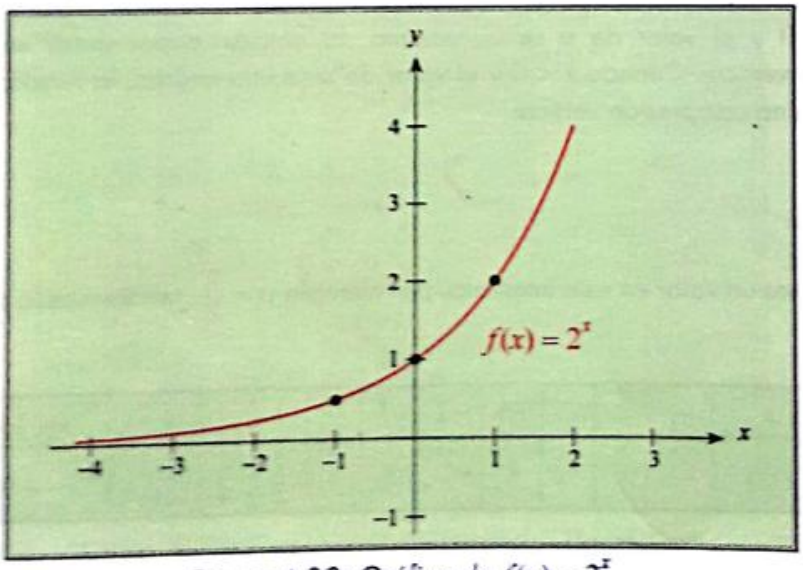


Figura 4.29: Gráfica de $f(x) = 2^x$.

Resulta interesante, calcular valores como 2^{π}, para lo cual se requiere conceptos más rigurosos, tales como el supremo de una sucesión infinita, mismos que escapan del alcance de esta obra.

Scanned by CamScanner

Si consideramos otro valor para a en este mismo intervalo, por ejemplo $a = 3$, notaremos un comportamiento similar. Lo mismo ocurre para $a = 5$ o $a = 10$.

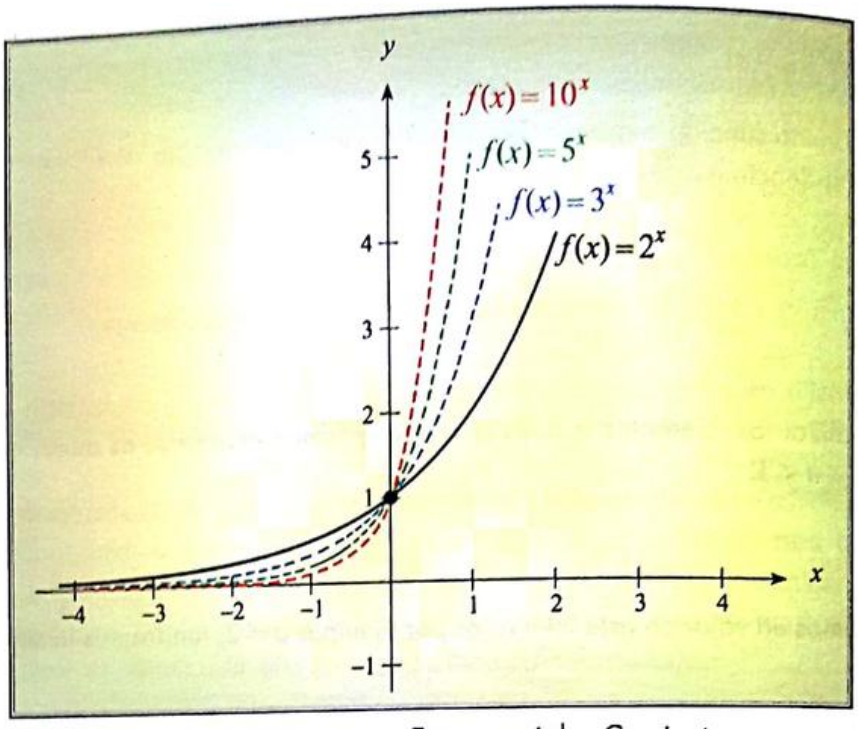


Figura 4.30: Funciones Exponenciales Crecientes.

Si observamos con mucha atención las gráficas de la figura 4.30, notaremos que están definidas para todos los reales, su rango es $\mathbb{R}^+$, son inyectivas, estrictamente crecientes, intersecan al eje Y en el punto $(0, 1)$ y están acotadas inferiormente por $y = 0$.

Cuando $x > 0$ y el valor de a se incrementa, la función exponencial experimenta un alargamiento vertical. Cuando $x < 0$ y el valor de a se incrementa, la función exponencial experimenta una compresión vertical.

$0 < a < 1$

Si consideramos un valor en este intervalo, por ejemplo $a = \frac{1}{2}$, tendremos la siguiente tabla de valores:

x	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to +\infty$	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\to 0$

La representación gráfica de esta función exponencial se presenta en la figura 4.31.

Scanned by CamScanner

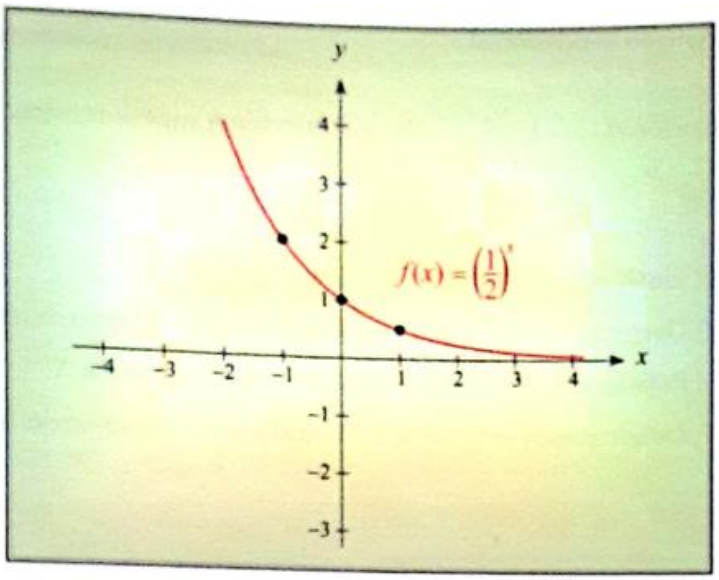


Figura 4.31: Gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Si consideramos otro valor para a en este mismo intervalo, por ejemplo $a = \frac{1}{3}$, notaremos un comportamiento similar. Lo mismo ocurre para $a = \frac{1}{5}$ o $a = \frac{1}{10}$.

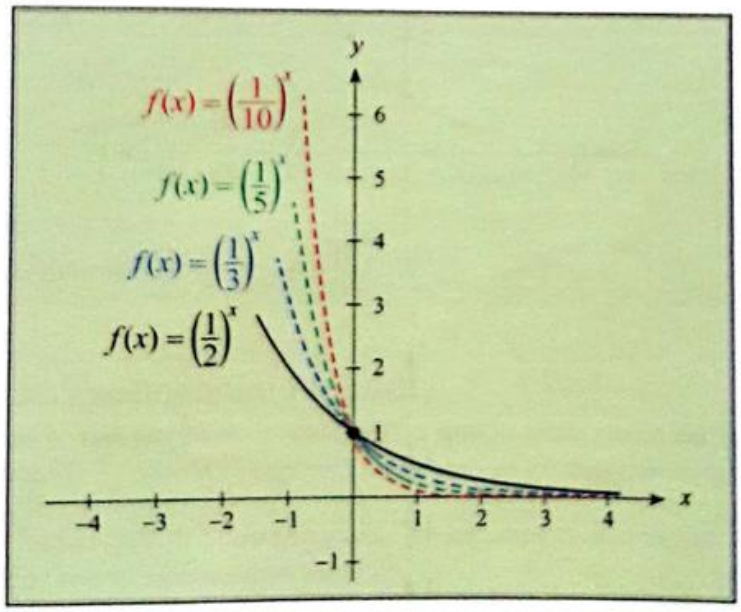


Figura 4.32: Funciones Exponenciales Decrecientes.

Si observamos con mucha atención las gráficas de la figura 4.32, notaremos que están definidas para todos los reales, su rango es $\mathbb{R}^+$, son inyectivas, estrictamente decrecientes, intersecan al eje Y en el punto $(0, 1)$ y están acotadas inferiormente por $y = 0$.

Scanned by CamScanner

Cuando $x > 0$ y el valor de a disminuye, la función exponencial experimenta una compresión vertical. Cuando $x < 0$ y el valor de a disminuye, la función exponencial experimenta un alargamiento vertical.

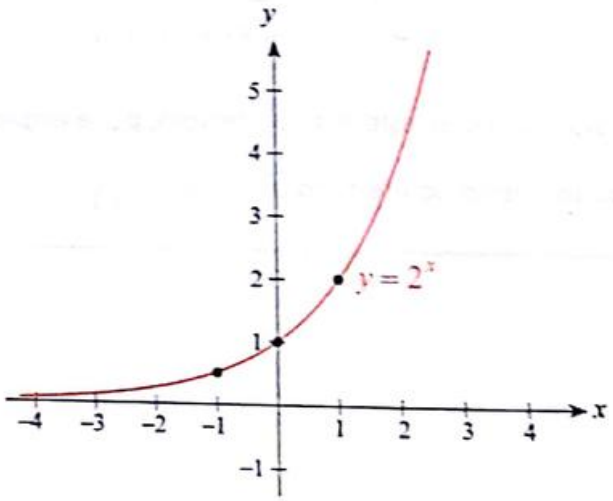
Ejemplo 4.61 Función exponencial.

Grafique la función $f(x) = 1 - 2^{x+1}, \forall x \in \mathbf{R}$ e indique sus características.

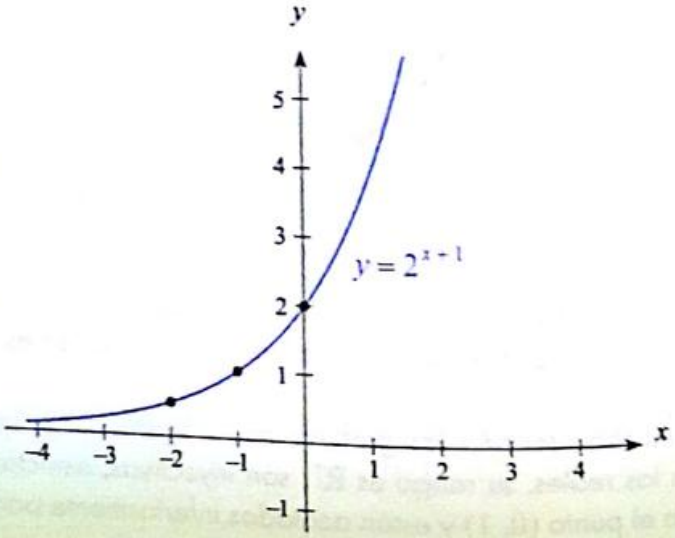
Solución:

- Paso 1: Identificamos la función original: $f(x) = 2^x$.
- Paso 2: Desplazamos la función original una unidad hacia la izquierda.
- Paso 3: Reflejamos esta última función con respecto al eje X.
- Paso 4: Desplazamos esta función reflejada una unidad hacia arriba.

Paso 1:

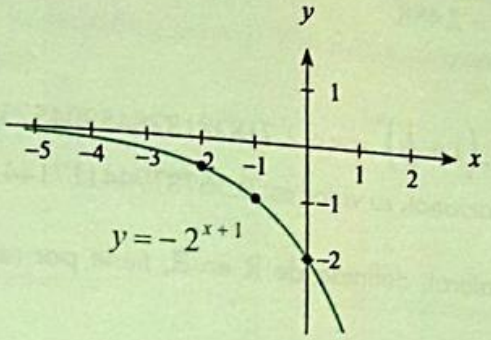


Paso 2:

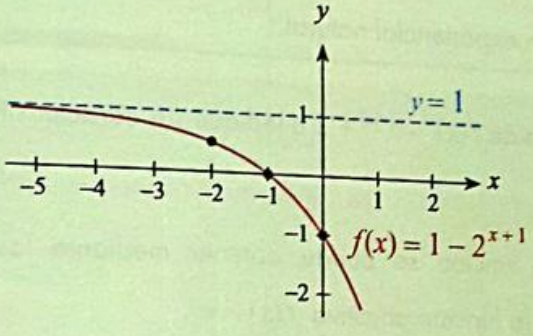


Scanned by CamScanner

Paso 3:



Paso 4:



$f(x) = 1 - 2^{x+1}$ tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbf{R}$
- $rg\, f = (-\infty, 1)$
- Inyectiva, estrictamente decreciente, continua.
- Asíntota horizontal en $y = 1$ y acotada superiormente por la misma recta.
- Intersección con el eje X: $(-1, 0)$.
- Intersección con el eje Y: $(0, -1)$.

4.13.1 Función Exponencial Natural

En la definición de la función exponencial se dijo que la base podía ser cualquier número real positivo distinto de 1, pero hay algunas bases que se utilizan con mayor frecuencia.

Por ejemplo, las bases 2 y 10 son utilizadas en algunas aplicaciones y quizás la más importante de todas sea el número irracional e.

El número e se define como el valor al que tiende la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando n tiende a $+\infty$:

$$n = 1 \Rightarrow (1 + 1)^1 = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

Scanned by CamScanner

$$n = 3 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.3$$

$$n = 4 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.441$$

$$n = 5 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2.488$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Cuando n tiende a infinito, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828182845904523\ldots$, siendo $e \approx 2.72$

El número $\frac{1}{e}$ también es irracional, su valor es: $0.36787944117144232\ldots$, siendo $\frac{1}{e} \approx 0.3679$

La función exponencial natural, definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tiene por regla de correspondencia: $f(x) = e^x$.

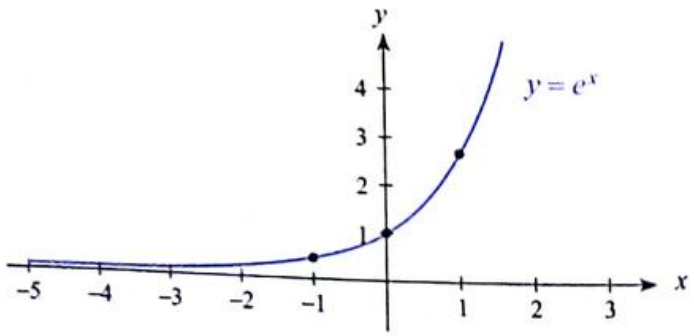
Ejemplo 4.62 Función exponencial natural.

Bosqueje la gráfica de $f(x) = e^{-|x|} + 2$ e indique sus características.

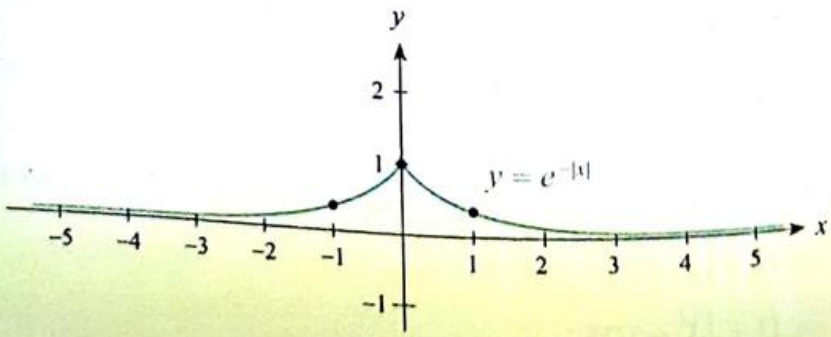
Solución:

La gráfica de la función se puede obtener mediante los siguientes pasos:

Paso 1: Se grafica la función primitiva $f(x) = e^x$.

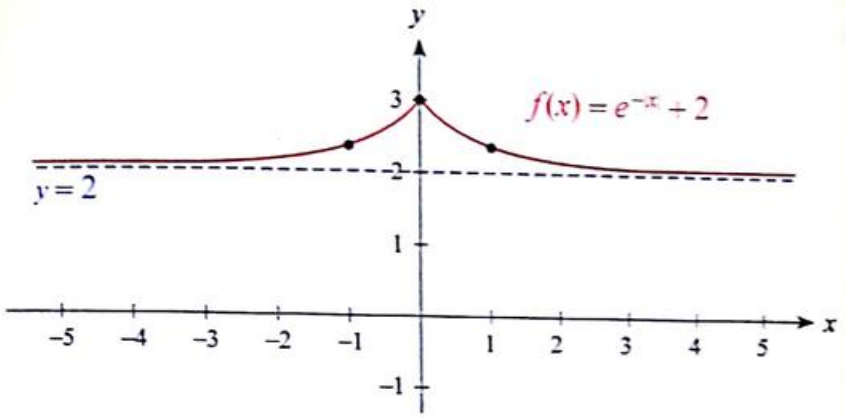


Paso 2: Se grafica la función $f(x) = e^{-|x|}$ (reflexión cuando $x < 0$ de la función $f(x) = e^x$ respecto al eje Y).



Scanned by CamScanner

Paso 3: Se grafica la función $f(x) = e^{-|x|} + 2$ (desplazamiento de 2 unidades hacia arriba).



$f(x) = e^{-|x|} + 2$ tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R}$
- $rg\, f = (2, 3]$
- f es par.
- Creciente en $\mathbb{R}^-$.
- Decreciente en $\mathbb{R}^+$.
- Asíntota horizontal en $y = 2$, y acotada inferiormente por la misma recta.
- Acotada superiormente por la recta $y = 3$.

Ejemplo 4.63 Aplicación de la función exponencial.

Un elemento radioactivo decae de modo que después de t días, su masa en miligramos está dada por: $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$; donde N_0 es la masa inicial en miligramos y λ es la constante de decaimiento que depende del elemento particular que se trate.

Si $N_0 = 100$ miligramos y $\lambda = 0.5$, determine:

a) La cantidad de miligramos que están presentes inicialmente.
b) La cantidad de miligramos que están presentes después de 2 días.
c) La gráfica de la función N.

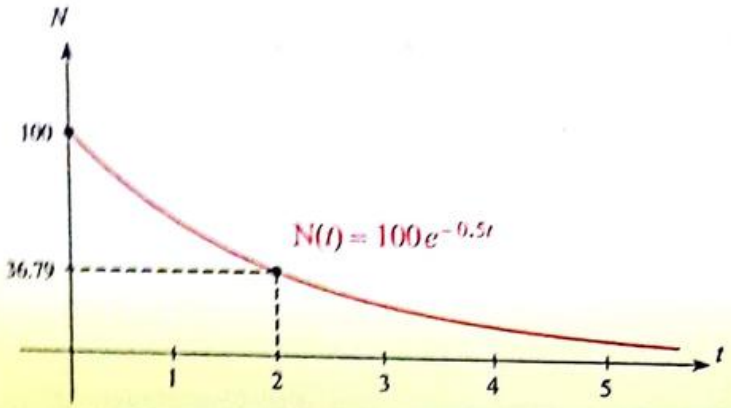
Scanned by CamScanner

Solución:

a) La cantidad inicial del elemento se da cuando $t = 0$, por lo tanto, debemos evaluar $N(0)$, cuyo resultado es 100 miligramos.

b) Después de 2 días, debemos evaluar:
$N(2) = 100e^{-(0.5)(2)} = 100e^{-1} \approx 100(0.3679) \approx 36.79$ miligramos.

c) Puesto que la variable t representa la variación del tiempo, debemos considerar que su dominio es $t \geq 0$. La gráfica de la función $N(t)$ sería:



Ejemplo 4.64 Aplicación de funciones exponenciales.

En una comunidad, la propagación de cierto virus de influenza fue tal que, t semanas después de su brote, $n(t)$ personas se habían contagiado, según la siguiente expresión:

$$n(t) = \frac{45\,000}{1 + 224\,e^{-t}}$$

a) ¿Cuántas personas tenían la influenza al momento del brote?
b) ¿Cuántas personas contrajeron la enfermedad después de 1 semana?

Solución:

a) Debemos evaluar $n(t)$ en $t = 0$, así:

$$n(0) = \frac{45\,000}{1 + 224\,e^{0}}$$

Scanned by CamScanner

$$n(0) = \frac{45\,000}{1 + 224}$$

$$n(0) = \frac{45\,000}{225} = 200$$

Con lo que se concluye que 200 personas habían contraído la enfermedad en el momento del brote.

b) Debemos ahora evaluar $n(t)$ en $t = 1$, así:

$$n(1) = \frac{45\,000}{1 + 224\,e^{-1}}$$

$$n(1) \approx \frac{45\,000}{1 + 224\,(0.36)}$$

Con la ayuda de una calculadora, se obtiene:

$$n(1) \approx 551.20$$

Con lo que aproximadamente 551 personas habían contraído la enfermedad después de 1 semana.

A la inversa de la función exponencial se la conoce como función logarítmica, la cual será estudiada en la siguiente sección.

Scanned by CamScanner

1) Dada la siguiente gráfica de $f(x) = [\![2^x]\!]$.

$[\![x]\!] \Rightarrow 3 \leq x < 4$

a) Determine el MENOR entero que es MAYOR o igual que $2^{\sqrt{2}}$

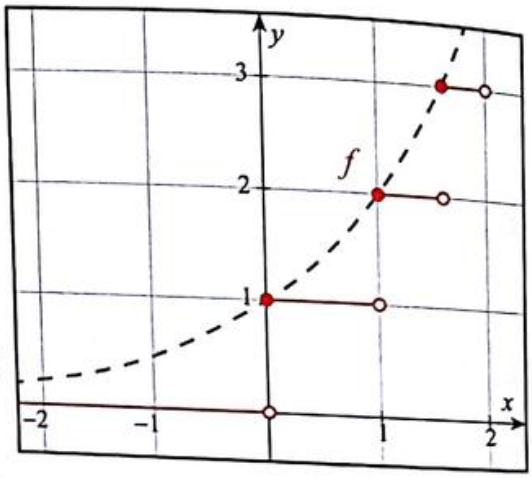
3) $2^{\sqrt{2}} = 2.66 > 4$

b) Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $-x + 2 = [\![2^x]\!]$, determine $Ap(x)$

$Ap(x)$ $\emptyset$

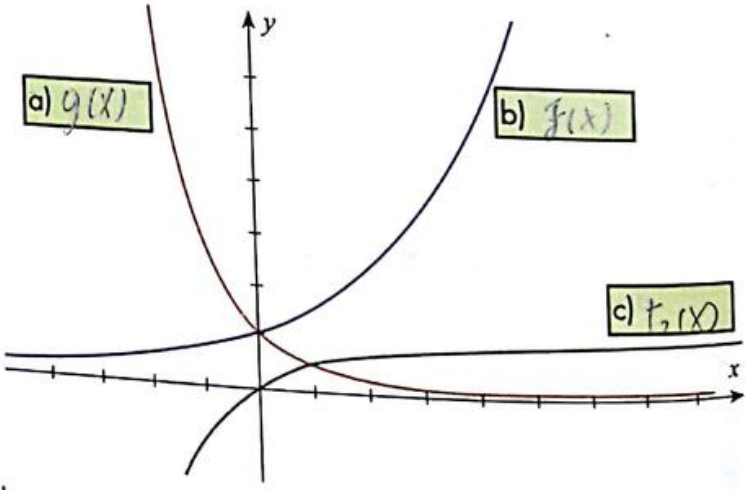
c) Determine el valor de: $\mu([\![2^{-100}]\!] + 2^{-100})$

1



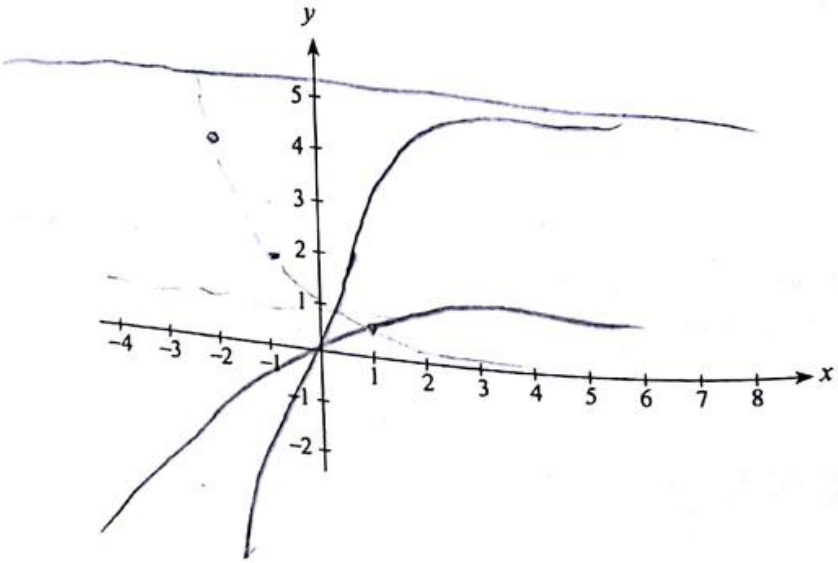
2) Relacione las funciones del siguiente recuadro con las gráficas que se muestran a continuación.

- $f(x) = (1.5)^x$
- $g(x) = e^{-x}$
- $h(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$



3) Dada la regla de correspondencia de la función exponencial $f(x) = 5(1 - 2^{-x}), \forall x \in \mathbb{R}$

a) Grafique la función en el siguiente plano cartesiano.



Scanned by CamScanner

b) Se define una variación de la función f en el intervalo $[x, x+1]$ dada por:

$$V(x)=\frac{1}{5}[f(x+1)-f(x)]$$

Demuestre que $V(x)$ puede expresarse como $V(x)=\frac{1}{2^{x+1}}$.

$f(x+1) = 5[1-2^{-x-1}] = 5[1-2^{-x}\cdot\frac{1}{2}] = 5(1-\frac{1}{2}2^{-x})$

$V(x) = \frac{1}{5}[5(1-\frac{1}{2}2^{-x}) - 5(1-2^{-x})]$

$V(x) = [1-\frac{1}{2}2^{-x} - 1 + 2^{-x}] = \frac{1}{2}2^{-x} = \frac{1}{2^{x+1}}$

$V(x) = \frac{1}{2^{x+1}}$

c) Obtenga la variación V para los siguientes intervalos:

I) $[0, 1]$

$V = \frac{1}{5}[f(1) - f(0)] = \frac{1}{5}[\frac{5}{2} - 0) = \frac{1}{2}$

III) $[2, 3]$

$V = \frac{1}{5}[f(3) - f(2)] = \frac{1}{5}[\frac{35}{5} - \frac{15}{4}] = \frac{1}{8}$

II) $[1, 2]$

$V = \frac{1}{5}[f(2) - f(1)] = \frac{1}{5}[\frac{15}{4} - \frac{5}{2}] = \frac{5}{4}$

IV) $[3, 4]$

$V = \frac{1}{5}[f(4) - f(3)] = \frac{1}{5}[\frac{75}{16} - \frac{35}{8}]$

d) Analice los resultados obtenidos en el literal anterior. Si $1\,000 \cdot V$ representa el ingreso en dólares para cada variación, pero cada intervalo $[x, x+1]$ representa un gasto de 100 dólares, ¿cuáles de los intervalos tabulados le convendría escoger para obtener utilidades?

$[1, 2]$

Scanned by CamScanner

4.14 Funciones Logarítmicas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Identificar los elementos que definen una función logarítmica.
- Dada una función logarítmica, discutir sus características y el efecto de su base sobre éstas.
- Dada la gráfica de la función logarítmica creciente o decreciente estándar, construir otras gráficas aplicando técnicas de graficación.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones exponenciales analítica o gráficamente.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones logarítmicas analítica o gráficamente.
- Dada una función biyectiva, que involucre a las funciones exponencial o logarítmica, determinar la regla de correspondencia de su inversa.

Otra función trascendente, es la denominada función logarítmica. Hoy en día, las computadoras y las calculadoras han tomado el rol de los cálculos logarítmicos, pero todavía esta teoría de los logaritmos es muy relevante cuando se trata de las matemáticas puras y sus aplicaciones en los estudios de las ciencias naturales.

Napier fue un hacendado escocés, para quien las matemáticas eran un pasatiempo. Se lo conoce principalmente como el inventor de los logaritmos. Publicó su trabajo en 1614 bajo el título *"A Description of Marvelous Rule of Logarithms"* (Una descripción de la regla maravillosa de los logaritmos). La palabra **logaritmos** proviene de la palabra griega compuesta por **logos** que significa relación y **arithmos** que significa número.

Fue el inglés Henry Briggs, un amigo de Napier, quien comenzó a usar los logaritmos en base 10. Briggs escribió acerca de su nuevo descubrimiento: *"... Los logaritmos son números que se descubrieron para facilitar la solución de los problemas aritméticos y geométricos, a través de esto se evitan todas las complejas multiplicaciones y divisiones, transformándolo a algo completamente simple, mediante la substitución de la multiplicación por la adición y la división por la sustracción. Además, el cálculo de las raíces se realiza también con gran facilidad ..."*.

Los logaritmos pasaron a ser un recurso muy valorado, en especial entre los astrónomos. Laplace se refiere a esto con la frase: *"... Los logaritmos han duplicado la vida de los astrónomos ..."*.

Definición 4.28 (Función Logarítmica)

Se conoce como función logarítmica a la función f de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \log_a(x),\ x > 0 \wedge a \in \mathbb{R}^+ \wedge (a \neq 1)$$

En esta definición a representa la **base** y x el **argumento.**

Scanned by CamScanner

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial, por lo que:

$$f(x) = a^x \quad \equiv \quad f^{-1}(x) = log_a(x)$$
$$g(x) = log_a(x) \quad \equiv \quad g^{-1}(x) = a^x$$

Con lo cual se puede concluir que:

$$log_a(x) = y \equiv a^y = x$$

Con el propósito de tener una idea de cómo luce la gráfica de una función logarítmica, vamos a analizar los valores que pueden asignarse a la base a, es decir, cuando $a > 1$ o cuando $0 < a < 1$, análisis similar al que realizamos para la función exponencial.

$a > 1$

Con $a = 2$, se obtuvo la siguiente tabla de valores para la función exponencial $f(x) = 2^x$:

x	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\to +\infty$

La función logarítmica correspondiente a esta función exponencial sería $f(x) = log_2(x)$, y su tabla de valores:

x	$\to 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to +\infty$

La representación gráfica de esta función logarítmica se muestra en la siguiente figura.

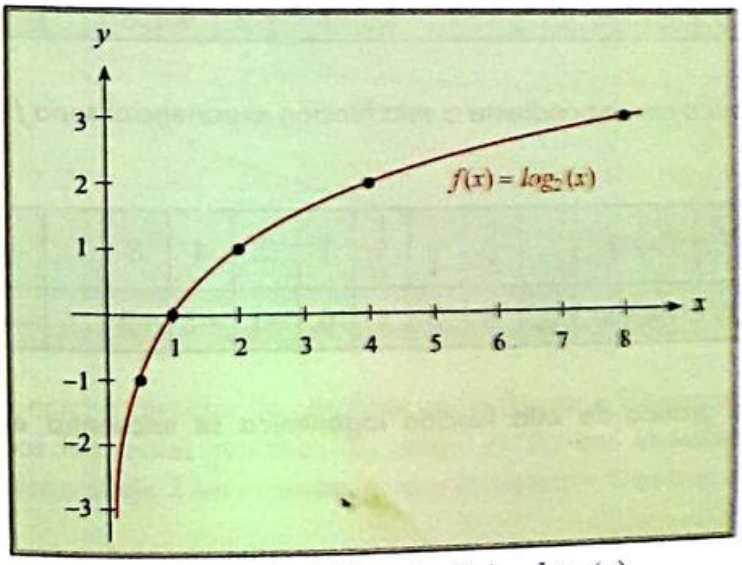


Figura 4.33: Gráfica de $f(x) = log_2(x)$.

Scanned by CamScanner

Si consideramos otro valor para a en este mismo intervalo, por ejemplo $a = 3$, notaremos un comportamiento similar. Lo mismo ocurre para $a = 5$ o $a = 10$.

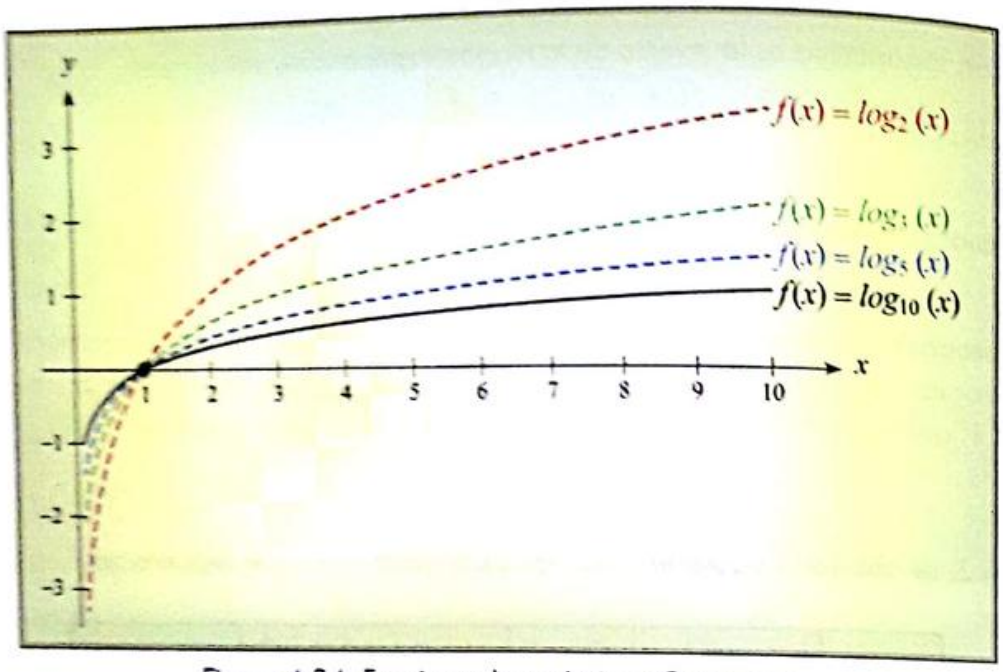


Figura 4.34: Funciones Logarítmicas Crecientes.

Si observamos con mucha atención las gráficas de la figura 4.34, notaremos que están definidas para todos los reales positivos, su rango es $\mathbb{R}$, son inyectivas, estrictamente crecientes, intersecan al eje X en el punto $(1, 0)$ y la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

$0 < a < 1$

Con $a = \frac{1}{2}$, se obtuvo la siguiente tabla de valores para la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

x	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to +\infty$	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\to 0$

La función logarítmica correspondiente a esta función exponencial sería $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x)$, y su tabla de valores:

x	$\to 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\to +\infty$
$f(x)$	$\to +\infty$	...	3	2	1	0	-1	-2	-3	...	$\to -\infty$

La representación gráfica de esta función logarítmica se encuentra en la figura 4.35.

Scanned by CamScanner

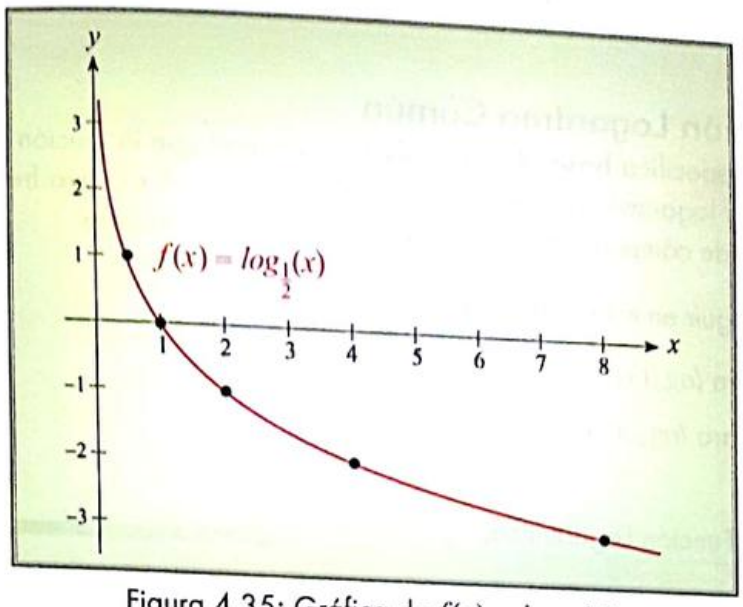


Figura 4.35: Gráfica de $f(x) = log_{\frac{1}{2}}(x)$.

Si consideramos otro valor para a en este mismo intervalo, por ejemplo $a = \frac{1}{3}$, notaremos un comportamiento similar. Lo mismo ocurre para $a = \frac{1}{5}$ o $a = \frac{1}{10}$.

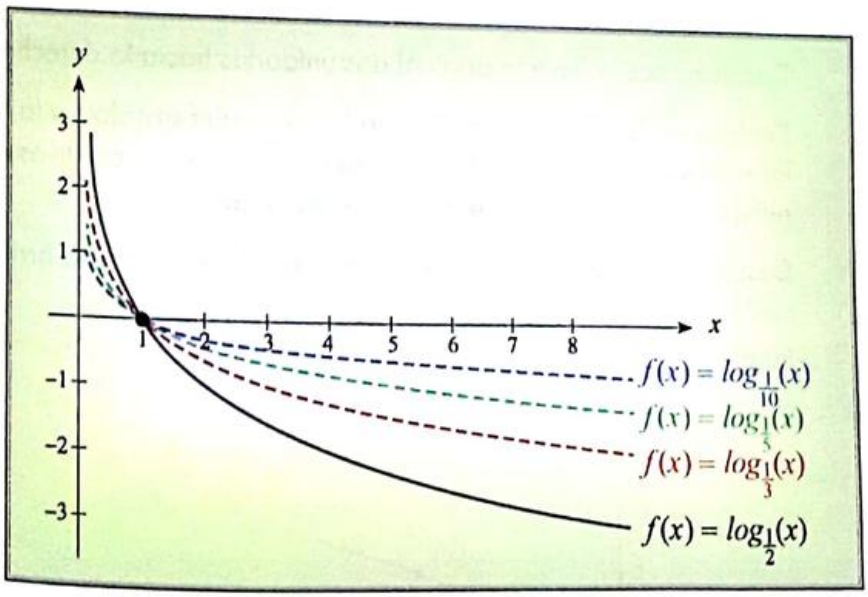


Figura 4.36: Funciones Logarítmicas Decrecientes.

Si observamos con mucha atención las gráficas de la figura 4.36, notaremos que están definidas para todos los reales positivos, su rango es $\mathbb{R}$, son inyectivas, estrictamente decrecientes, intersecan al eje X en el punto $(1, 0)$ y la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Scanned by CamScanner

4.14.1 Función Logaritmo Natural

Si la base de una función logarítmica es el número e, entonces tenemos la función logaritmo natural. Esta función se presenta con tal frecuencia que tiene asignado un símbolo especial, *ln* (del latín, *logarithmus naturalis*).

4.14.2 Función Logaritmo Común

Cuando no se especifica base alguna, debemos suponer que la función logarítmica tiene base 10. A estos logaritmos se los conoce como comunes, ya que era frecuente utilizarlos para propósitos de cómputos, antes de la época de las calculadoras.

La notación a seguir en esta obra será:

- $ln(x)$, para $log_e(x)$
- $log(x)$, para $log_{10}(x)$

Ejemplo 4.65 Función Logarítmica.

Grafique la función $f(x) = |ln(x-2)| + 2, \forall x > 2$ e indique sus características.

Solución:

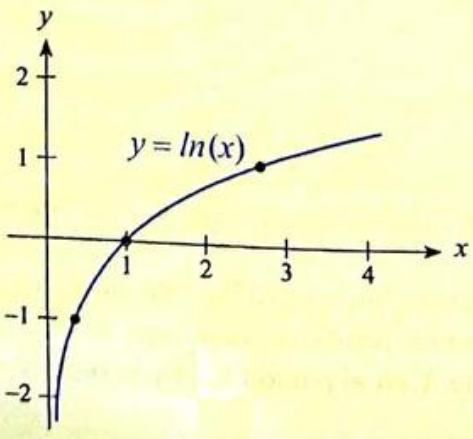
Paso 1 : Identificamos la función original: $f(x) = ln(x)$.

Paso 2 : Desplazamos la función original dos unidades hacia la derecha.

Paso 3 : Realizamos la composición entre la función valor absoluto y la función logarítmica, lo cual significa conservar los valores positivos de f y reflejar con respecto al eje X sus valores negativos.

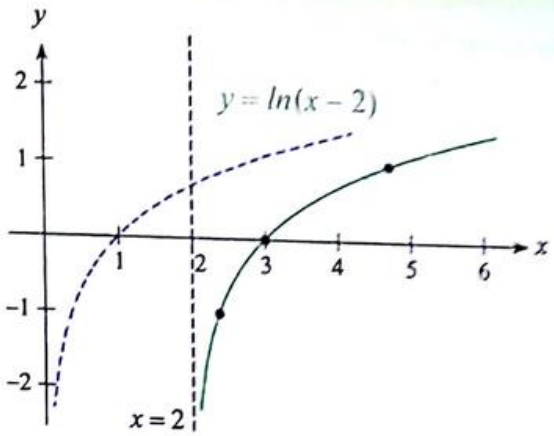
Paso 4 : Desplazamos esta última función dos unidades en Y hacia arriba.

Paso 1:

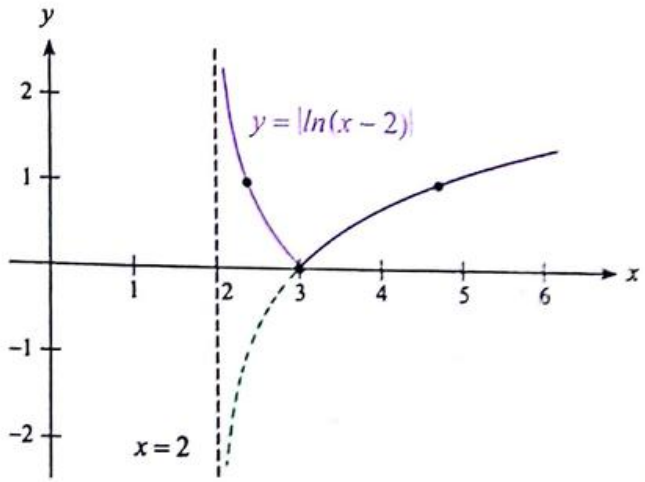


Scanned by CamScanner

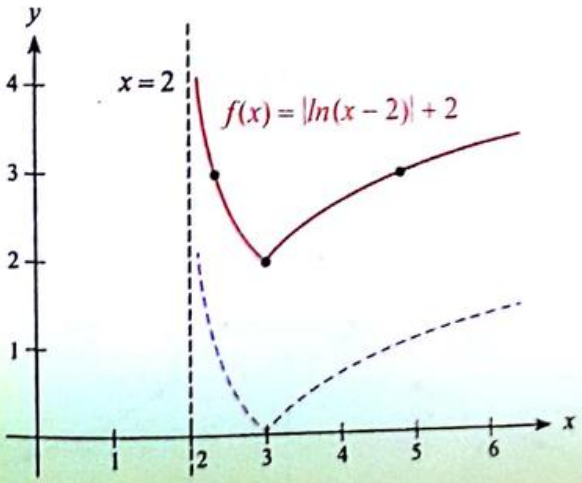
Paso 2:



Paso 3:



Paso 4:



Scanned by CamScanner

$f(x) = ln|(x-2)| + 2$ tiene las siguientes características:

- $dom\, f = (2, +\infty)$
- $rg\, f = [2, +\infty)$
- Decreciente en $(2, 3)$.
- Creciente en $(3, +\infty)$.
- Acotada inferiormente en $y = 2$.
- Asíntota vertical: $x = 2$.

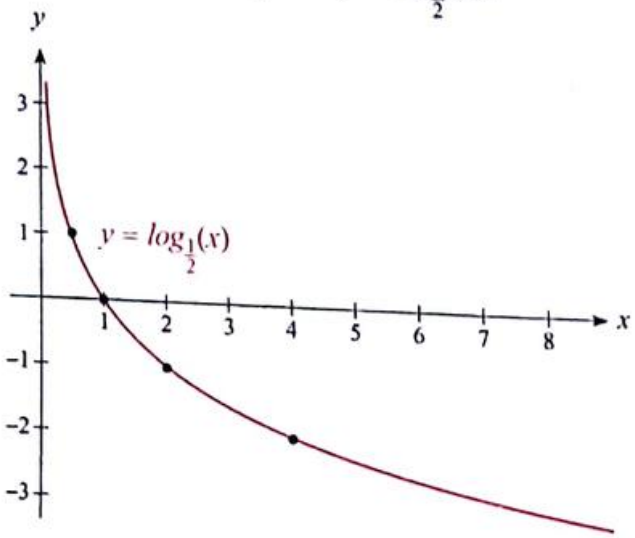
Ejemplo 4.66 Función Logarítmica.

Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = log_{\frac{1}{2}}|2 - x|$ e indique sus características.

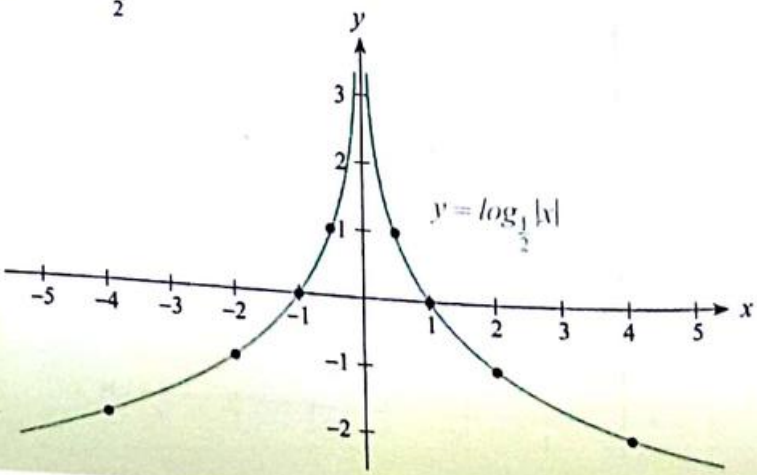
Solución:

Aplicando propiedades del valor absoluto, $f(x) = log_{\frac{1}{2}}|x - 2|$.

Paso 1: Identificamos la función original: $y = log_{\frac{1}{2}}(x)$.

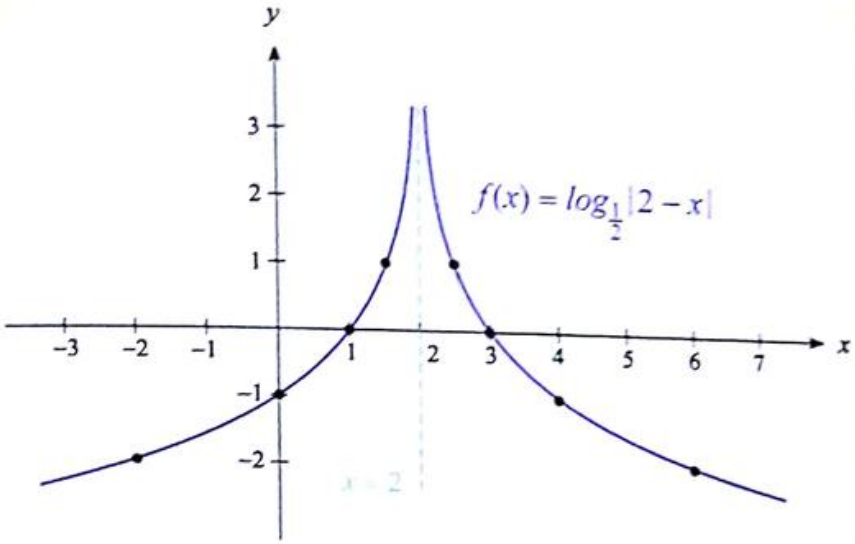


Paso 2: Reflejamos la gráfica de f cuando $x > 0$, con respecto al eje Y, para obtener $log_{\frac{1}{2}}|x|$.



Scanned by CamScanner

Paso 3: Desplazamos la gráfica de f, 2 unidades hacia la derecha, para obtener $f(x) = log_{\frac{1}{2}}|x-2| = log_{\frac{1}{2}}|2-x|$.



$f(x) = log_{\frac{1}{2}}|2-x|$ tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R} - \{2\}$
- $rg\, f = \mathbb{R}$
- Estrictamente creciente en $(-\infty, 2)$.
- Estrictamente decreciente en $(2, +\infty)$.
- Asíntota vertical y eje de simetría en $x = 2$.

Ejemplo 4.67 Composición de funciones exponenciales y logarítmicas.

Sean las funciones $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x>1 \\ 2x, & x \leq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} ln(x), & x>0 \\ \pi^x, & -1<x\leq 0 \\ -1, & x \leq -1 \end{cases}$$

Obtenga, de ser posible, la regla de correspondencia de la función $(f \circ g)$.

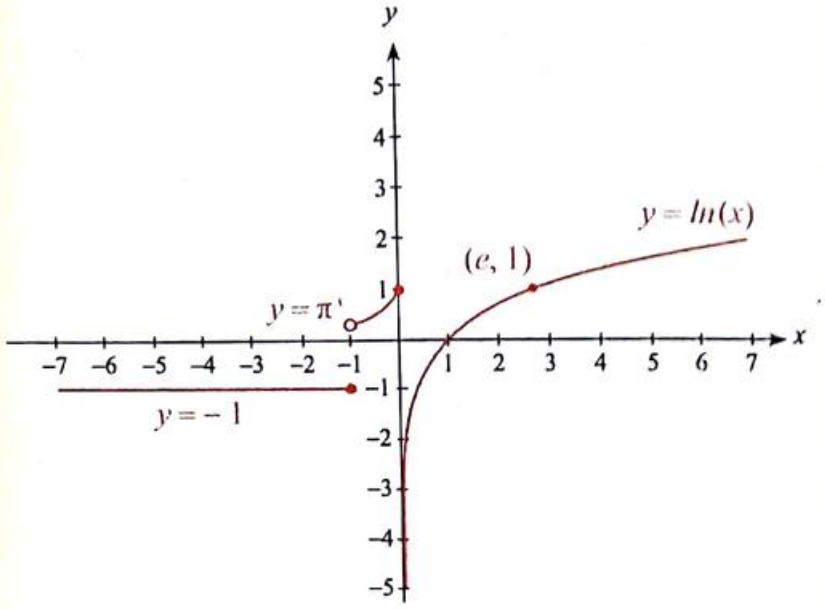
Solución:

Aplicando la definición de composición de funciones:

Scanned by CamScanner

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases} g(x)-1, & g(x)>1 \wedge x\in dom\, g \\ 2g(x), & g(x)\leq 1 \wedge x\in dom\, g \end{cases}$$

Graficando la función g:



Se puede observar que $g(x)>1$, cuando $x>e$. También que $g(x)\leq 1$, cuando $x\leq e$. Reemplazando en la regla de correspondencia de la función, se obtiene:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases} ln(x)-1, & x>e \\ 2\,ln(x), & 0<x\leq e \\ 2\pi^{x}, & -1<x\leq 0 \\ -2, & x\leq -1 \end{cases}$$

4.14.3 Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos tienen algunas propiedades muy útiles que se pueden deducir en forma directa a partir de su definición y las leyes de los exponentes.

I)	$log_a(1) = 0$	$\forall a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$
II)	$log_a(a) = 1$	$\forall a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$
III)	$a^{log_a(M)} = M$	$\forall a\in(0,1)\cup(1,+\infty), \forall M>0$
IV)	$log_a(a^M) = M$	$\forall a\in(0,1)\cup(1,+\infty), \forall M\in\mathbb{R}$
V)	$log_a(MN) = log_a(M)+log_a(N)$	$\forall a\in(0,1)\cup(1,+\infty), \forall M>0, \forall N>0$

Scanned by CamScanner

VI)	$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$	$\forall a \in (0,1)\cup(1,+\infty), \forall M>0, \forall N>0$
VII)	$\log_a\left(\frac{1}{N}\right) = -\log_a(N)$	$\forall a \in (0,1)\cup(1,+\infty), \forall N>0$
VIII)	$\log_a(M^\alpha) = \alpha \log_a(M)$	$\forall a \in (0,1)\cup(1,+\infty), \forall M>0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
IX)	$\log_a(M) = \frac{\log_b(M)}{\log_b(a)}$	$\forall a, b \in (0,1)\cup(1,+\infty), \forall M>0$
X)	$a^M = b \equiv \log_a(b) = M$	$\forall a \in (0,1)\cup(1,+\infty), \forall b>0, \forall M \in \mathbb{R}$

$\log_a \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_a m$

Demostraciones:

Propiedad III

$a^{\log_a(M)} = M$	Lo que se quiere demostrar.
Sea $x = \log_a(M)$	Realizando una sustitución adecuada.
$a^x = M$	Cambiando la expresión logarítmica por la exponencial equivalente.
$a^{\log_a(M)} = M$	Reemplazando x.

Propiedad V

$\log_a(MN) = \log_a(M) + \log_a(N)$	Lo que se quiere demostrar.
Sean $x = \log_a(M), y = \log_a(N)$	Realizando sustituciones adecuadas.
$a^x = M, a^y = N$	Cambiando las expresiones logarítmicas por las exponenciales equivalentes.
$a^x a^y = MN$	Efectuando el producto.
$\log_a(a^{x+y}) = \log_a(MN)$	Aplicando logaritmo en base a.
$x + y = \log_a(MN)$	Utilizando la propiedad IV.
$\log_a(M) + \log_a(N) = \log_a(MN)$	Reemplazando x e y.

Ejemplo 4.68 Propiedades de logaritmos.

Escriba la siguiente expresión $21\log_3\left(\sqrt[3]{x}\right) + \log_3\left(x^2\right) - \log_5(25)$ como un único logaritmo.

Scanned by CamScanner

Solución:

$21\left(\frac{1}{3}\right)log_3(x)+2\,log_3(x)-2\,log_5(5)$	Aplicando la propiedad VIII.
$7\,log_3(x)+2\,log_3(x)-2\,log_5(5)$	Simplificando.
$9\,log_3(x)-2$	Aplicando la propiedad II.
$9\,log_3(x)-log_3(9)$	Aplicando la propiedad IV.
$log_3\left(\frac{x^9}{9}\right)$	Aplicando las propiedades VI y VIII.

Ejemplo 4.69 Expresiones logarítmicas.

Determine el valor de la expresión:

$$\frac{ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)-log_5(25)+log_{\frac{1}{5}}(25)^{\frac{1}{3}}}{log(10)^{\frac{1}{2}}+log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}-ln\left(e^{\frac{1}{6}}\right)}$$

Solución:

$$\frac{ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)-log_5(25)+log_{\frac{1}{5}}(25)^{\frac{1}{3}}}{log(10)^{\frac{1}{2}}+log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}-ln\left(e^{\frac{1}{6}}\right)}=\frac{\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}(-2)}{\frac{1}{2}-4(-1)-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{3-12-4}{6}}{\frac{3+24-1}{6}}=-\frac{13}{26}=-\frac{1}{2}$$

Ejemplo 4.70 Expresiones logarítmicas.

Si $a\neq 1$, $a>0$, $b\neq 1$, $b>0$ y $log_a(b)=3$, determine el valor de $log_{\frac{1}{b}}\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$.

Solución:

Aplicando la propiedad de cambio de base, se obtiene:

$$log_{\frac{1}{b}}\left(\frac{a^3}{b^2}\right)=\frac{log_a\left(\frac{a^3}{b^2}\right)}{log_a\left(\frac{1}{b}\right)}=\frac{log_a(a^3)-log_a(b^2)}{-log_a(b)}=\frac{3-2\,log_a(b)}{-log_a(b)}$$

Scanned by CamScanner

Reemplazando $log_a(b) = 3$, se obtiene:

$$log_{\frac{1}{b}}\left(\frac{a^3}{b^2}\right) = \frac{3-6}{-3} = 1$$

Ejemplo 4.71 Propiedades de logaritmos.

Determine el valor de:

$$[log_{32}(33)]\,[log_{33}(34)]\,[log_{34}(35)] \ldots [log_{62}(63)]\,[log_{63}(64)]$$

Solución:

Utilizando la propiedad de cambio de base de logaritmos:

$$\cancel{[log_{32}(33)]}\left[\frac{\cancel{log_{32}(34)}}{\cancel{log_{32}(33)}}\right]\left[\frac{\cancel{log_{32}(35)}}{\cancel{log_{32}(34)}}\right] \ldots \left[\frac{\cancel{log_{32}(63)}}{\cancel{log_{32}(62)}}\right]\left[\frac{log_{32}(64)}{\cancel{log_{32}(63)}}\right]$$

Se simplifica la expresión, obteniéndose:

$$log_{32}(64) = log_{2^5}(2^6) = \frac{log_2(2^6)}{log_2(2^5)} = \frac{6\cancel{(log_2(2))}}{5\cancel{(log_2(2))}} = \frac{6}{5}$$

Se concluye entonces que:

$$[log_{32}(33)]\,[log_{33}(34)]\,[log_{34}(35)] \cdots [log_{62}(63)]\,[log_{63}(64)] = \frac{6}{5}$$

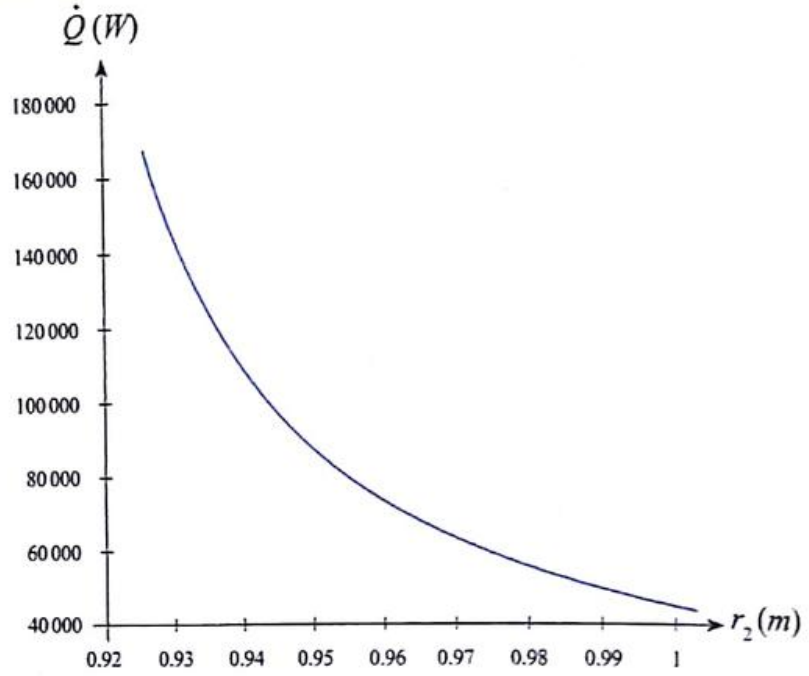
Ejemplo 4.72 Aplicación de logaritmos.

Se conoce que la pérdida de calor por conducción $\dot{Q}$ en un cilindro de radio exterior r_2 y radio interior r_1, sometido a una diferencia de temperatura ΔT, está dada por: $\dot{Q} = \frac{2\pi kL\Delta T}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$, donde k es la conductividad térmica del material y L es la altura del cilindro.

a) Determine la pérdida de calor por conducción de un cilindro, si se conoce que su altura mide 1.5 m, $k = 50\frac{W}{m\,°K}$, $r_2 = 0.93\ m$, $r_1 = 0.9\ m$; y, que además está sometido a una diferencia de temperatura de 10 $°K$.

Scanned by CamScanner

b) A partir de la gráfica de $\dot{Q}$ en función de r_2 que se muestra a continuación, analice el comportamiento de la pérdida de calor a medida que r_2 aumenta.



c) A partir de la función dada, exprese el radio exterior del cilindro en función de la pérdida de calor.

Solución:

a) Empleando la expresión de la pérdida de calor, con la ayuda de una calculadora se obtiene:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi\, k L\, \Delta T}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi\,(50)\,(1.5)\,(10)}{ln\left(\frac{0.93}{0.9}\right)} = \frac{4\,712.39}{0.0328} = 143.67\ kW$$

b) Se puede concluir que para valores pequeños en el radio exterior del cilindro, la transferencia de calor alcanza valores muy grandes; mientras que cuando el radio toma valores mayores, la transferencia de calor disminuye, es decir, existe una resistencia del cilindro a la transferencia de calor, tal como si se tratara de un aislante. Note que $dom\ \dot{Q} = (0.9, +\infty)$.

c) Para obtener la expresión requerida para el radio, se seguirán los siguientes pasos:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi\, k L\, \Delta T}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$ Expresión original.

$$\dot{Q}\, ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 2\pi\, kL\Delta T$$ Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

Scanned by CamScanner

$$\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)=\frac{2\pi kL\Delta T}{\dot{Q}}$$ Dividiendo ambos miembros de la igualdad por $\dot{Q}$.

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)=e^{\frac{2\pi kL\Delta T}{\dot{Q}}}$$ Aplicando el cambio a la forma exponencial.

$$r_2=r_1 e^{\frac{2\pi kL\Delta T}{\dot{Q}}}$$ Despejando r_2.

Ejemplo 4.73 Aplicación de funciones exponenciales y logarítmicas.

La función $P(t) = 158(1 - e^{-0.001t})$ relaciona el crecimiento de la población de conejos de una isla, con el tiempo t transcurrido (en días).

a) ¿Cuándo, aproximadamente, la población sobrepasará los 100 conejos?

b) ¿Cuál es el máximo número de integrantes que puede tener esta población de conejos? Explique.

Solución:

a) Necesitamos determinar el valor mínimo de t cuando $P(t) > 100$, es decir:

$$\begin{aligned} 158(1-e^{-0.001t}) &> 100 \\ 1-e^{-0.001t} &> 0.632911 \\ -e^{-0.001t} &> -0.367089 \\ e^{-0.001t} &< 0.367089 \end{aligned}$$

Aplicando logaritmo natural a ambos miembros y considerando que $\ln(0.367089) \approx \ln(e^{-1}) \approx -1$, se tiene que:

$$-0.001\,t < -1$$

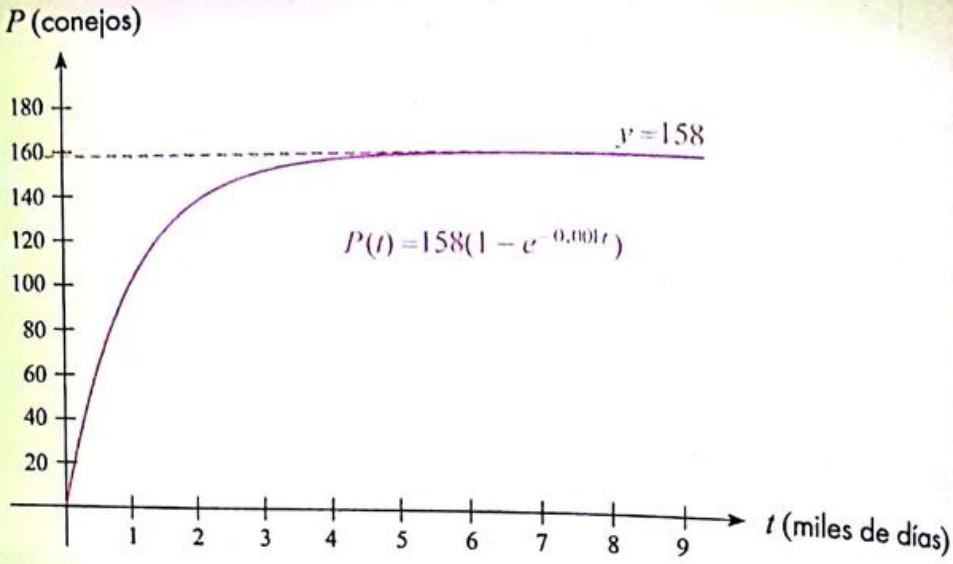
Despejando t:

$$t > 1\,000$$

Tomando como referencia la inecuación anterior, se puede evaluar la función para 1001 y 1002 días, verificándose que a partir de los 1003 días transcurridos la población sobrepasa los 100 conejos.

Scanned by CamScanner

b) Realizaremos un bosquejo de la gráfica de P:



Como se puede apreciar en la gráfica, a medida que t aumenta, la población de conejos también se incrementa pero ésta no sobrepasará los 158 conejos, ya que la recta $y = 158$ constituye una asíntota horizontal, lo cual como se recordará, significa que cuando t tiende a $+\infty$, entonces $P(t)$ tiende a 158.

De aquí que, el número máximo de integrantes que puede tener esta población de conejos será de 158.

Ejemplo 4.74 Inversa de funciones exponenciales y logarítmicas.

Sea f una función de variable real cuya función inversa tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - 2^{-x}, & x < 0 \\ log_2(x+2), & x \geq 0 \end{cases}$$

Determine la regla de correspondencia de f.

Solución:

Aplicando la definición:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \begin{cases} 2 - 2^{-f(x)}, & f(x) < 0 \\ log_2(f(x)+2), & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Debido a que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, tenemos que:

Si $f(x) < 0$

$2 - 2^{-f(x)} = x$

Despejando $f(x)$:

$2 - x = 2^{-f(x)}$

$log_2(2-x) = log_2(2^{-f(x)})$

$-f(x) = log_2(2-x)$

$f(x) = log_{\frac{1}{2}}(2-x)$

Si $f(x) \geq 0$

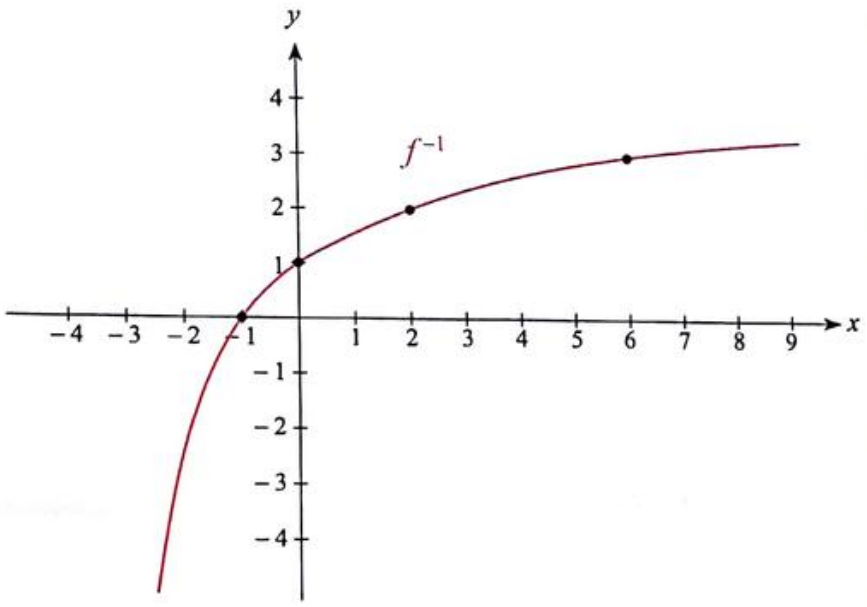
$log_2(f(x)+2) = x$

Despejando $f(x)$:

$2^x = f(x) + 2$

$f(x) = 2^x - 2$

Para determinar el dominio de la función, nos ayudaremos con la gráfica de f^{-1}:



A partir de la cual se concluye que:

$$x < 0 \Rightarrow f^{-1}(x) < 1$$
$$x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) \geq 1$$

Siendo así, la regla de correspondencia de f sería:

$$f(x) = \begin{cases} log_{\frac{1}{2}}(2-x), & x < 1 \\ 2^x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

4.14.4 Ecuaciones e inecuaciones exponenciales

Las igualdades o desigualdades que contienen términos de la forma a^x se denominan ecuaciones o inecuaciones exponenciales. Por ejemplo, $2^{2x} = 16$ es una ecuación exponencial; y, $25^{x+2} > 5^{3x-4}$ es una inecuación exponencial.

Estas expresiones exponenciales pueden incluirse en predicados, considerando para su solución el conjunto de los números reales como referencial.

Ejemplo 4.75 Ecuaciones exponenciales.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x) : 4^{2x} + 4^x - 2 = 0$, determine $\text{A}p(x)$.

Solución:

$u = 4^x$	Realizando cambio de variable.
$u^2 + u - 2 = 0$	Reemplazando.
$(u + 2)(u - 1) = 0$	Factorizando.
$(u = -2) \vee (u = 1)$	Despejando para la variable u.
$(4^x = -2) \vee (4^x = 1)$	Reemplazando por la variable original.
$(x = log_4(-2)) \vee (x = log_4(1))$	Aplicando logaritmos.
$\varnothing \cup \{0\}$	Determinando los valores de x.
$\{0\}$	

Verificando:

$p(0)$: $4^0 + 4^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$ $\quad \therefore p(0) \equiv 1$

Luego, $\text{A}p(x) = \{0\}$

Ejemplo 4.76 Ecuaciones exponenciales.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $3(2^{x+3}) = 192\,(3^{x-3})$, determine $\text{A}p(x)$.

Solución:

$3(2^{x+3}) = 192\,(3^{x-3})$	Partiendo de la ecuación dada.
$3(2^x)(2^3) = (2^6)(3)(3^x)(3^{-3})$	Aplicando ley de exponentes.
$(2^x)(2^3)(3) = 3^x(2^6)(3^{-2})$	Efectuando productos y simplificando.
$\frac{2^x}{3^x} = \frac{2^3}{3^3}$	Agrupando términos semejantes.

Scanned by CamScanner

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ Aplicando ley de exponentes.

$x = 3$ Determinando el valor de x.

Verificando:

$p(3)$: $3(2^6) = 192(3^0)$

$192 = 192$ $\therefore p(3) \equiv 1$

Luego, $Ap(x) = \{3\}$.

Ejemplo 4.77 Ecuaciones exponenciales.

Sea $\text{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $e^x - 16e^{-x} - 2 = 0$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$e^x - 16e^{-x} - 2 = 0$ Partiendo de la ecuación dada.

$e^x - \frac{16}{e^x} - 2 = 0$ Aplicando ley de exponentes.

$\frac{e^{2x} - 16 - 2e^x}{e^x} = 0$ Obteniendo el m.c.m.

$e^{2x} - 2e^x - 16 = 0$ Expresando la ecuación exponencial.

$u = e^x$ Haciendo un cambio de variable.

$u^2 - 2u - 16 = 0$ Planteando una ecuación cuadrática.

$u = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(1)(-16)}}{2}$ Resolviendo la ecuación en términos de u.

$u = \frac{2 \pm \sqrt{68}}{2}$ Expresando las soluciones en términos de u.

$(u = 1 + \sqrt{17}) \vee (u = 1 - \sqrt{17})$ Despejando x.

$[x = ln(1 + \sqrt{17})] \vee [x = ln(1 - \sqrt{17})]$

Como se puede observar, la solución $x = ln(1 - \sqrt{17})$ no está definida en $\mathbb{R}$, por lo que procedemos a verificar la otra solución:

Scanned by CamScanner

$p[ln(1+\sqrt{17})]$: $e^{ln(1+\sqrt{17})} - 16e^{-ln(1+\sqrt{17})} - 2 = 0$

$$e^{ln(1+\sqrt{17})} - 16e^{ln(1+\sqrt{17})^{-1}} - 2 = 0$$

$$(1+\sqrt{17}) - 16(1+\sqrt{17})^{-1} - 2 = 0$$

$$(1+\sqrt{17}) - \frac{16}{1+\sqrt{17}} - 2 = 0$$

$$(1+\sqrt{17})^2 - 16 - 2(1+\sqrt{17}) = 0$$

$$1 + 2\sqrt{17} + 17 - 16 - 2 - 2\sqrt{17} = 0$$

$$18 - 18 = 0 \quad \therefore \; p[ln(1+\sqrt{17})] \equiv 1$$

Con lo cual, se concluye que: $Ap(x) = \{ln(1+\sqrt{17})\}$.

Ejemplo 4.78 Ecuaciones exponenciales.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $4^{2x+3} = 5^{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$; determine $Ap(x)$.

Solución:

$4^{2x+3} = 5^{x+2}$	Partiendo de la ecuación dada.
$(2x+3)\,log(4) = (x+2)\,log(5)$	Aplicando logaritmos de base 10 a ambos miembros de la igualdad.
$2x\,log(4) + 3\,log(4) = x\,log(5) + 2\,log(5)$	Resolviendo los productos.
$2x\,log(4) - x\,log(5) = 2\,log(5) - 3\,log(4)$	Agrupando términos semejantes.
$x(2\,log(4) - log(5)) = 2log(5) - 3\,log(4)$	Descomponiendo en factores.
$x(log(16) - log(5)) = log(25) - log(64)$	Aplicando la propiedad VIII de logaritmos.
$x\,log\left(\frac{16}{5}\right) = log\left(\frac{25}{64}\right)$	Aplicando la propiedad VI de logaritmos.
$x = \frac{log\left(\frac{25}{64}\right)}{log\left(\frac{16}{5}\right)}$	Despejando x.

Scanned by CamScanner

Verificando:

$$p\left(\frac{\log_8\left(\frac{25}{64}\right)}{\log_8\left(\frac{16}{5}\right)}\right) : 4^{\left[2\left(\frac{\log_2\left(\frac{25}{64}\right)}{\log_2\left(\frac{16}{5}\right)}\right)-1\right]} = 5^{\left[\left(\frac{\log_2\left(\frac{25}{64}\right)}{\log_2\left(\frac{16}{5}\right)}\right)-2\right]}$$

$$4^{\left[\frac{2\log_2\left(\frac{25}{64}\right)-2\log_2\left(\frac{16}{5}\right)}{\log_2\left(\frac{16}{5}\right)}\right]} = 5^{\left[\frac{\log_2\left(\frac{25}{64}\right)-2\log_2\left(\frac{16}{5}\right)}{\log_2\left(\frac{16}{5}\right)}\right]}$$

$$4^{\left[\frac{\log_2\left(\frac{25}{64}\right)^2-\log_2\left(\frac{16}{5}\right)^2}{\log_2\left(\frac{16}{5}\right)}\right]} = 5^{\left[\frac{\log_2\left(\frac{25}{64}\right)-\log_2\left(\frac{16}{5}\right)^2}{\log_2\left(\frac{16}{5}\right)}\right]}$$

$$4^{\left[\frac{\log_2\left(\frac{5^4}{4^6}\right)-\log_2\left(\frac{4^4}{5^2}\right)}{\log_2\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]} = 5^{\left[\frac{\log_2\left(\frac{5^2}{4^2}\right)-\log_2\left(\frac{4^4}{5^2}\right)}{\log_2\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]}$$

$$4^{\left[\frac{\log_2\left(\frac{5^4\times 5^4}{4^6\times 5^2}\right)}{\log_2\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]} = 5^{\left[\frac{\log_2\left(\frac{5^2\times 5^4}{4^4\times 5^2}\right)}{\log_2\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]}$$

$$\log_2(4)^{\left[\frac{\log_2(5)}{\log_2\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]} = \log_2(5)^{\left[\frac{\log_2(4)}{\log_2\left(\frac{4^2}{5}\right)}\right]}$$

$$\frac{\log_2(5)}{\log_2\left(\frac{4^2}{5}\right)}\left[\log_2(4)\right] = \frac{\log_2(4)}{\log_2\left(\frac{4^2}{5}\right)}\left[\log_2(5)\right] \therefore p\left(\frac{\log_8\left(\frac{25}{64}\right)}{\log_8\left(\frac{16}{5}\right)}\right) \equiv 1$$

Con lo cual, se concluye que: $Ap(x) = \left\{\frac{\log_8\left(\frac{25}{64}\right)}{\log_8\left(\frac{16}{5}\right)}\right\}$

Al resolver inecuaciones exponenciales o logarítmicas, se aplican las siguientes propiedades, con $I = \mathbb{R}$ para el caso exponencial e $I = \mathbb{R}^+$ para el caso logarítmico.

$\forall x_1, x_2 \in I \wedge a > 1\ [(x_1 < x_2) \Rightarrow (a^{x_1} < a^{x_2} \vee \log_a(x_1) < \log_a(x_2))]$
$\forall x_1, x_2 \in I \wedge 0 < a < 1\ [(x_1 < x_2) \Rightarrow (a^{x_1} > a^{x_2} \vee \log_a(x_1) > \log_a(x_2))]$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 4.79 Inecuaciones exponenciales.

Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $3^{x+1} > 243$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$3^{x+1} > 3^5$	Reemplazando 243 por su equivalente exponencial.
$x + 1 > 5$	Aplicando logaritmo en base 3.
$x > 4$	Despejando la incógnita x.
$Ap(x) = \{x/x > 4\}$	Determinando los valores de x.

Ejemplo 4.80 Inecuaciones exponenciales.

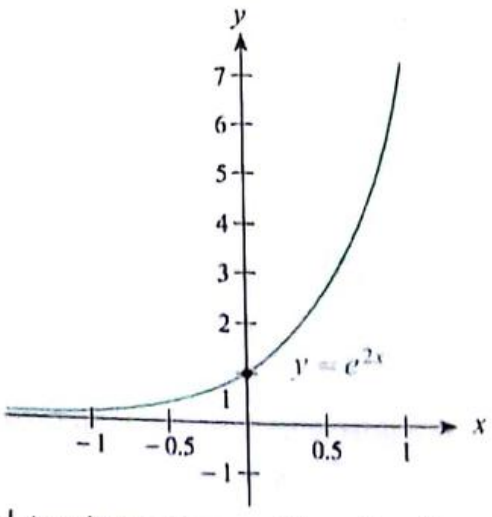
Sea $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$, $p(x)$: $\mu(e^{2x} + 1) = 0$ y $q(x)$: $sgn(e^x - 1) = 1$, determine el conjunto de verdad $A[\neg p(x) \vee q(x)]$.

Solución:

Primero analizamos el predicado $p(x)$:
$p(x)$: $\mu(e^{2x} + 1) = 0$

Empleando la definición de función escalón, tenemos que:
$[\mu(e^{2x} + 1) = 0] \Leftrightarrow (e^{2x} + 1 \leq 0) \Leftrightarrow e^{2x} \leq -1$

Analizando la gráfica de la función e^{2x}, observamos:



Con lo que se puede determinar que no existe valor alguno en x para el cual e^{2x} sea menor o igual que -1, luego $Ap(x) = \varnothing$.

En segunda instancia, analizamos el predicado $q(x)$.

$$q(x): sgn(e^x - 1) = 1$$

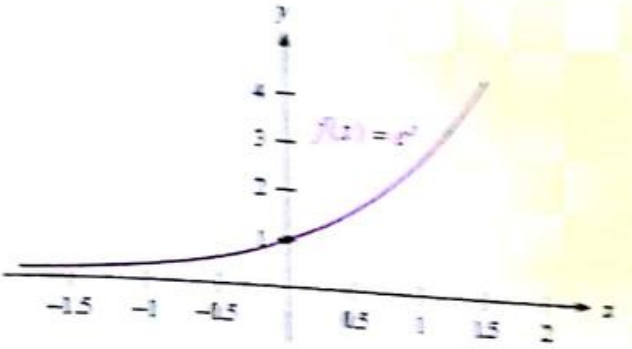
Scanned by CamScanner

Empleando la definición de función signo, tenemos que:

$$[sgn(e^x - 1) = 1] \quad \Leftrightarrow \quad (e^x - 1 > 0)$$

Luego: $e^x > 1$.

Analizamos la gráfica de la función e^x:



Con lo que se puede determinar que e^x es mayor que 1 cuando $x > 0$, luego:

$$Ap(x) = (0, +\infty).$$

Por lo tanto:

$$A[\neg p(x) \vee q(x)] = A^c p(x) \cup Aq(x)$$
$$= \mathbb{R} \cup (0, +\infty)$$
$$A[\neg p(x) \vee q(x)] = \mathbb{R}$$

4.14.5 Ecuaciones e inecuaciones logarítmicas

Las igualdades o desigualdades que contienen términos de la forma $log_a(x)$ se denominan ecuaciones o inecuaciones logarítmicas. Por ejemplo, $3\ ln(x - 2) = 1$ es una ecuación logarítmica y $log_2(3x - 2) > 5$ es una inecuación logarítmica.

Ejemplo 4.81 Ecuaciones logarítmicas.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $ln(x) = ln(3x + 1) + 1$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$ln(x) - ln(3x + 1) = 1$	Llevando los logaritmos al miembro izquierdo.
$ln\left(\frac{x}{3x+1}\right) = 1$	Aplicando el logaritmo de una división.
$e = \frac{x}{3x+1}$	Aplicando el cambio a la forma exponencial.

Scanned by CamScanner

$x = \dfrac{e}{1-3e}$ Despejando la incógnita x.

Note que $\dfrac{e}{1-3e}$ es un valor negativo.

$\therefore Ap(x) = \varnothing$

Ejemplo 4.82 Ecuaciones logarítmicas.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $log_2(x^2-1) = log_{1/2}(x-1)$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$log_2(x^2-1) = log_{1/2}(x-1)$	
$log_2(x^2-1) = -log_2(x-1)$	Aplicando la propiedad IX de logaritmos.
$log_2(x^2-1) + log_2(x-1) = 0$	Simplificando.
$log_2[(x^2-1)(x-1)] = 0$	Aplicando la propiedad V de logaritmos.
$(x^2-1)(x-1) = 1$	Aplicando la función exponencial a la expresión logarítmica.
$x^3 - x^2 - x + 1 = 1$	Efectuando el producto.
$x^3 - x^2 - x = 0$	Reduciendo términos y factorizando.
$x(x^2 - x - 1) = 0$	Simplificando.
$(x=0) \vee (x^2 - x - 1) = 0$	Resolviendo la ecuación polinomial.
$(x=0) \vee \left(x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \vee \left(x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	Resolviendo la ecuación cuadrática.

Debe también cumplirse que $x^2 - 1 > 0$ y $x - 1 > 0$, porque son argumentos de logaritmos.

Verificando:

Como se puede observar, las soluciones $x = 0$ y $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ dan lugar a expresiones no definidas en $\mathbb{R}$, por lo que hacemos la verificación con la solución $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, así:

$$p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right): log_2\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1\right] = log_{1/2}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1\right]$$

Scanned by CamScanner

$$\log_2\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5-4}{4}\right)=\log_{1/2}\left(\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}\right)$$

$$\log_2\left(\frac{2+2\sqrt{5}}{4}\right)=\log_{1/2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=-\log_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\log_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$$

$$\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\log_2\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)$$

$$\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\log_2\left[\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}}\right)\right]$$

$$\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\log_2\left[\frac{2\left(-1-\sqrt{5}\right)}{(-1)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\right]$$

$$\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\log_2\left[\frac{-2\left(1+\sqrt{5}\right)}{-4}\right]$$

$$\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\therefore p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\equiv 1$$

Luego, $Ap(x)=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ejemplo 4.83 Ecuaciones logarítmicas.

Sea $\mathrm{Re}=\mathbb{R}$ y $p(x)$: $2\log_a(x)=(\log_a(x))^3$, $a>0$, $\neg(a=1)$; determine el producto de los elementos de $Ap(x)$.

Solución:

$2\log_a(x)=(\log_a(x))^3$	Partiendo de la ecuación dada.
$\log^3{}_a(x)-2\log_a(x)=0$	Elevando al cubo el logaritmo e igualando a cero.
$\log_a(x)\,[\log^2{}_a(x)-2]=0$	Descomponiendo en factores.

Scanned by CamScanner

$(\log_a(x) = 0) \vee (\log^2{}_a(x) = 2)$ Resolviendo la ecuación.

$(\log_a(x) = 0) \vee (\log_a(x) = \pm\sqrt{2})$ Extrayendo la raíz cuadrada.

$(x = a^0 = 1) \vee (x = a^{\pm\sqrt{2}})$ Aplicando la función exponencial a la expresión logarítmica.

$(x = 1) \vee (x = a^{\sqrt{2}}) \vee (x = a^{-\sqrt{2}})$ Determinando las soluciones.

Adicionalmente, debe cumplirse que $x > 0$, porque es el argumento del logaritmo.

Verificando:

$p(1): 2\log_a(1) = (\log_a(1))^3 \quad \therefore\ p(1) \equiv 1$

$0 = 0$

$p(a^{\sqrt{2}}): 2\log_a(a^{\sqrt{2}}) = (\log_a(a^{\sqrt{2}}))^3 \quad \therefore\ p(a^{\sqrt{2}}) \equiv 1$

$2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^3$

$2^{3/2} = 2^{3/2}$

$p(a^{-\sqrt{2}}): 2\log_a(a^{-\sqrt{2}}) = (\log_a(a^{-\sqrt{2}}))^3 \quad \therefore\ p(a^{-\sqrt{2}}) \equiv 1$

$-2\sqrt{2} = (-\sqrt{2})^3$

$-2^{3/2} = -2^{3/2}$

Por lo tanto, $Ap(x) = \{1, a^{\sqrt{2}}, a^{-\sqrt{2}}\}$; y, el producto de sus elementos es igual a 1.

Ejemplo 4.84 Ecuaciones logarítmicas.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $\sqrt{\log(x)} - \log(\sqrt{x}) = 0$, determine la suma de los elementos de $Ap(x)$.

Solución:

$\sqrt{\log(x)} - \log(\sqrt{x}) = 0$ Partiendo de la ecuación dada.

$(\log(x))^{\frac{1}{2}} - \log(x^{\frac{1}{2}}) = 0$ Expresando la ecuación en forma exponencial.

$(\log(x))^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\log(x) = 0$ Aplicando la propiedad VIII de logaritmos.

$2(\log(x))^{\frac{1}{2}} - \log(x) = 0$ Multiplicando por 2.

$u = (\log(x))^{\frac{1}{2}}$ Efectuando un cambio de variable.

$2u - u^2 = 0$ Resolviendo la ecuación cuadrática.

$u(2 - u) = 0$ Despejando u.

$(u = 0) \vee (2 - u = 0)$

$(u = 0) \vee (u = 2)$ Determinando las soluciones.

Scanned by CamScanner

$\left[(log(x))^{\frac{1}{2}} = 0\right] \vee \left[(log(x))^{\frac{1}{2}} = 2\right]$ Expresando las soluciones en términos de x.

$(log(x) = 0) \vee (log(x) = 4)$ Elevando al cuadrado cada miembro.

$(x = 1) \vee (x = 10\,000)$ Aplicando la función exponencial a la expresión logarítmica.

También debe cumplirse que $x > 0$, porque es el argumento de un logaritmo, y que $log(x) \geq 0$ por tratarse del argumento de una raíz cuadrada.

Verificando:

$p(1)$: $\sqrt{log(1)} - log(\sqrt{1}) = 0$

$0 = 0$ $\therefore\ p(1) \equiv 1$

$p(10\,000)$: $\sqrt{log(10\,000)} - log(\sqrt{10\,000}) = 0$

$\sqrt{log(10^4)} - log(\sqrt{10^4}) = 0$

$2 - 2 = 0$

$0 = 0$ $\therefore\ p(10\,000) \equiv 1$

Luego, $Ap(x) = \{1, 10\,000\}$ y la suma de sus elementos es 10 001.

Ejemplo 4.85 Ecuaciones logarítmicas.

Sea $Re = \mathbb{N}$ y $p(x)$: $(log_x(3))\left(log_{\frac{x}{3}}(3)\right) + log_{\frac{x}{81}}(3) = 0$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$(log_x(3))\left(log_{\frac{x}{3}}(3)\right) + log_{\frac{x}{81}}(3) = 0$

$\frac{1}{log_3(x)\, log_3\left(\frac{x}{3}\right)} + \frac{1}{log_3\left(\frac{x}{81}\right)} = 0$ Aplicando la propiedad IX de logaritmos.

$log_3\left(\frac{x}{81}\right) + log_3(x)\, log_3\left(\frac{x}{3}\right) = 0$ Sumando fracciones.

$log_3(x) - log_3(3^4) + log_3(x)\,[log_3(x) - log_3(3)] = 0$ Aplicando la propiedad VI de logaritmos.

$log_3(x) - 4 + log_3(x)\,[log_3(x) - 1] = 0$ Aplicando la propiedad VIII de logaritmos.

$log^2{}_3(x) - 4 = 0$ Reduciendo términos.

$[(log_3(x) = 2) \vee (log_3(x) = -2)] \Rightarrow \left(x = 9 \vee x = \frac{1}{9}\right)$ Resolviendo la ecuación cuadrática.

Scanned by CamScanner

Debe también cumplirse que:

$[(x > 0) \wedge (x \neq 1)] \wedge \left[\left(\frac{x}{3} > 0\right) \wedge \left(\frac{x}{3} \neq 1\right)\right] \wedge \left[\left(\frac{x}{81} > 0\right) \wedge \left(\frac{x}{81} \neq 1\right)\right]$ porque son las bases de los logaritmos.

Verificando:

$p(9)$: $(log_9(3))(log_3(3)) + \left(log_{\frac{1}{9}}(3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore\ p(9) \equiv 1$

$p\left(\frac{1}{9}\right)$: $\left(log_{\frac{1}{9}}(3)\right)\left(log_{\frac{1}{27}}(3)\right) + \left(log_{\frac{1}{729}}(3)\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \quad \therefore\ p\left(\frac{1}{9}\right) \equiv 1$

Debido a que $Rc = \mathbb{N}$, a pesar de que ambas soluciones satisfacen matemáticamente la ecuación, sólo podemos tener la solución $x = 9$, por ser la única solución válida en Rc.

Por lo tanto, $Ap(x) = \{9\}$.

Ejemplo 4.86 Inecuaciones logarítmicas.

Sea $Rc = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $log_3(2x + 1) > 2$, determine $Ap(x)$.

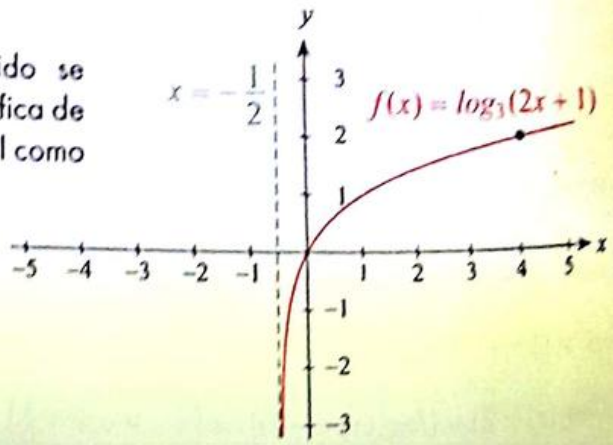
Solución:

$2x + 1 > 3^2$	Reemplazando la expresión por su equivalente exponencial.
$2x > 8$	Simplificando.
$x > 4$	Determinando los valores de x.

Debe también cumplirse que $2x + 1 > 0$, por ser argumento del logaritmo. Esto es, $x > -\frac{1}{2}$.

Por lo tanto, $Ap(x) = \{x/x > 4\}$.

El conjunto de verdad obtenido se puede verificar a partir de la gráfica de la función $f(x) = log_3(2x + 1)$, tal como se muestra:



Scanned by CamScanner

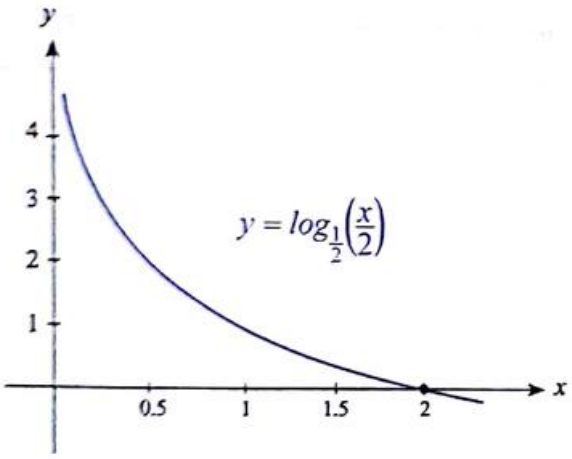
Ejemplo 4.87 Inecuaciones logarítmicas.

Sea $Re = \mathbb{R}$ y $p(x)$: $sgn\left(log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 1$, determine $Ap(x)$.

Solución:

Si aplicamos la definición de la función signo, concluiremos que $p(x)$ se convertirá en una proposición verdadera, si y sólo si $\left(log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\right) > 0$; esto es, cuando y sólo cuando $0 < \frac{x}{2} < 1$.

La gráfica de $log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)$ nos puede resultar útil también para analizar el conjunto de verdad del predicado.



A partir de la gráfica también se puede concluir que:

$$(0 < x < 2) \Rightarrow \left(log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\right) > 0$$

Por lo tanto $Ap(x) = \{x / 0 < x < 2\}$.

Scanned by CamScanner

1) Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa:

$$\log(x) > \ln(x), \forall x > 0$$

$\log(x) = \frac{\log x}{\log 10}$ $\forall x > 0$

$\frac{\ln x}{\ln 10} > \ln(x)$,

$0,43 \ln x > \ln x$; $\forall x > 0$ (F)

2) Si $\text{Re} = \mathbf{R}$, $\log_2(\log_3(x+1)) = 0$ y $\log_3(\log_2(3-y)) = 0$, determine el valor numérico de $(2x-y)$.

$\log_3(x+1) = 1$ * $\log_2(3-y) = 1$

$x+1 = 3$ $\quad 3-y = 2$ $\quad 2x - y = 7$ (2) −1

$x = 2$ $\quad y = 1$ $\quad 2x - y = 3$ //

3) Sea f una función biyectiva de variable real tal que $f(x) = \begin{cases} e^{x-2} - 1, & x \leq 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$.

a) Determine la regla de la correspondencia de su inversa.

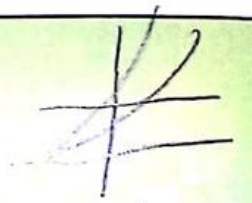
$y = e^{x-2} - 1$, $x \leq 2$

$y + 1 = e^{x-2}$

$\ln(y+1) = x - 2$

$x = 2 + \ln(y+1)$

$F^{-1}(x) = 2 + \ln(x+1)$; $(-1, 0]$



$y \in (-1, 0]$

$y = x - 2$

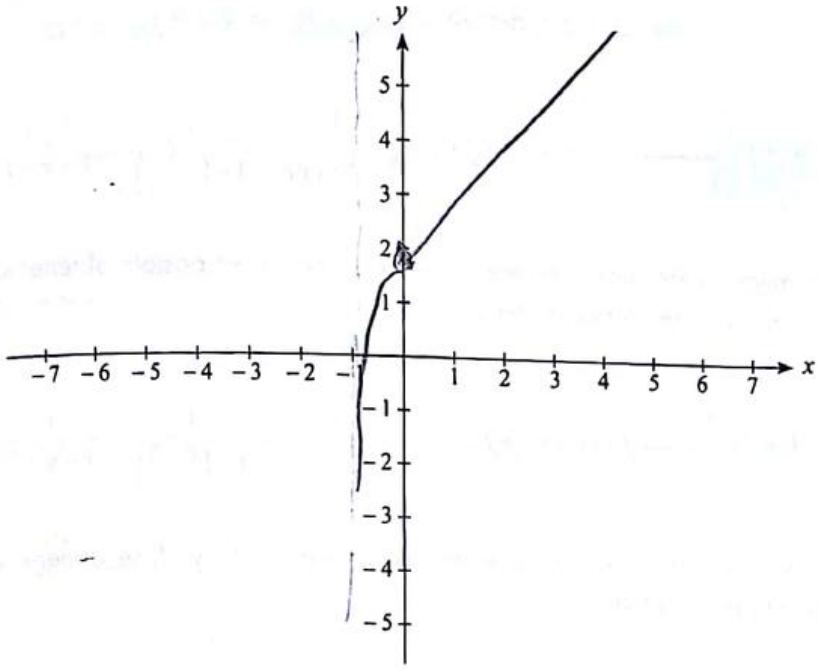
$x = y + 2$

$F^{-1}(x) = x + 2$, $x > 0$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 + \ln(x+1) ; (-1, 0] \\ x + 2 \ ; \ x > 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

b) Grafique la función f con su inversa f^{-1} en el mismo plano cartesiano.



4) Si Re = $\mathbb{R}$ y $p(x)$: $log\,(9x) - log\,(30) = log\left(1+\frac{1}{6}\right) + log\left(1+\frac{1}{7}\right) + log\left(1+\frac{1}{8}\right)$, determine el conjunto de verdad A$p(x)$.

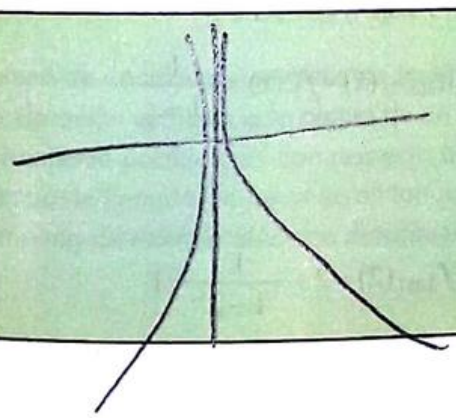
$\log 9x - \log 30 = \log\left(\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}\right) = \log\left(\frac{3}{2}\right)$

$\log 9x = \log(30 - \frac{3}{2})$

$\Rightarrow 9x = 45$

$\log 9x = \log 45$ $\quad x = 5$ R//

5) Considere la función $f: \mathbb{R} - \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(x) = log_{\frac{1}{2}}|x|$, determine el intervalo de valores reales para el cual se cumple la igualdad: $\mu(f(x)) = 1$.



$(-1, 1)$

Scanned by CamScanner

Respuesta al desafío

A partir de la definición de las funciones de variable real dadas y como $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$, se tiene que al obtener la composición de la función f_1 consigo misma, el resultado es la función f_2, cuya regla de correspondencia es:

$$f_1(x),\ f_1(x) \longrightarrow f_1 \circ f_1 \longrightarrow f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = \frac{1}{1-f_1(x)} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x}$$

De manera similar, al efectuar la composición de f_1 con f_2 es posible obtener la función f_3 con la siguiente regla de correspondencia:

$$f_1(x),\ f_2(x) \longrightarrow f_1 \circ f_2 \longrightarrow f_3(x) = (f_1 \circ f_2)(x) = \frac{1}{1-f_2(x)} = \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)} = \frac{x}{x-x+1} = x$$

Si realizamos ahora la composición entre las funciones f_1 y f_3 se obtiene la regla de correspondencia para la función f_4:

$$f_1(x),\ f_3(x) \longrightarrow f_1 \circ f_3 \longrightarrow f_4(x) = (f_1 \circ f_3)(x) = \frac{1}{1-f_3(x)} = \frac{1}{1-x}$$

Este último resultado permite evidenciar que $f_4(x) = f_1(x)$. Adicionalmente, se cumple que $f_5(x) = f_2(x)$, $f_6(x) = f_3(x)$, $f_7(x) = f_4(x)$; y así, sucesivamente.

Como se puede constatar, $f_n(x) = f_{n+3}(x) = f_{n+6}(x) = \ldots = f_{n+3k}(x)$, donde n y k son números naturales; es decir, la regla de correspondencia de cada función $f_n(x)$ se repite, si se sigue la secuencia del proceso de composición detallado, $3k$ veces.

Nótese que $2016 = n + 3k$, cuando $n = 3$ y $k = 671$. Por otra parte $2017 = n + 3k$, cuando $n = 1$ y $k = 672$. Luego:

$$f_{2016}(x) = f_{3+3(671)}(x) = f_3(x) = x$$

$$f_{2017}(x) = f_{1+3(672)}(x) = f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

Por lo tanto:

$$f_{2016}(2) + f_{2017}(2) = 2 + \frac{1}{1-2} = 1$$

Scanned by CamScanner

4 | Funciones de una Variable Real

Ejercicios Propuestos

4.1 Definición, dominio y rango ● ● ● ● ●

1) En el siguiente fragmento se da un concepto erróneo de dominio de una función, identifique el error y reescriba el fragmento:

"Sea una función de variable real $f: X \mapsto Y$. El conjunto Y para el cual todos los elementos del conjunto X tengan una imagen en Y, constituye un dominio de una función y se representa simbólicamente por $dom\, f$".

2) En el siguiente fragmento se da un concepto erróneo de rango de una función, identifique el error y reescriba el fragmento:

"Sea una función de variable real $f: X \mapsto Y$. El conjunto de los valores que se obtienen al evaluar los elementos del conjunto X constituye el rango de una función y además se representa simbólicamente por $rg\, f$ o Y".

3) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones para una función de variable real cualquiera $f: X \mapsto \mathbb{R}$

a) Si $x \in dom\, f$, entonces $f(x) \in rg\, f$
b) Si $x \in dom\, f$, entonces $f(x) \in dom\, f$
c) $(dom\, f) \cup (rg\, f) = \mathbb{R}$
d) $dom\, f \subseteq \mathbb{R}$
e) Si el conjunto de partida de una función son los números naturales, entonces $rg\ f \subseteq \mathbb{N}$.

4) Para las siguientes situaciones, identifique cuáles pueden ser representadas mediante una función y cuáles no. Adicionalmente, para las que haya identificado como funciones, determine la variable dependiente y una o más variables independientes, según el caso.

a) El tiempo de cocción de un alimento en un horno a temperatura constante.
b) La aceleración vertical de la pluma de un sismógrafo durante un terremoto.
c) El crecimiento poblacional con respecto al tiempo.
d) El tiempo de llenado de agua en un tanque ocasionado por las lluvias.
e) El consumo de energía eléctrica durante un día.

Scanned by CamScanner

5) Determine el dominio de las siguientes funciones de variable real:

a) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1+x}{1-x^2}$

b) $g(x)=\sqrt{x}+2$

c) $i(x)=\sqrt{x+\pi}$

d) $f(\theta)=\sqrt[3]{2\theta-1}$

e) $f(u)=\frac{u+1}{1+\frac{1}{u+1}}$

f) $f(p)=\sqrt{2-\sqrt{p}}$

g) $g(t)=\sqrt{3-t}-\sqrt{2+t}$

h) $j(x)=|x|+x$

6) Determine el rango de la siguiente función: $f(x)=x^2+2x+5,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

7) Existen múltiples situaciones físicas en las cuales los dominios de los modelos representados por funciones son delimitados mayoritariamente por el fenómeno físico, antes que por el fundamento matemático. A continuación, se propondrán varias situaciones físicas y sus representaciones matemáticas:

a) La posición X de una partícula en movimiento con relación al tiempo t, dada por $X(t)=3t^2+2t-1$.

b) La potencia de un motor P en función de la velocidad angular ω y torque constante T dada por $P=T\omega$.

c) La cantidad de energía cinética K que tiene un cuerpo de masa m en movimiento $K=\frac{1}{2}mv^2$, donde v representa la velocidad.

d) La distribución de temperatura T en una pared, $T(x)=x^2-2x+1$, siendo x la posición en cualquier punto de la pared.

En relación a cada situación planteada, realice lo siguiente:

I) Plantee el dominio de la función de manera física.

II) Determine matemáticamente el dominio y verifique que en algunos casos ambos dominios no coinciden. ¿Es posible concluir que estas ciencias no están relacionadas?

III) Identifique la variable dependiente (VD) e independiente (VI) de cada función.

8) La función $f(x)=\sqrt[4]{|x^2+3x+1|+1}$ está definida para todo número real.

a) Verdadero b) Falso

9) Califique como verdadera o falsa la siguiente proposición. En caso de ser verdadera, demuéstrela; en caso de ser falsa, proponga un contraejemplo:

"Si $dom\, f=\mathbb{R}$, entonces $rg\, f=\mathbb{R}$, $\forall f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$"

Scanned by CamScanner

10) Considere las funciones de variable real f, g, h y obtenga lo indicado en los siguientes literales:

$$f(x)=\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{\frac{x+x^2}{|x+1|}}}$$

$$g(x)=\sqrt{x^2+|x|}$$

$$h(x)=\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}}$$

a) $dom\, f \cap rg\, g$
b) $dom\, f \cup dom\, g$
c) $dom\, h \cap dom\, g$

4.2 Representación gráfica de funciones ● ● ● ● ●

11) En el siguiente fragmento se da un concepto erróneo de la gráfica de una función, identifique el error y reescriba el fragmento.

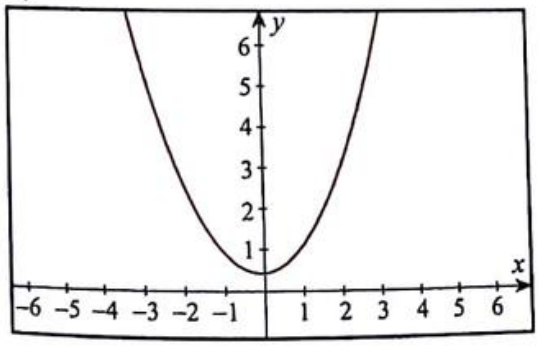
"Si f es una función de variable real de A en B, entonces la gráfica de f es el conjunto de puntos o pares ordenados de B x A, tales que sus coordenadas (x, y) pertenecen a f".

12) En el siguiente fragmento se da un criterio erróneo sobre la gráfica de una función, identifique el error y reescriba el fragmento.

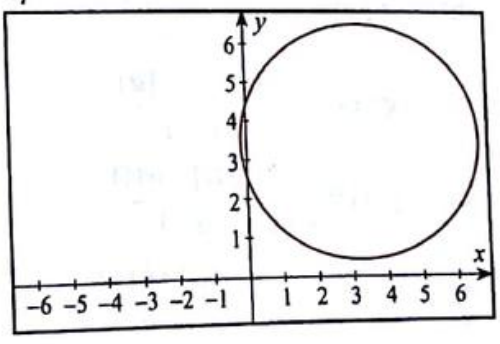
"Una curva en el plano cartesiano representa una función, si cualquier recta horizontal interseca la gráfica como máximo en un punto"

13) Dadas las siguientes gráficas, identifique cuáles no son funciones y cuáles sí lo son:

a)

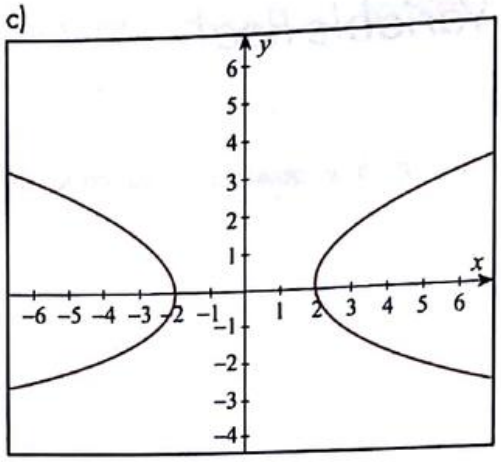


b)

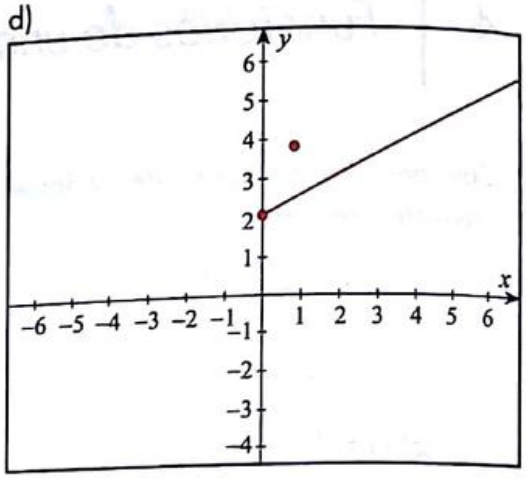


Scanned by CamScanner

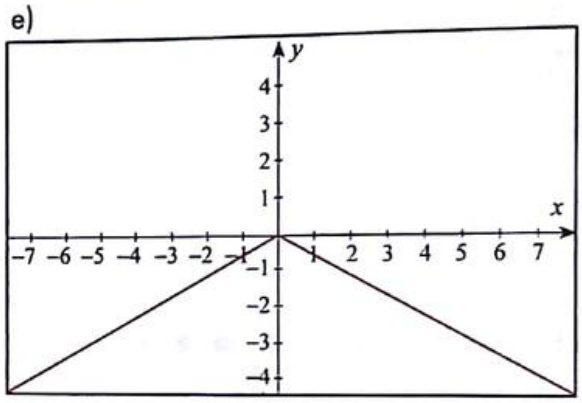
c)



d)



e)



14) Empleando una tabla de valores, grafique las siguientes funciones de variable real para el dominio dado, especificando en cada literal una escala adecuada para los ejes coordenados. Utilice un software graficador para comprobar sus respuestas.

a) $f(x) = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$
b) $g(x) = x^3 - 2, x \in \mathbb{R}$
c) $h(x) = x^2 + 1, x \geq 0$
d) $i(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$
e) $m(x) = \sqrt{-x}, x \leq 0$

15) Obtenga lo requerido en cada literal y exprese su resultado en forma simplificada:

a) $f(x) = 4 + 3x - x^2, \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

b) $f(x) = x^3, \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

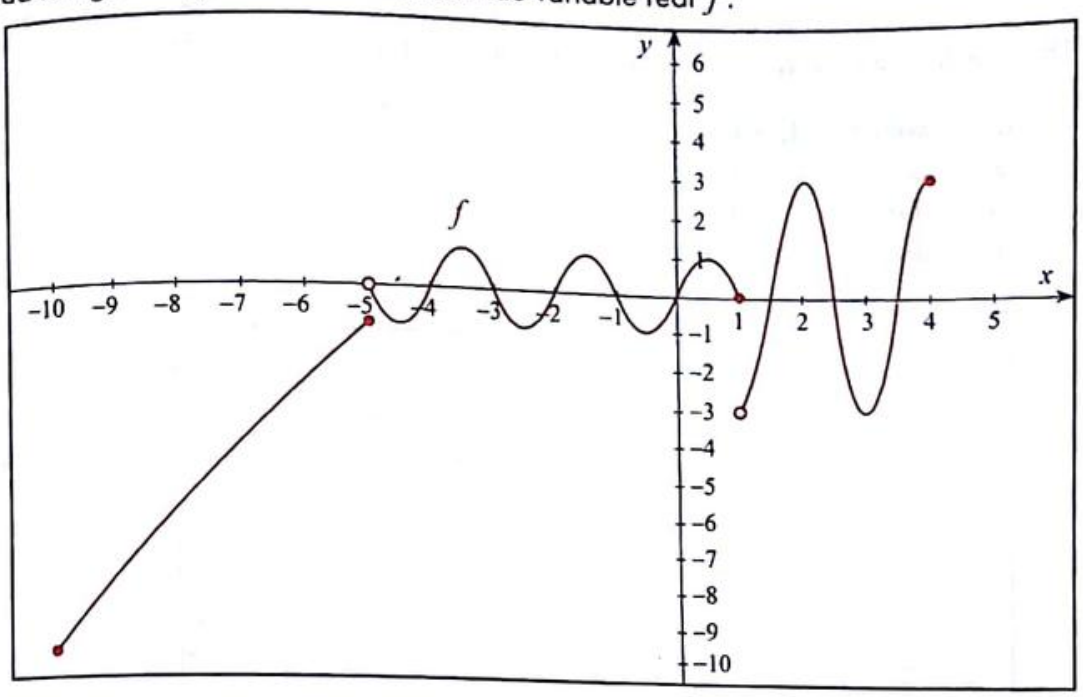
c) $g(x) = \dfrac{1}{x}, \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$

d) $g(t) = \dfrac{t+3}{t+1}, \dfrac{g(t) - g(1)}{t - 1}$

e) $h(x) = x + |x|, \dfrac{h(x) - h(a)}{x - a}, a > 0$

Scanned by CamScanner

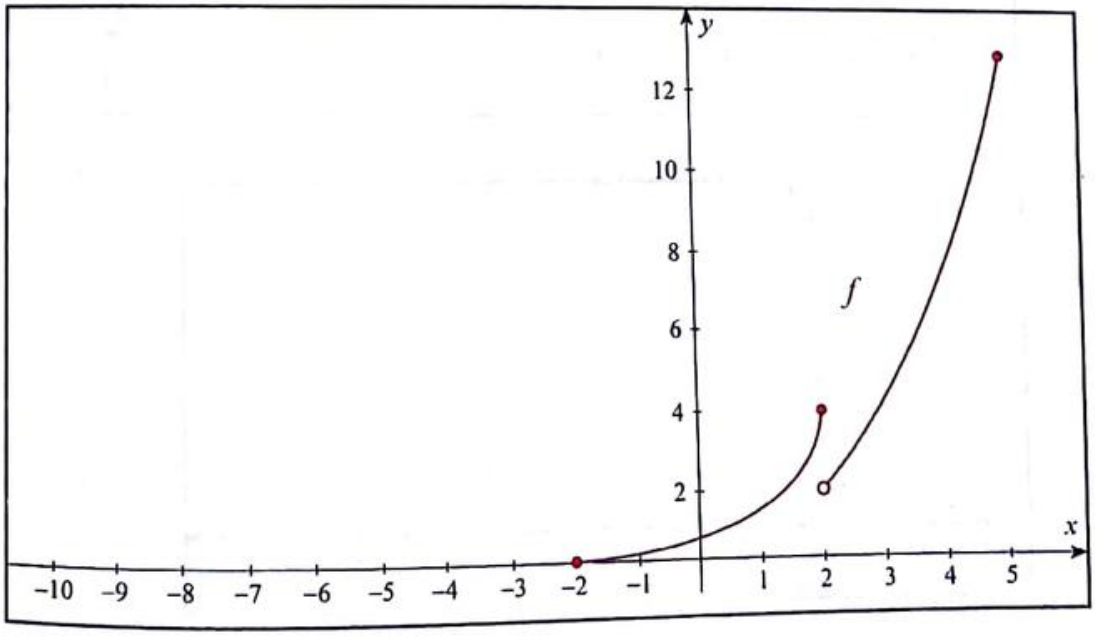
16) Dada la siguiente gráfica de una función de variable real f:



Determine:

a) $dom\, f$
b) $rg\, f$
c) $f(-5)+f(0)+f(1)$
d) $Ap(x)$ si $Re=\mathbb{R}$, $p(x)$: $f(x)=0$
e) $Aq(x)$ si $Re=\mathbb{R}$, $q(x)$: $f(x)\geq 8$

17) Sea $f: X \mapsto Y$ una función de variable real, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones con respecto a la gráfica de f:



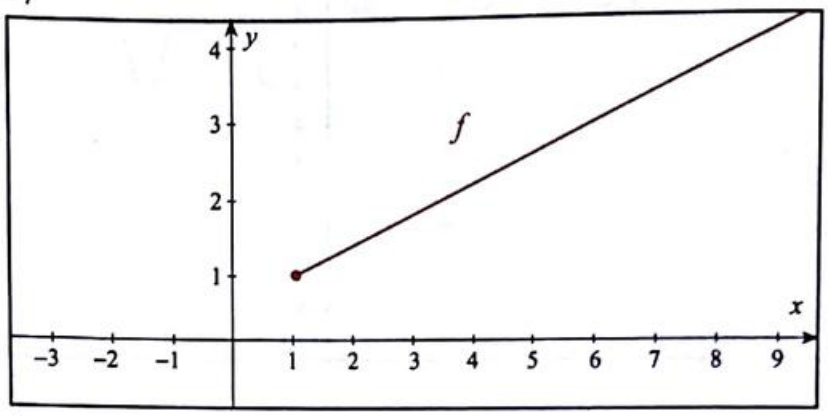
Scanned by CamScanner

a) $\forall x \in dom\, f,\ f(x) \leq 0$
b) Si $f(0) \geq 0$, entonces $f(2) \geq 2$
c) $f(-2) + f(2) = 4$
d) $dom\, f = [-2, 5]$
e) $rg\, f = [0, +\infty)$

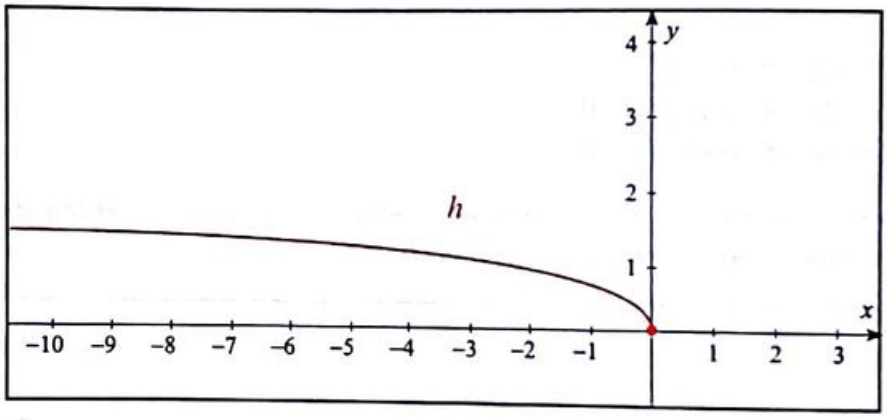
18) Identifique la proposición falsa con base en las gráficas mostradas:

a) $dom\, f = [1, +\infty)$
b) $dom\, g = [2, 5]$
c) $dom\, h = (-\infty, 0]$
d) $dom\, i = \{1, 2\} \cup [3, 5]$

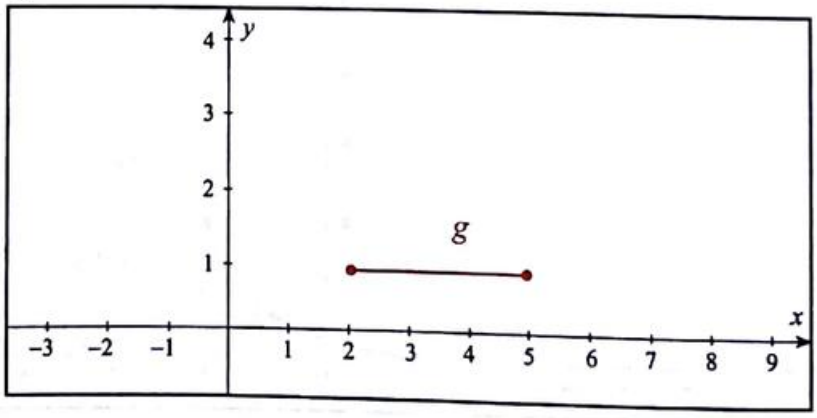
a)



b)

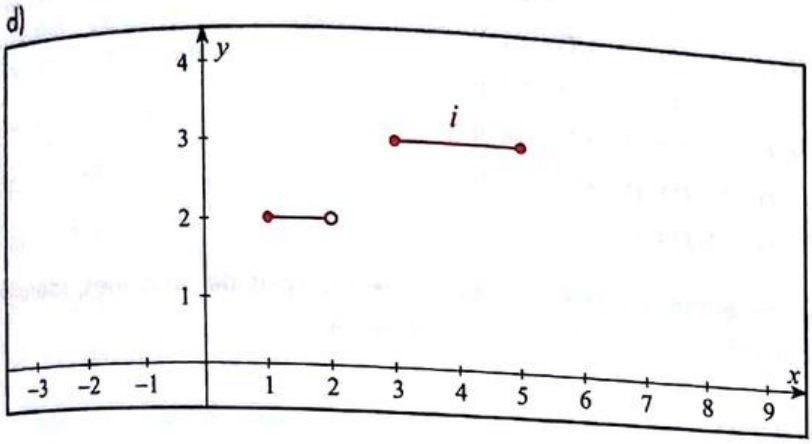


c)



Scanned by CamScanner

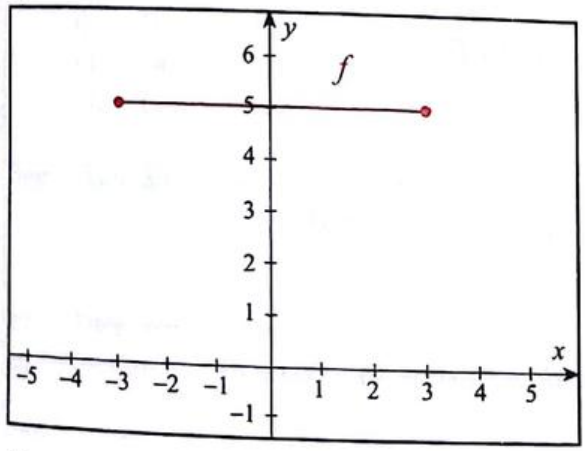
d)



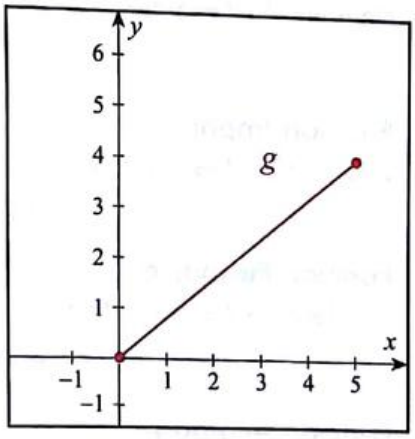
19) Identifique la proposición falsa con base en las gráficas mostradas:

a) $rg\, f = \{5\}$
b) $rg\, g = [0, 4]$
c) $rg\, h = \{1, 2\}$
d) $rg\, m = [1, 2] \cup [3, 5]$

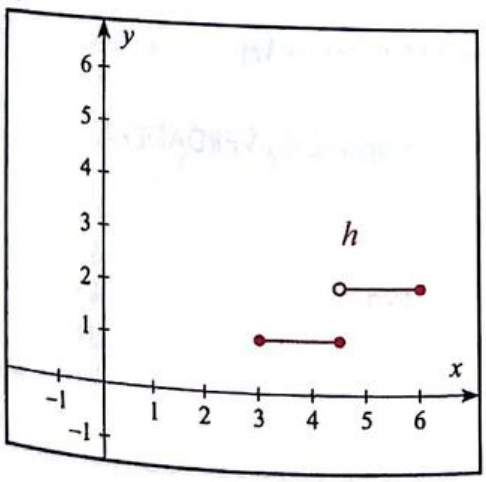
a)



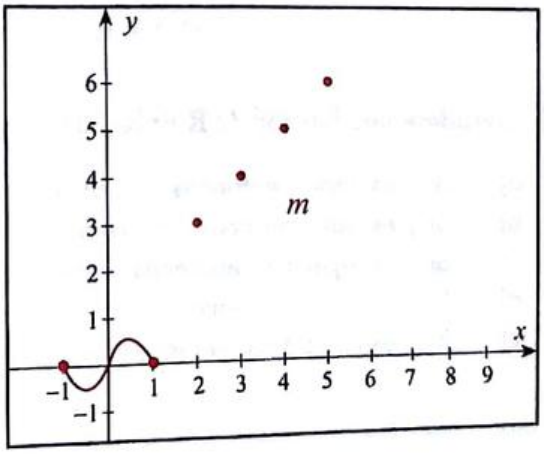
b)



c)



d)



Scanned by CamScanner

4.3 Tipos de Funciones ● ● ● ● ●

20) Sea X el dominio de una función f de variable real e I un intervalo de dicho dominio. Identifique a qué tipo de función corresponde cada una de las siguientes definiciones:

a) $\forall x_1, x_2 \in X\,[(f(x_1)=f(x_2)) \rightarrow (x_1=x_2)]$
b) $\forall x_1, x_2 \in I\,[(f(x_1)>f(x_2)) \rightarrow (x_1 \geq x_2)]$
c) $\forall x_1, x_2 \in I\,[(f(x_1)\geq f(x_2)) \rightarrow (x_1 \geq x_2)]$
d) $\forall x_1, x_2 \in I\,[(f(x_1)<f(x_2)) \rightarrow (x_1 \geq x_2)]$
e) $\forall x_1, x_2 \in I\,[(f(x_1)\leq f(x_2)) \rightarrow (x_1 \geq x_2)]$

21) A continuación se presentan las definiciones de ciertos tipos de funciones, identifique cuál es errónea, corríjala; y, reescríbala correctamente.

Función Sobreyectiva:
Una función $f: X \mapsto Y$ es sobreyectiva si:

$$\forall y \in Y\ \exists! x \in X\,[y = f(x)]$$

Función Monótona:
Una función f es monótona en un intervalo I, si f es estrictamente creciente y estrictamente decreciente en ese intervalo.

Función Par:
Una función f es par si:

$$\exists x \in dom\, f\,[f(-x)=f(x)]$$

Función Impar:
Una función f es impar si:

$$\forall x \in dom\, f\,[f(-x) = -f(x)]$$

Función Periódica:
Una función f es periódica si:

$$\exists T \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in dom\, f\,[f(x+T)=f(x)+T]$$

Función Acotada:
Una función f es acotada si:

$$\exists M, N \in \mathbb{R}\ \forall x \in dom\, f\,[N \leq f(x) \leq M]$$

22) Considere una función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, identifique la proposición VERDADERA.

a) Si f es impar, entonces f no es acotada.
b) Si f es par, entonces f no es inyectiva.
c) Si f es inyectiva, entonces f no es sobreyectiva.
d) Si f es inyectiva, entonces f es sobreyectiva.
e) Si f es periódica, entonces f es acotada.

Scanned by CamScanner

23) Aplicando las definiciones, determine si las siguientes funciones son pares, impares, o no cumplen con estas características.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $g(x) = x^2 + \frac{3}{x}$

c) $h(x) = \frac{2x+3}{1+\sqrt{x+1}}$

d) $i(x) = 2$

e) $m(x) = x^3$

Utilice un software graficador para comprobar sus respuestas.

24) Sea la función de variable real f: $\{1, 2, 3\} \mapsto Y$, definida por:

$$f(x) = x! - 1$$

a) Grafique la función especificada, construyendo una tabla de valores.
b) Determine el conjunto Y para que la función sea sobreyectiva.
c) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta:
   I) f es estrictamente creciente.
   II) f es par.
   III) f es acotada.

25) Sea la función f: $Z \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(z) = \sqrt{1 - \frac{2}{1+z}}$$

a) Determine el dominio de la función.
b) Siendo $p(z)$: $f(z) = 0$, determine $Ap(z)$. Considere $Re = \mathbb{R}$.
c) Determine si f es par o impar.
d) Analice la periodicidad de f.
e) Determine si f es inyectiva.
f) Demuestre que f es creciente.

26) Sabiendo que la función de variable real f es inyectiva y que además $f(9) = 2a$, $f(a-2) = 3$ y $f(5) = 3$, el valor de $f(a+2)$ es:

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

Scanned by CamScanner

27) Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ impar, estrictamente creciente; y, g es una función tal que $g(x) = f(x)$, entonces el valor $\frac{2g(4)+3f(4)}{-f(-4)+4g(-4)}$, siendo $f(4) \neq 0$, es:

a) $\frac{5}{3}$

b) $-\frac{5}{2}$

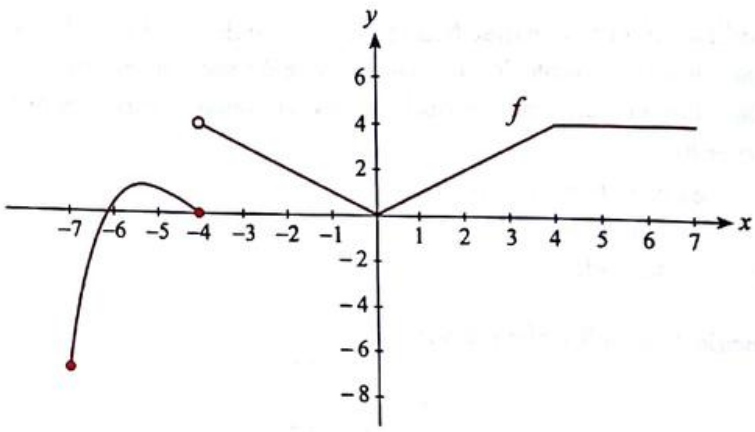
c) $-\frac{5}{3}$

d) 1

e) -1

28) Demuestre que la función de variable real $f(x) = kx + b$, $\forall b \in \mathbb{R}$, es estrictamente creciente para $k > 0$ y es estrictamente decreciente para $k < 0$.

29) Dada la gráfica de la función f mostrada a continuación:



Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) f es par.
b) f es inyectiva y f no es impar.
c) $f(-7) = -7$
d) f es creciente en el intervalo $(-7, -4]$.
e) f es acotada.

30) Bosqueje la gráfica de una función f que cumpla con las condiciones descritas a continuación:

- La función f es par.
- La función f es estrictamente decreciente $\forall x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1]$.
- $dom\, f = \mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

4.4 Funciones Lineales ● ● ● ● ●

31) Dada la regla de correspondencia $f(x) = -ax + 3;\ \forall a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es VERDAD que:

a) La función es creciente.
b) La función interseca el eje Y en $(-a, 3)$.
c) Una forma alternativa de representar esta función lineal es: $y + 3 + ax = 0$.
d) Si $a = 0$, entonces la función no es lineal.
e) $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}\ \exists\ m, n \in dom\, f$ tal que $f(m)f(n) < 0$.

32) Considere las siguientes funciones de variable real:

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 1;\ g(x) = 2;\ h(x) = -2x + a,\ \forall a \in \mathbb{N}$$

Entonces es falso que:

a) f es creciente o h es decreciente.
b) $f(0) + g(0) + h(a) = 3 - a$
c) Si f es par, entonces g es impar.
d) $[dom\, f \cap dom\, g \cap dom\, h\,] = \mathbb{R}$
e) $\forall x \in \mathbb{R}$, si f crece, entonces g crece y decrece pero h no decrece.

33) Dadas las siguientes condiciones sobre f:

I) f es lineal.
II) f es una función estrictamente creciente.
III) $P_1(1, \pi) \in f$
IV) El punto de intersección entre f y $g(x) = mx,\ \forall m \in \mathbb{R}$ es $P_2(-2, -1)$.

a) Determine la regla de correspondencia de las funciones f y g.
b) Grafique ambas funciones en un mismo plano. Compruebe su respuesta con un software de graficación.

34) Al administrar x *ml* de cloroformo se puede dormir a una persona h horas. Esta relación se rige por la ecuación $5h - 40 = 4x$. Determine el dominio, rango y la gráfica de la función de variable real h, suponiendo que la dosis máxima diaria es de 8 *ml*.

35) La distribución de temperatura en el espesor de una pared está dada por la ecuación:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

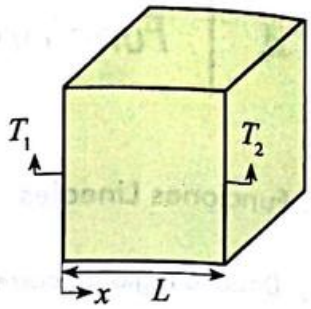
donde T_1 es la temperatura a la cual está expuesto un lado de la pared y T_2 es la temperatura al otro lado de la pared; mientras que L es el espesor de la pared y x es la distancia variable con valores desde 0 hasta L, tal como se muestra en la figura:

Scanned by CamScanner

a) Si T_1 es 100°C y T_2 es 45°C, determine la temperatura a la mitad de la pared.

b) Grafique la distribución de temperaturas para las condiciones planteadas.

c) Complete la tabla y grafique en un mismo plano las funciones T para cada conjunto de condiciones indicadas.



Esquema de la pared.

	T_1 (°C)	T_2 (°C)	L (m)	$T(x)$
1	0	50	0.50	
2	40	70	1	
3	100	90	2	

36) Vanessa quiere alquilar un lugar para la recepción de su boda y le dan dos posibilidades:

a) La alcaldía le cobrará \$20 por el uso de un salón comunal más \$5 por huésped.

I) Complete la siguiente tabla correspondiente a los cargos de la alcaldía.

Número de huéspedes (N)	10	30	50	70	90
Cargos (C_A) en \$					

II) Usando escalas adecuadas, dibuje una gráfica que muestre los cargos respecto al número de huéspedes. Considere el eje horizontal para el número de huéspedes y el eje vertical para los cargos.

III) Escriba una expresión para C_A, en función de N, que pueda usar la alcaldía para calcular sus cargos.

b) Un hotel local calcula sus cargos para el uso de su sala de congresos usando la siguiente expresión:

$$C_H = \frac{5N}{2} + 500$$

En la que C_H es el cargo en \$ y N el número de huéspedes.

I) Complete la siguiente tabla de los cargos impuestos por el hotel.

Número de huéspedes (N)	10	30	50	70	90
Cargos (C_H) en \$					

II) En el mismo plano cartesiano usado en el apartado a) II), dibuje la gráfica de C_H.

Con la información anterior, discuta la mejor opción para Vanessa.

Scanned by CamScanner

Para los siguientes cuatro ejercicios utilice adicionalmente un software de graficación para verificar sus respuestas.

37) La actividad física produce a largo plazo un aumento del peso del hígado y volumen del corazón. Suponga que se tiene un hígado de 280 gramos cuyo volumen cardiaco correspondiente es de 850 ml, y que para un hígado de 350 gramos el volumen cardiaco es de 990 ml. Si existe una relación lineal entre la masa hepática (m) y el volumen (V) del corazón, determine la función del volumen cardiaco en términos de la masa hepática.

38) Investigaciones cardiovasculares han mostrado que a un nivel de colesterol superior a 210, cada aumento del 1% por encima de este nivel aumenta el riesgo en un 2%. Se encontró que para un grupo de edad particular el riesgo coronario en un nivel de 210 de colesterol es de 0.160 y a un nivel de 231 el riesgo es de 0.192.

a) Determine una función lineal que exprese el riesgo R en términos del nivel de colesterol C.

b) ¿Cuál es el riesgo para un nivel de colesterol de 260?

39) La regla de Cowling es un método para calcular dosis pediátricas. Si a denota la dosis para un adulto (en mg) y t es la edad del niño (en años), entonces la dosis infantil está dada por:

$$D(t)=\left(\frac{t+1}{24}\right)a$$

a) Grafique la función para distintos valores de a.

b) ¿Cómo influye este valor de a en el comportamiento de la función D?

c) Si la dosis de un adulto es de 500 mg, ¿cuál es la edad de un niño cuya dosis pediátrica alcanza los 125 mg?

40) Suponga que para un producto cuyo precio y cantidad de unidades son p y q, respectivamente, las ecuaciones de demanda y oferta son:

$$p=-\left(\frac{1}{180}\right)q+12 \quad \text{y} \quad p=\left(\frac{1}{300}\right)q+8$$

Determine gráfica y analíticamente el punto de equilibrio de mercado e interprete los resultados.

Nota: El punto de equilibrio se genera cuando la demanda iguala a la oferta.

4.5 Funciones Cuadráticas ● ● ● ● ●

41) Demuestre que las raíces de la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ están dadas por:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Scanned by CamScanner

42) Demuestre que la suma de las raíces de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ está dada por:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

43) Demuestre que el producto de las raíces de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ está dado por:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

44) Sea f la función cuadrática definida de $\mathbf{R}$ en Y cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = (x+5)(x-1)$$

a) Determine cuál es el eje de simetría de la gráfica de f.
b) Determine cuál debe ser el conjunto Y para que la función f sea sobreyectiva.

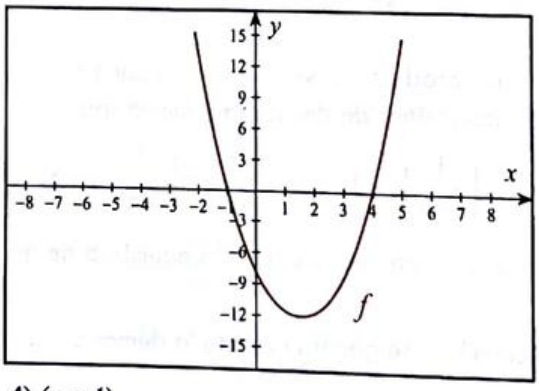
45) Dada la función de variable real $f(x) = 2x^2 + x + k$. Determine los valores de k para que la gráfica de f no tenga intersecciones con el eje X. Considerando la regla de correspondencia de f y si $k = 2$, determine $rg\, f$.

46) Determine la regla de correspondencia de una función f que cumpla con las siguientes características:

- f es cuadrática.
- f es cóncava hacia arriba.
- Eje de simetría de la gráfica: $x = -\frac{2}{3}$
- $y = h(x)$ es una función lineal que contiene al punto $P(1, 1)$ y a uno de los ceros de la función f; y, la imagen correspondiente al intercepto que tiene h con el eje de simetría, es 4.

Compruebe su respuesta con un software de graficación.

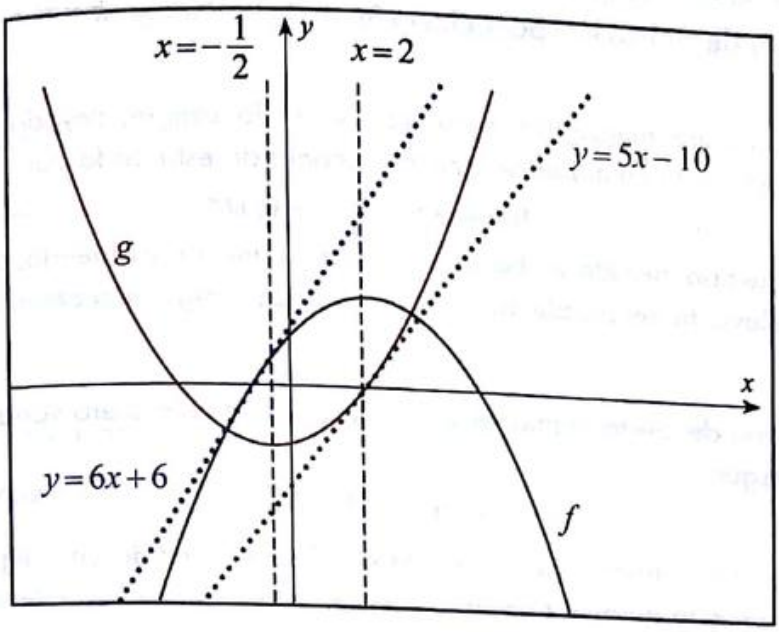
47) Dada la gráfica de la función cuadrática f, determine la proposición verdadera:



a) $f(x) = (x-4)(x+1)$
b) f es monótona en todo su dominio.
c) El mínimo valor de la función es $y = -12$.
d) Si $g(x) = f\left(x + \frac{3}{2}\right)$, $g(x)$ es impar.
e) f es sobreyectiva.

Scanned by CamScanner

48) Dado un plano cartesiano con varias gráficas:



Determine la forma factorizada de la regla de correspondencia de las funciones cuadráticas f y g, suponiendo que $|a|=1$.

Utilice un software de graficación para comprobar su respuesta.

49) Sea $f(x)=ax^2+bx+c,\ \forall a,\ b,\ c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0$ una función cuadrática que satisface las siguientes condiciones:

- $\forall x\in\mathbb{R}, f(x-4)=f(2-x)\wedge f(x)\geq x$
- $\forall x\in(0,2),\ f(x)\leq\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$
- El mínimo valor de $f(x)$ es 0.

Determine la regla de correspondencia de f.

50) La temperatura T (medida en grados Celsius), que experimenta cierto cultivo de bacterias, varía de acuerdo a:

$$T(x)=-(x-2)^2+1$$

donde x, representa el tiempo en minutos de exposición a fuentes de energía calórica.

a) Señale el intervalo de tiempo en que la temperatura del cultivo se mantiene positiva.
b) Determine después de cuánto tiempo la temperatura es máxima.
c) Realice la gráfica de la función y proporcione una interpretación en el contexto del problema.

Scanned by CamScanner

51) El efecto de la anestesia bucal en un paciente (en porcentaje), luego de t minutos de ser inyectado el fármaco, es modelado por la función:

$$G(t) = -\frac{25t^2}{16} + 25t$$

a) ¿En qué instante se produce el grado máximo de adormecimiento?
b) ¿Después de cuánto tiempo no hay efecto de la anestesia?

52) En una prueba para metabolismo de azúcar en la sangre, llevada a cabo en un intervalo de tiempo, la cantidad de azúcar encontrada está dada por:

$$A(t) = 3.9 + 0.2t - 0.1t^2$$

donde t es el tiempo medido en horas. Grafique la función y obtenga, a partir de ella, información relevante del problema (dominio, vértice, rango, monotonía, ceros y eje de simetría).

53) La concentración de cierto calmante suministrado mediante suero varía su efectividad en el tiempo según:

$$C(t) = -t^2 + 6t$$

donde C es la concentración del calmante en el suero medida en miligramos por litro para que haga efecto durante t horas.

a) ¿En qué instante la concentración es de 8 miligramos por litro?
b) Grafique la función e interprete los resultados en el contexto del problema.

54) Los biólogos determinaron que la velocidad de la sangre en una arteria es una función de la distancia de la sangre al eje central de la arteria. De acuerdo con la ley de Poiseuille, la velocidad (en centímetros por segundos) de la sangre que está a r centímetros del eje central de una arteria está dada por la función:

$$S(r) = C(R^2 - r^2)$$

donde C es una constante y R el radio de la arteria. Suponiendo que para cierta arteria, $C = 1.76 \times 10^5$ y $R = 1.2 \times 10^{-2}$ centímetros.

a) Calcule la velocidad de la sangre en el eje central de esta arteria.
b) Calcule la velocidad de la sangre en la pared arterial.

4.6 Funciones definidas por tramos ● ● ● ● ●

55) Considere la función h de variable real definida por $h(x) = \begin{cases} 4 + 2x, & -2 \le x \le 0 \\ 4 - 2x, & 0 < x \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$

Entonces, $\dfrac{h(-3) + h(0)\, h(5) + h\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{h(1) + h(1)\, h(\pi) + h(e)} = 0.$

a) Verdadero b) Falso

Scanned by CamScanner

56) Sean f y g funciones de variable real, tales que:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\geq 2\\ x^2+3, & x\in(-\infty,2)\end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases}3, & x\geq 2\\ 1-x, & x\in(0,2)\\ 4x, & x\in(-\infty,0]\end{cases}$$

a) Determine el rango de f b) Determine el rango de g.

57) Sea f la función de variable real definida por tramos:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<-1\\ -2, & -1\leq x<3\\ 2-x, & x\geq 3\end{cases}$$

a) Evalúe la función y obtenga el resultado numérico de: $\dfrac{2f(1)-f(-2)}{f(3)}$

b) Bosqueje la gráfica de la función f.

58) Dada la función de variable real, tal que $f(x)=\begin{cases}x, & x\geq 2\\ x^2-2, & -2<x<2\\ -x, & x\leq -2\end{cases}$, identifique la proposición verdadera.

a) La función es impar.
b) La función es inyectiva.
c) La función es par.
d) La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$.
e) La función es decreciente en el intervalo $[0, +\infty)$.

59) Sea la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x)=\begin{cases}x^2+3, & x<0\\ 2\pi, & x=0\\ 9-x^2, & x>0\end{cases}$, es cierto que:

a) f es inyectiva.
b) f es sobreyectiva.
c) f es par.
d) f es periódica.
e) f es acotada.

60) Dada la función de variable real cuya regla de correspondencia es:

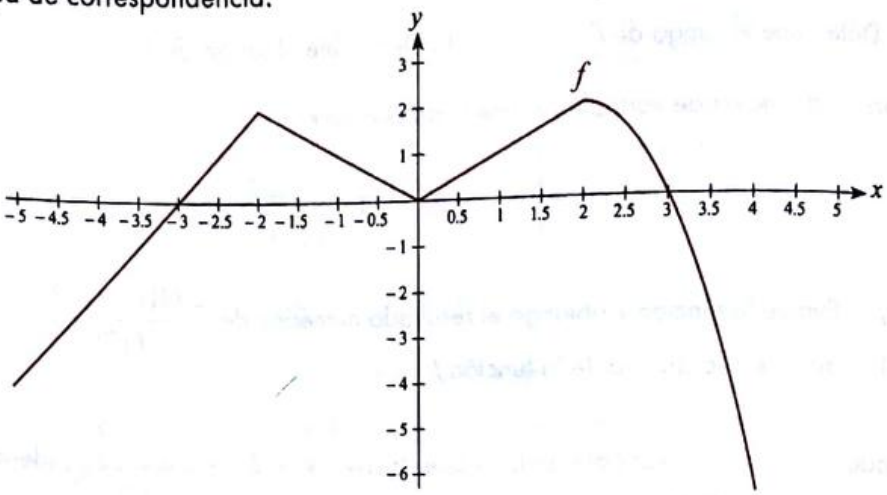
$$f(x)=\begin{cases}3, & x<-5\\ -x-2, & -5\leq x<-2\\ x+2, & -2\leq x\leq 0\\ x^2, & 0<x<2\\ 1, & x\geq 2\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Su rango está dado por:

a) $rg\,f = (0, 4)$
b) $rg\,f = [0, 4)$
c) $rg\,f = [0, 1] \cup [2, 4]$
d) $rg\,f = (0, 3]$
e) $rg\,f = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$

61) Dada la siguiente gráfica de una función de variable real f, determine una posible regla de correspondencia:



Compruebe su respuesta con un software graficador.

62) El costo en dólares C y el peso g (en gramos) de cierto material están relacionados de acuerdo a la siguiente función por tramos:

$$C(g) = \begin{cases} 3.00\,g, & 0 \le g < 20 \\ 2.50\,g + 10.00, & 20 \le g < 40 \\ 2.00\,g + 30, & 40 \le g \le 400 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el costo para 10 g de este material?
b) ¿Cuál es el costo para 25 g del mismo material?
c) Grafique el costo en función del peso del material.

63) Se define la función $f: [-3, 6] \mapsto [0, 5] \cup \{6\}$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \in [-3, -2) \cup (2, 3) \\ -x^2 + 4, & -2 \le x \le 2 \\ 6, & 3 \le x \le 6 \end{cases}$$

Entonces es verdad que:

a) f es inyectiva y sobreyectiva.
b) f es par.
c) $f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 4f(6)$
d) $f(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
e) $\exists! c \in \mathbb{R} / f(c) = c$

Scanned by CamScanner

64) Una Institución de Educación Superior (IES), de acuerdo al mérito académico de sus graduados y como estímulo para la superación permanente de los mismos, concederá reconocimientos al primer, segundo y tercer lugar. Para tal efecto a cada graduado se le calculará el Índice del Mérito de Graduación (IMG), de acuerdo a:

$$IMG = \begin{cases} p_i, & z_i \le t_i + 0.50 \\ 0.9\,p_i, & t_i + 0.50 < z_i \le t_i + 1.00 \\ 0.8\,p_i, & t_i + 1.00 < z_i \le t_i + 1.50 \\ 0.7\,p_i, & t_i + 1.50 < z_i \le t_i + 2.00 \\ 0, & z_i > t_i + 2.00 \end{cases}$$

Donde:

- t_i: es el tiempo de duración oficial de la carrera i.
- z_i: es el tiempo que transcurrió entre que el graduado i ingresó a la IES y la fecha de su graduación.
- p_i: corresponde al promedio de las calificaciones de materias tomadas u homologadas por el graduado.

Si se establece la siguiente tabla de los mejores alumnos de la IES, ordénelos de primer a tercer lugar.

i	Carrera	t_i	z_i	p_i
1	Biología Marina	5 años	7 años	9.80
2	Ing. en Petróleo	6 años	6 años	8.90
3	Ing. Mecánica	5 años	6 años	8.90
4	Ing. Ambiental	5 años	7 años	9

4.7 Funciones Especiales ● ● ● • •

65) Sea la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sgn(x-2)$, entonces es VERDAD que:

a) f es par.
b) f es inyectiva.
c) f es sobreyectiva.
d) $N(rg\,f) = 3$
e) f es continua.

Scanned by CamScanner

66) Dada la función de variable real $g(x) = [\![-x]\!]$ entonces es falso que:

a) g es discontinua.
b) $g(-3.1) = 3$
c) $dom\ g = \mathbb{R}$
d) $rg\ g = \mathbb{R}$
e) g es decreciente.

67) Sea la función h: $[1, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \mu(x)$ determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $rg\ h = \{0, 1\}$
b) h es par.
c) h no es periódica.
d) h es sobreyectiva.
e) $h(1) + h(2) + h(3) + h(4) + \ldots + h(n) = n$

68) Considere $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$, la función f y el predicado $p(x)$:

$$f(x) = x^2 sgn\ (\pi) - 4|x| + \frac{3}{\mu(34!)}$$

$$p(x): f(x) = 0!$$

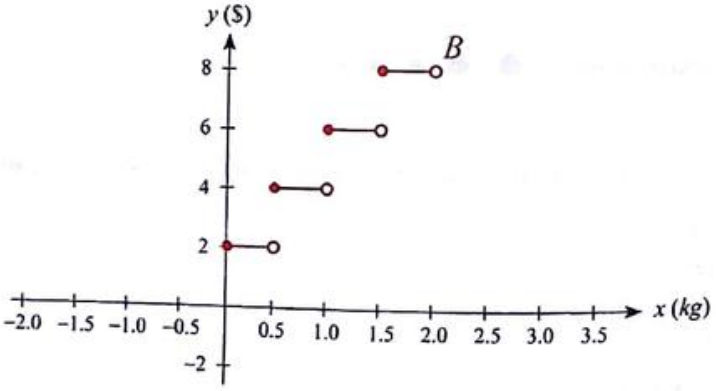
Determine:

a) $dom\ f$ y $Ap(x)$.
b) $rg\ f$
c) Los valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$.

69) Miriam desea enviar un paquete a Madrid desde la oficina de correos, teniendo para ello dos opciones. La **Opción** A contiene un cargo fijo por enviar el paquete, más un costo que depende del peso del paquete, los cuales se expresan por la ecuación $A(x) = 6 + 3x$, donde x es el peso del paquete en kg y A es el costo total de enviar el paquete expresado en $ (dólares estadounidenses).

a) ¿De cuánto es el cargo fijo por enviar un paquete según la **Opción** A?
b) ¿Cuánto costaría enviar un paquete que pesa 2.4 kg según la **Opción** A?
c) El costo de la **Opción** B en $ se muestra parcialmente en la siguiente gráfica.

El peso en kg está representado por la variable x.



Scanned by CamScanner

La función $B(x)$ puede definirse para valores de x entre 0 y 1 kg como sigue:

$$B(x)=\begin{cases}2 \text{ para} & 0\le x<0.5\\ 4 \text{ para} & 0.5\le x<1\end{cases}$$

Para pesos mayores de 1 kg, el costo se sigue incrementando en intervalos de \$2, siguiendo el mismo modelo que para pesos inferiores. Defina $B(x)$ para pesos entre 2 y 3 kg, escribiendo su respuesta según el siguiente esquema:

$$B(x)=\begin{cases}\dots \text{ para } \dots\\ \dots \text{ para } \dots\end{cases}$$

d) Plantee, utilizando una de las funciones especiales, el comportamiento del costo para $x\ge 0$ de la **Opción** B.
e) Determine el costo de enviar un paquete que pesa 1.6 kg usando la **Opción** B.
f) Si a Miriam le costó \$22.50 enviar por correo un paquete usando la **Opción** A, ¿cuánto pesaba este paquete?
g) ¿Cuánto le costaría enviar por correo este mismo paquete con la **Opción** B?
h) Determine un peso (x entero distinto de cero) para el cual el costo de ambas opciones sea el mismo. Determine este costo.

70) Sean las funciones de variable real, tales que:

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le -2\\ |x|+2, & -2<x\le 1\\ 2\,sgn\,(x), & x>1\end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases}1-|x|, & x\le 0\\ x^2+x, & 0<x\le 2\\ 4, & x>2\end{cases}$$

Entonces $\dfrac{g(4)-2g(0)+f(1)}{f(4)g(4)}$ es igual a:

a) $\dfrac{5}{8}$

b) -1

c) $-\dfrac{3}{4}$

d) $\dfrac{1}{3}$

e) $\dfrac{2}{3}$

71) Sea la función $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1-x^{1+sgn(x)}$, entonces es VERDAD que:

a) f es monótona en todo su dominio.
b) f es impar.
c) f es inyectiva.
d) f es acotada superiormente.
e) $rg\,f=(-\infty,1)$

Scanned by CamScanner

72) Sea la función $\psi : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{R}$ definida por $\psi(x) = |x^{2\,sgn(x!)} - 1|$.

a) Determine si la función es continua en $(1, +\infty)$.
b) Analice la periodicidad de la función.
c) Establezca si la función es par o impar.
d) Determine el rango de la función.
e) Calcule el valor de la siguiente suma: $\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \psi(4) + \ldots + \psi(100)$.

73) Sobre $S = \mathbf{N}$ se define la siguiente operación binaria $*$:

$$\forall a, b \in S \left(a*b = sgn(a) + [\![b]\!]\right)$$

Determine:

a) Si la operación es binaria interna.
b) De ser posible, el neutro de la operación.

74) Grafique las siguientes funciones de variable real:

a) $f(x) = 2^{sgn(x)}$
b) $g(x) = x^{\mu(x)+1}$
c) $h(x) = [\![x]\!]^2$

4.8 Técnicas de Graficación de Funciones ● ● ● • •

75) Considere la gráfica de una función $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ e identifique la proposición VERDADERA.

a) La gráfica de la función $f(2 - x)$ consiste en un desplazamiento de 2 unidades hacia la izquierda, de la gráfica de f.
b) La gráfica de la función $f(2x) + c$ consiste en un desplazamiento de 2 unidades hacia abajo, de la gráfica de f.
c) La gráfica de la función $f(-x)$ consiste en una reflexión respecto al eje X, de la gráfica de f.
d) La gráfica de la función $f(-x)$ consiste en una reflexión de f respecto al eje Y, cuando $x > 0$, de la gráfica de f.
e) La gráfica de la función $f(kx)$ consiste en un alargamiento horizontal, cuando $0 < k < 1$, de la gráfica de f.

76) Considere una función lineal $f(x) = ax + b$, donde a y b son números reales, determine el valor de verdad de las proposiciones contenidas en los siguientes literales:

a) Si f es par, entonces $f(x - 2)$ también lo es.
b) Si $P(x_1, y_1) \in f$, entonces $P(x_1 + 2, y_1) \in f(x) + 2$.
c) Si f es sobreyectiva, entonces $f(3x)$ también lo es.
d) Si $P(0, 0) \in f$, entonces $P(0, 0) \in 5f(5x)$.
e) Si $dom\, f = \mathbf{R}$ y $g(x) = f(x \pm k)$, entonces $dom\, g = \mathbf{R}$; $\forall k \in \mathbf{R}$.

Scanned by CamScanner

77) Considere la función f cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$; $\forall a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) Si f es par, entonces $f(x-2)$ también lo es.

b) Si f es par, entonces $f(x)\pm k$, $\forall k\in\mathbb{R}$ también lo es.

c) Si f no es par y $-\frac{b}{2a}>0$, entonces $f\left(x-\frac{b}{2a}\right)$ es par.

d) Si f no es par y $-\frac{b}{2a}<0$, entonces $f\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ es par.

e) Si $\Delta=0$ y $f(2-x)=f(x-4)$, entonces $-\frac{b}{2a}=1$.

78) Si la función f es creciente en todo su dominio entonces la función $-f$ será también creciente en todo su dominio.

a) Verdadero b) Falso

79) Basándose en la función $f(x)=x^3$, escriba la nueva regla de correspondencia para una función que cumpla con cada una de las siguientes especificaciones:

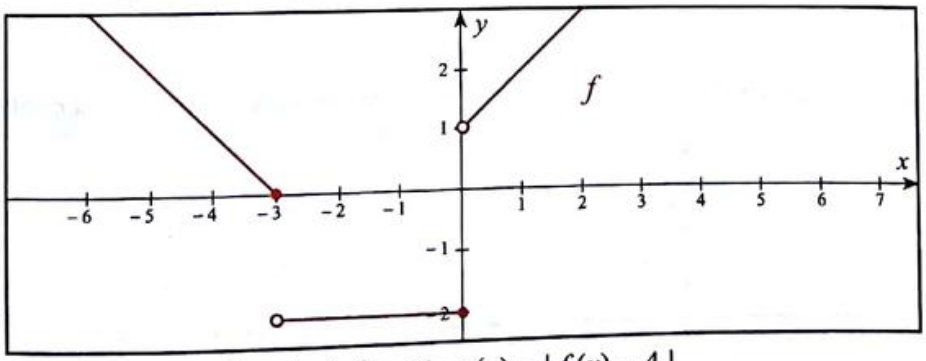
a) Desplazada a la derecha 4 unidades.
b) Reflejada con respecto al eje Y.
c) Reflejada respecto al eje X.
d) Alargada en forma vertical por un factor de 4.
e) Alargada en forma horizontal por un factor de 4.

80) Sea f la función de variable real definida por $f(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$. Considerando los nuevos dominios, bosqueje la gráfica de:

a) $f(x)$
b) $f(-x)$
c) $f(-|x|)$
d) $f(|2x|-2)$

Utilice un software graficador para verificar sus respuestas.

81) Dada la siguiente gráfica de una función de variable real f definida por tramos, determine su regla de correspondencia.

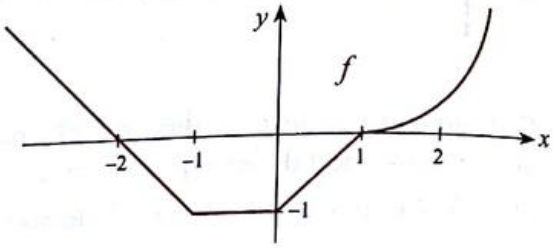


Luego, bosqueje la gráfica de la función $g(x)=|f(x)-4|$.

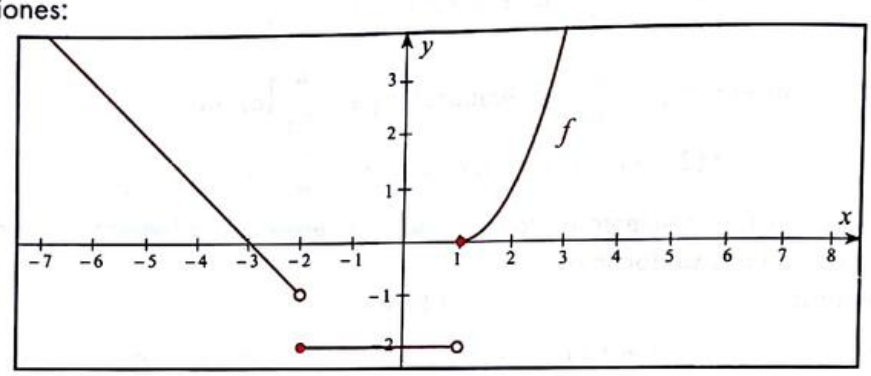
Scanned by CamScanner

82) Respecto a la gráfica de la función $y = f(x)$ que se adjunta, grafique:

a) $y = f(x+1) - 1$
b) $y = -2f(3-x)$
c) $y = |f(2x-4)| - 2$
d) $y = |f(-|x|)|$
e) $y = 1 - 2f(|x|)$



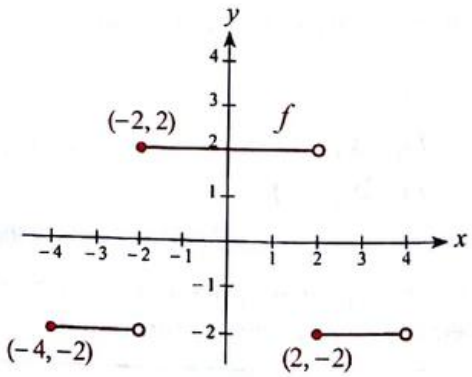
83) Dada la gráfica de la función de variable real f, bosqueje las gráficas de las nuevas funciones:



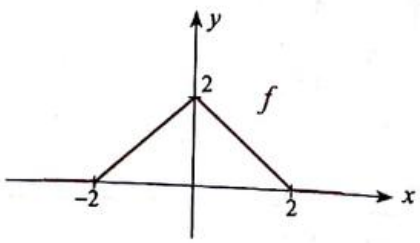
a) $g(x) = 2f(-x)$
b) $h(x) = |f(|x|)|$
c) $i(x) = |f(x-2)|$
d) $j(x) = 3f\left(\frac{x}{2}\right)$

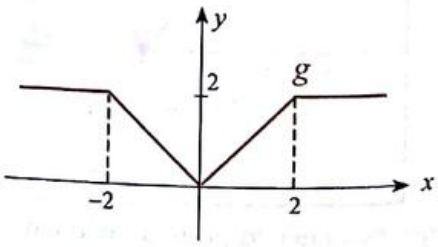
84) Utilice la gráfica de la función f que se muestra a continuación para bosquejar las nuevas funciones:

a) $g(x) = f(x) + 3$
b) $h(x) = f(-x)$
c) $i(x) = -f(x)$
d) $j(x) = f(x+2)$
e) $k(x) = \frac{1}{2}f(x)$



85) Sean las gráficas de las funciones f y g, respectivamente, mostradas a continuación:





Scanned by CamScanner

Entonces, la regla de correspondencia de g está dada por:

a) $g(x) = f(x)$
b) $g(x) = 4 - f(x)$
c) $g(x) = 2 - f(x-2)$
d) $g(x) = -f(x) + 2$
e) $g(x) = f(x+2) - 2$

86) Se tiene la función $f(x)$ la cual está definida en $\mathbb{R}$. Si se conoce que:

I) $f(1) = 1$
II) $f(x+5) \geq f(x) + 5$
III) $f(x+1) \leq f(x) + 1$
IV) $g(x) = f(x) + 1 - x$

Determine $g(2\,002)$.

4.9 Operaciones con Funciones de Variable Real ● ● ● • •

87) Sea S el conjunto de todas las funciones lineales o cuadráticas, se define la operación binaria $\mathbb{U}$:

$$\forall f, g \in S \ [f \,\mathbb{U}\, g = f + g]$$

Determine:

a) Si la operación es binaria interna.
b) Si la operación es conmutativa.
c) Si la operación es asociativa.
d) De ser posible, el neutro de la operación.
e) De ser posible, el inverso de la operación.

88) Sea $S = \{\alpha f(x) + \beta g(x), sgn(x), \mu(x)\}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; y, $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx^2 + dx + e$, $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0$.

Se define la operación binaria $\oint$:

$$\forall\, h, j \in S,\ h \oint j = h^j$$

Complete la tabla e indique si todas las funciones generadas son elementos de S.

$\oint$	$sgn(x)$	$\mu(x)$	1
-2			
$x+1$			
x^2+1			

¿Se puede concluir que la operación es binaria interna?

Scanned by CamScanner

89) Dadas las funciones $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ y $g: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando sus respuestas.

a) Si $(f-g)$ es sobreyectiva, entonces f es sobreyectiva o g es sobreyectiva.
b) Si f y g son inyectivas, entonces $(f+g)$ también es inyectiva.

90) Considere las funciones $f: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ y $g: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$. Demuestre que:

a) Si f y g son impares, entonces (fg) es par.
b) Si f es par y g es impar, entonces $(f \circ g)(x^3)$ es par.
c) Si f y g son pares, entonces $(f+g)$ también es par.
d) Si f es par y g es impar, entonces (fg) es impar.

91) Dadas las funciones de variable real f y g con reglas de correspondencia:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x>1 \\ 1, & x\leq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} 3-x, & |x|\leq 4 \\ x+1, & |x|>4 \end{cases}$$

Determine la regla de correspondencia de la función $(3f-2g)$ y bosqueje su gráfica con la ayuda de un software graficador.

92) Dada la función de variable real $f(x)=\begin{cases} -|x|+4, & |x|\geq 2 \\ x^2-2, & -2<x<2 \end{cases}$, identifique la proposición verdadera.

a) La función es impar.
b) La función es inyectiva.
c) La función es par.
d) La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0]$.
e) La función es decreciente en el intervalo $[0, +\infty)$.

93) Sean f, g y h funciones de variable real tales que:

$$f(x) = x^2-x, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = 4-2x, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$h(x) = \sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$$

Determine, de ser posible, las reglas de correspondencia de las siguientes funciones:

a) $(h \circ (f \circ g))(x)$
b) $i(x) = sgn(f(x)) + sgn(h(x))$
c) $j(x) = \mu(x) + \mu(f(x)) + sgn(h(x))$
d) $i(j(x))$

94) Dadas las funciones de variable real f, g y h definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} 3-x, & x<-2 \\ x^2, & -2\leq x\leq 1 \\ -2, & x>1 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} -x, & |x|\leq 1 \\ -2, & |x|>1 \end{cases}, \quad h(x)=|x+1|-2$$

Scanned by CamScanner

Determine de ser posible:

a) $(f+g)(1)$

b) $(hg)(0)$

c) $(g+h)(1)$

d) $\left(\frac{f}{h}\right)(1)$

e) $\left(\frac{h}{g}\right)(-1)$

f) $(g+h)(0)$

g) $(g+h)(-1)$

h) $(fh)(-2)$

i) $\left(\frac{g}{h}\right)(-1)$

j) $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$

k) $(h \circ f)(x)$

95) Dadas las funciones de variable real f y g con reglas de correspondencia:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1, & x\leq 0 \\ 2x+3, & x>0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases} 1+x, & x\geq 2 \\ \sqrt{2-x}, & x<2 \end{cases}$$

Determine, de ser posible, la regla de correspondencia de la función $(g \circ f)$.

96) Sean f, g y h funciones de variable real tales que:

- $f(x)=2x^2-2x$
- $g(x)=1-2x^2$
- $((f+g)\circ h)(x)=3-2x^2$

Determine la regla de correspondencia de la función h y bosqueje su gráfica.

97) A partir de la función $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 3x-6, & |x-2|<3 \\ 0, & x\geq 5 \vee x\leq -1 \end{cases}$, la regla de correspondencia de la función $3-f(3-x)$, es:

a) $3-f(3-x)=\begin{cases} 3x-3, & |x-1|<3 \\ 0, & |x-1|\geq 3 \end{cases}$

b) $3-f(3-x)=\begin{cases} 3x-3, & |x-1|\geq 3 \\ 0, & |x-1|<3 \end{cases}$

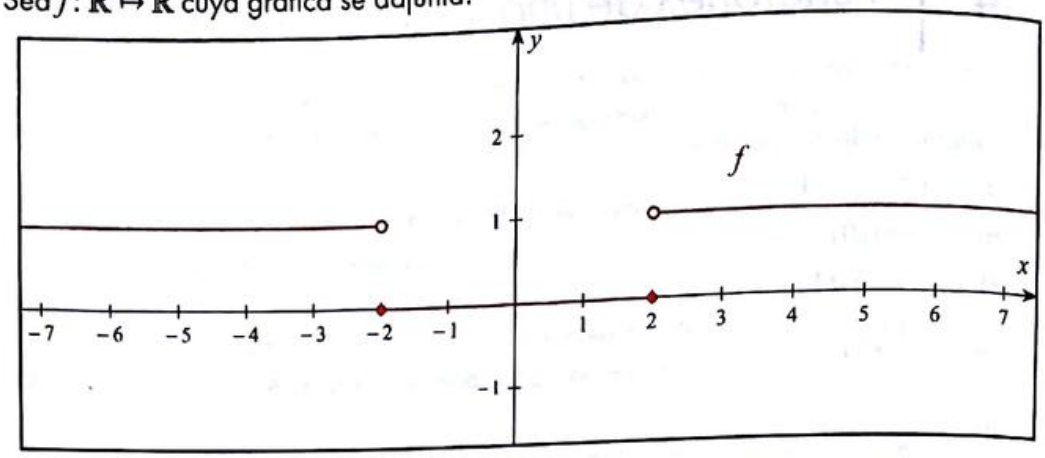
c) $3-f(3-x)=\begin{cases} 3x, & |x-1|<3 \\ 3, & |x-1|\geq 3 \end{cases}$

d) $3-f(3-x)=\begin{cases} 3x, & |x-1|\geq 3 \\ 3, & |x-1|<3 \end{cases}$

e) $3-f(3-x)=\begin{cases} 3x-12, & |x-1|<3 \\ 0, & |x-1|\geq 3 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

98) Sea $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ cuya gráfica se adjunta:



Entonces la regla de correspondencia de f es:

a) $f(x) = sgn\,(|x| - 1)$
b) $f(x) = \mu\,(x^2 - 4)$
c) $f(x) = |\mu\,(x - 2)|$
d) $f(x) = |sgn\,(x^2 - 4)|$
e) $f(x) = ||x - 2| - 2|$

99) Si se definen las funciones $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$f(x) = sgn\,(x) \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -1 \\ x + 1, & x \geq -1 \end{cases}$$

Entonces es VERDAD que:

a) $(g \circ f)$ no existe.
b) $(g \circ f)$ es una función par.
c) $(g \circ f)\,(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$
d) $(g \circ f)\,(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$
e) $(g \circ f)(0) = 0$

100) Dadas las funciones f y g de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| > 1 \\ x - 1, & |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -|x|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

El valor numérico de $((f \circ g) - (g \circ f))(0)$, es:

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

Scanned by CamScanner

101) Dadas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tales que:

$$f(x)=\begin{cases} k, & x>L \\ 2k, & x\leq L \end{cases} \text{ siendo } k, L\in\mathbb{R}^+ \text{ y } g(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

Entonces es VERDAD que:

a) $\forall x\in\mathbb{R}\,(g\circ f)(x)>0$
b) Si $x\leq L$, entonces $(g\circ f)(x)=k$
c) $(g\circ f)$ es una función continua en todo su dominio.
d) $rg\,(g\circ f)=[k, 2k]$
e) $(g\circ f)\left(\frac{L}{2}\right)=-L$

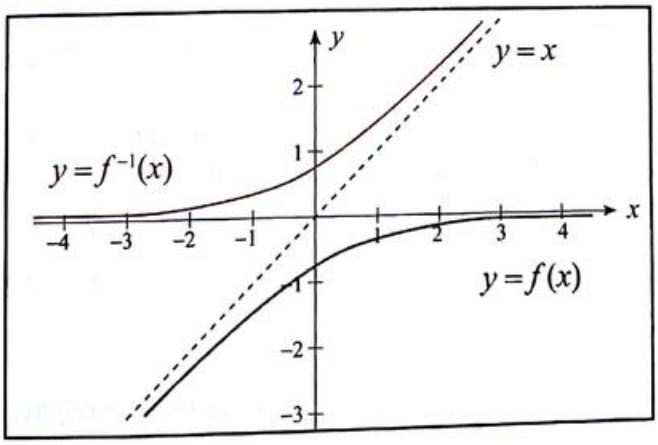
4.10 Función Inversa de una Función Biyectiva ● ● ● • •

102) Si una función f tiene inversa y su gráfica se encuentra en el primer cuadrante, la gráfica de f^{-1} estará en el primer cuadrante también.

a) Verdadero b) Falso

103) La siguiente es la gráfica de una función $f:\mathbb{R}\mapsto(-\infty, 0)$ biyectiva y su inversa f^{-1}.

a) Verdadero b) Falso



104) Considere las funciones $f:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{Q}$ definida para cada $n\in\mathbb{N}$ por $f(n)=\frac{1}{2n}$ y $g:\mathbb{Q}\mapsto\mathbb{Q}$ definida para cada $q\in\mathbb{Q}$ por $g(q)=\frac{q}{2}$. Demuestre que f no es biyectiva pero que g sí lo es.

Scanned by CamScanner

105) Sea $f: \mathbb{R}-\{2\} \mapsto \mathbb{R}$ la función definida en cada $x \in \mathbb{R}-\{2\}$ por $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$.

a) Demuestre que f es inyectiva.

b) Si se define una nueva función $g: \mathbb{R}-\{2\} \mapsto \mathbb{R}-\{2\}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}-\{2\}$ se tiene que $g(x)=f(x)$, pruebe que g es biyectiva y determine su inversa.

106) Para la función de variable real: $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ (x-1)^3, & x \geq 1 \end{cases}$

De ser posible:

a) Determine la regla de correspondencia de la función inversa de f.

b) Grafique la función inversa f^{-1}, la función identidad y la función f en un mismo plano cartesiano; y, analice la monotonía de las funciones f y f^{-1}.

107) Para la función de variable real: $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+5, & x<-2 \\ -x^2-4x-3, & x \geq -2 \end{cases}$

De ser posible:

a) Determine la regla de correspondencia de la función inversa de f.

b) Grafique la función inversa f^{-1}, la función identidad y la función f en un mismo plano cartesiano; y, de ser posible obtenga analíticamente el punto de intersección entre ambas curvas.

108) Sean $f(x)=2x+1; g(x)=3x-4; h(x)=\frac{8}{x}, x \neq 0$ y $r(x)=x^2$.

a) Demuestre que f y h son inyectivas.

b) Determine la regla de correspondencia de f^{-1}.

c) Grafique f y f^{-1} en el mismo plano.

d) Determine $(g \circ f)(-2)$.

e) Determine la regla de correspondencia de $(f \circ g)(x)$.

f) Determine la regla de correspondencia de h^{-1}.

g) Grafique g y h^{-1} en el mismo plano.

h) Determine la regla de correspondencia de $(h^{-1} \circ r)(x)$.

i) Sea $\mathrm{Re}=\mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad del predicado $p(x)$: $(h^{-1} \circ r)(x)=1/2$.

109) Si $f(x)=x^2-4x-3, x \in (-\infty, 2]$ es la regla de correspondencia de una función inversible, entonces la regla de correspondencia de la inversa de f es:

a) $f^{-1}(x)=2+\sqrt{7-x}; \quad x \geq -7$

b) $f^{-1}(x)=2-\sqrt{7+x}; \quad x \geq -7$

c) $f^{-1}(x)=2+\sqrt{7+x}; \quad x \geq -7$

d) $f^{-1}(x)=2-\sqrt{7-x}; \quad x \geq -7$

e) $f^{-1}(x)=2-\sqrt{7+x}; \quad x \leq -7$

110) La función $f(x)=\frac{1}{ax^2-1}$ con dominio $(1,+\infty)$, contiene al punto $P\left(2, \frac{1}{3}\right)$. Determine:

a) El valor de a.

b) La regla de correspondencia de f^{-1}.

c) La función recíproca $\left(\frac{1}{f}\right)$.

d) La función $\left(f \circ \frac{1}{f}\right)$.

Scanned by CamScanner

111) Sean f y g dos funciones de variable real, tales que:

$$f(x)=\frac{8}{x};x\neq 0 \quad \text{y} \quad g(x)=x^2$$

a) Determine f^{-1}. ¿Cuál es la relación con la función f?
b) Determine $(f^{-1}\circ g)$ e indique si es par o impar.
c) Determine $Ap(x)$ si $p(x)$: $(f^{-1}\circ g)(x)=x$.

Utilice un software graficador para comprobar su respuesta.

4.11 Funciones Polinomiales ● ● ● • •

112) Analice si las siguientes funciones son polinomiales.

a) $f(x)=3x^6+3x^4+5x^3+2x+1$
b) $g(x)=x\,sgn(x)+3$
c) $h(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}$
d) $i(x)=x^3+1$
e) $j(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x^2}+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^4}$

113) Utilizando un software apropiado, grafique las funciones del ejercicio anterior, y determine lo siguiente: intervalos de crecimiento o decrecimiento y cotas.

114) Considere la siguiente función polinomial $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $dom\,f=\mathbb{R}$
b) Existen al menos n ceros de f.
c) Si $f(c)=0$ entonces $(x-c)$ es un factor de f.
d) $rg\,f=\mathbb{R}$
e) f es continua para todo número real.

115) Determine los valores de $k\in\mathbb{R}$ tales que la ecuación $(k-2)x^2+2x+(k-2)=0$ tenga dos raíces reales y distintas.

116) Considere la siguiente función polinomial $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, $a_n\neq 0$ entonces es falso que:

a) El grado de la función f es n.
b) Si $a<b$ y $f(a)f(b)<0$, entonces $\exists c\in[a,b]$ tal que $f(c)=0$.
c) f es acotada cuando $n\leq 2$.
d) $f(f(x))$ es también un polinomio.
e) $f(x)f(x)$ es un polinomio de grado $2n$.

Scanned by CamScanner

117) Si una de las raíces de la función polinomial $f(x) = x^4 - ax^2 - 5x + b$ es 2 y se cumple que $f(1) + 10 = 0$, entonces el residuo de dividir $f(x)$ entre $(x - 3)$ es igual a:

a) $\frac{160}{3}$
b) 60
c) $\frac{244}{3}$
d) 120
e) 520

118) Un valor de k tal que al dividir la función polinomial $f(x) = 2x^3 - kx^2 - 4kx - 4k$ entre la función polinomial $g(x) = x - 2k$, el residuo sea igual a $-4k$, es:

a) -1
b) $-2/3$
c) $1/3$
d) $2/3$
e) $3/2$

119) Determine los ceros de la función $p(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

120) Determine el polinomio $p(x)$ de cuarto grado que cumpla las siguientes condiciones:

a) El coeficiente de x^4 es 1.
b) $p(1) = 0$
c) $p(x)$ es divisible para el trinomio $x^2 + 2x + 2$.
d) Al dividir $p(x)$ para x el residuo es -2.

121) Determine los posibles valores de k para que la función $q(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + k$, tenga una raíz igual al doble de otra de sus raíces.

122) Construya un polinomio de grado 5 que tenga como raíces los siguientes números: 1, 2, 3, 4, -2. Una vez que lo haya logrado, utilice la división sintética, la regla de los signos de Descartes y el teorema de los ceros racionales, para verificar que el polinomio está bien construido.

123) Construya un polinomio de grado 5, que tenga como raíces a 1 con multiplicidad 2, a 3 con multiplicidad 2 y a 0.

124) Si r_1, r_2 y r_3 son raíces de $x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0$, $(a_3 \neq 0)$, determine $r_1 + r_2 + r_3$.

125) Al preguntar a Ainara cuál será su calificación en la evaluación de matemáticas, ella respondió: "Será igual al valor de k para que $(x - 1)$ sea factor de $5x^{10} - kx^7 - x^6 + 13$", determine la calificación que obtendrá Ainara.

4.12 Funciones Racionales ● ● ● • •

126) La gráfica de la función de variable real $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 - 4}$ tiene dos asíntotas verticales.
a) Verdadero
b) Falso

127) La gráfica de la función de variable real $g(x) = \frac{12x - 3}{9x^2 - 4}$ tiene una asíntota horizontal y dos verticales.
a) Verdadero
b) Falso

Scanned by CamScanner

128) Si f es una función de variable real dada por $f(x)=\frac{4x^2-x}{x^2-1}$, entonces es falso que:

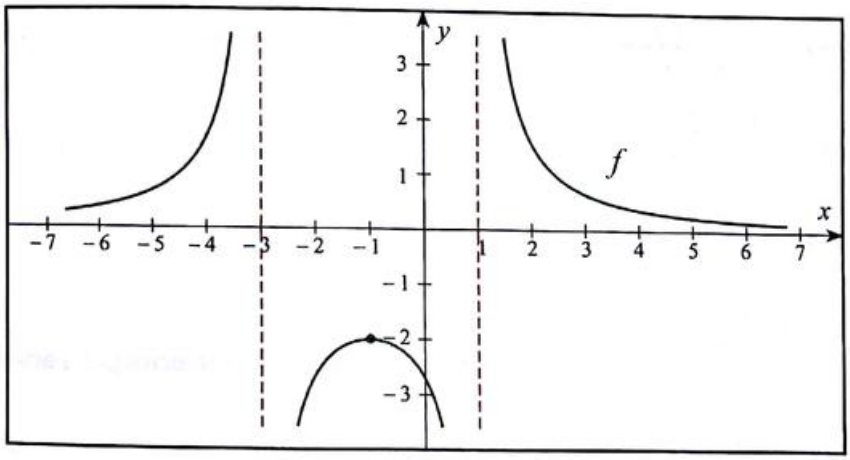
a) La gráfica de f tiene dos asíntotas verticales.
b) f es monótona creciente.
c) La gráfica de f tiene una asíntota horizontal.
d) $y=4$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.
e) La gráfica de f interseca el eje X en dos puntos.

129) Para cada una de las siguientes funciones, determine las asíntotas horizontales y verticales de sus gráficas, en caso de existir; además, determine los puntos de intersección con los ejes coordenados:

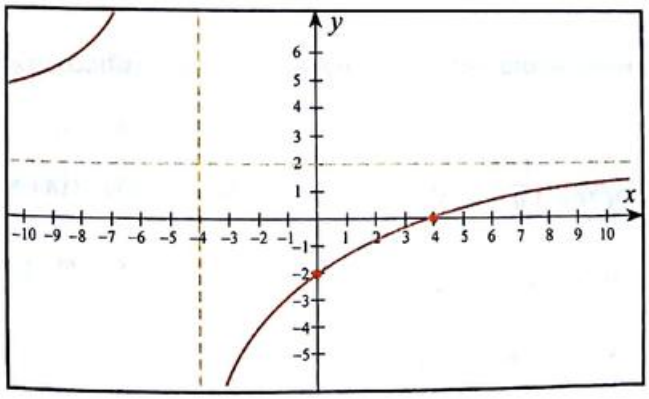
a) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+7x-8}$ b) $g(x)=\frac{2}{x^2+1}$ c) $h(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$

d) $i(x)=\frac{2x^2}{9-x^2}$ e) $j(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ f) $k(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

130) Determine a, b y $c \in \mathbb{R}$ para que la función de variable real $f(x)=\frac{a}{x^2+bx+c}$ tenga la siguiente gráfica:

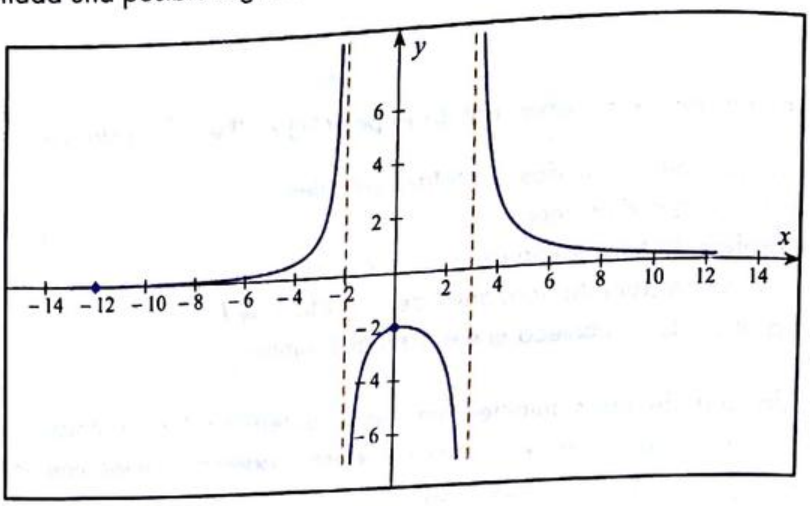


131) A partir de la siguiente gráfica de una función racional, determine de manera aproximada una posible regla de correspondencia.



Scanned by CamScanner

132) A partir de la siguiente gráfica de una función racional, determine de manera aproximada una posible regla de correspondencia.



133) Determine la asíntota oblicua y las condiciones para su existencia en la siguiente función:

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-d}, \forall\ a, b, c, d, \in \mathbb{R}$$

134) Determine todas las asíntotas de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

d) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$

e) $f(x)=\dfrac{3x^2}{25-x^2}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$

135) Determine cuál de las siguientes funciones no tiene una gráfica asociada a los diagramas mostrados:

I) $f(x)=\dfrac{1}{2(2x-1)(2x+1)}$

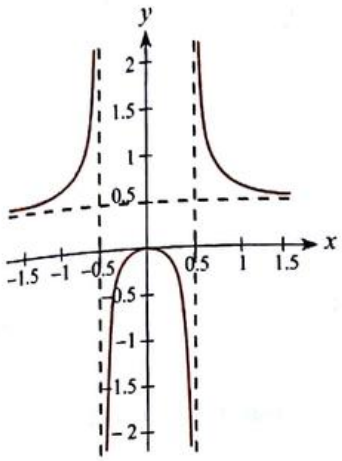
II) $g(x)=\dfrac{7x^2}{4(2x-1)(2x+1)}$

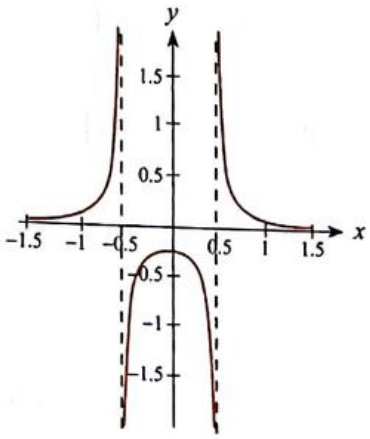
III) $h(x)=\dfrac{7x^3}{4(2x-1)(2x+1)}$

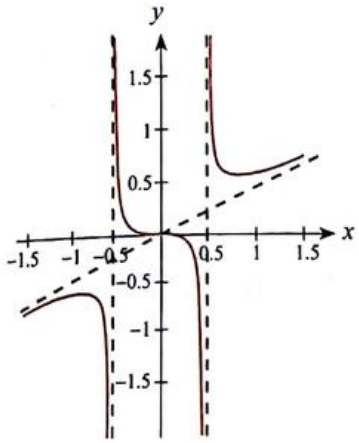
IV) $r(x)=\dfrac{7x^4}{4(2x-1)(2x+1)}$

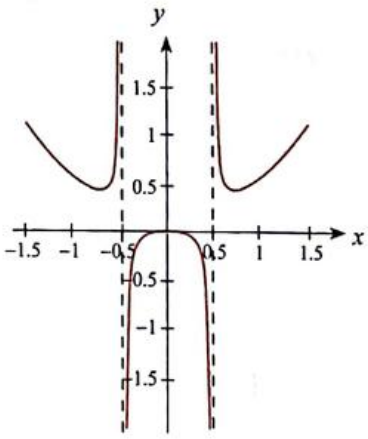
V) $m(x)=\dfrac{7x}{(2x-1)(2x+1)}$

Scanned by CamScanner









4.13 Funciones Exponenciales

136) Defina la función exponencial, identificando sus principales elementos.

137) Justificando su respuesta, califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas:

a) Si $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+ \wedge a > 1$, entonces $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,(x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

b) Si $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+ \wedge 0 < a < 1$ entonces $f(-x) = -f(x)$

c) Cuando x toma valores positivos muy grandes, la función $f(x) = 2^{-x}$ se aproxima a cero.

d) Sólo si $f(x) = (-3)^x$ es una función exponencial, $g(x) = (3)^{-x}$ no lo es.

Scanned by CamScanner

138) En el siguiente desarrollo de seis pasos, indicar claramente en cuál de ellos está el error y explique por qué.

I) $5 > 3$

II) $5\ln\left(\frac{1}{2}\right) > 3\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

III) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)^5 > \ln\left(\frac{1}{2}\right)^3$

IV) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

V) $\frac{1}{32} > \frac{1}{8}$

VI) $1 > 4$

139) El valor más aproximado a $4 \cdot 4^{1/3} \cdot 4^{1/9} \cdot 4^{1/27} \cdot \ldots$ es:

a) 4^{100} b) 4000 c) 8 d) 2^{100} e) 0

140) Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x) = e^{sgn(x) + \mu(x)}$, entonces es verdad que:

a) f es estrictamente creciente.
b) $f(\pi) = f(-\sqrt{2})$
c) f es impar.
d) f no es inyectiva.
e) $rg\, f = \left[\frac{1}{e}, e^2\right]$

141) Sean f y g funciones tales que: $f(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right|$ y $g(x) = \sqrt{x+2}$ entonces es falso que:

a) $(f \circ g)(-1) = \frac{3}{2}$
b) $(f \circ g)(-2) = 1$
c) $\left(\frac{g}{f}\right)(-2) = 0$
d) $f(2) + g(-1) = -\frac{3}{4}$
e) $(g \circ f)(0) = \sqrt{3}$

142) Sea f una función de variable real, tal que $f(x) = 2^{x-3} - 1$, entonces es verdad que:

a) $dom\, f = (-1, +\infty)$
b) f es decreciente.
c) f no es inyectiva.
d) f es par.
e) $rg\, f = (-1, +\infty)$

Scanned by CamScanner

143) Grafique las siguientes funciones exponenciales:

a) $f(x)=e^{-x+3}$

b) $g(x)=2^{|x-1|}$

c) $h(x)=3^{|x|-1}$

d) $i(x)=10^{-|x+2|}$

e) $j(x)=\pi^{-|x|+1}$

f) $k(x)=\left(\frac{5}{3}\right)^{-|x-3|+1}$

g) $l(x)=\left(\frac{2}{7}\right)^{-|2-x|}$

Utilice un software de graficación para verificarlas.

144) Sea la función de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1, & x\geq 1 \\ x, & 0<x<1 \\ -x^2, & x\leq 0 \end{cases}$$

En relación a su función inversa f^{-1} se puede afirmar que:

a) Es impar.
b) Es par.
c) Es estrictamente creciente en $[1, +\infty)$.
d) Es estrictamente decreciente en $[1, +\infty)$.
e) No está definida para $\mathbb{R}^-$.

145) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, con regla de correspondencia $f(x)=-\frac{1}{2^{|x|}}+1$, entonces es falso que:

a) f es una función acotada.

b) f es una función par.

c) $(f \circ f)(x)=-\frac{1}{2^{1-\frac{1}{2^{|x|}}}}+1$

d) $rg\, f=[0, 1)$

e) f es una función inyectiva.

Scanned by CamScanner

146) Sean las funciones $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{6}{x}, & x<2 \\ sgn(x), & x\geq 2 \end{cases}, \qquad g(x)=\begin{cases} 3^{1-x}, & x\geq 1 \\ -\frac{1}{2^x}, & x<1 \end{cases}$$

Determine la regla de correspondencia de la función $(f \circ g)$.

147) Al graficar la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^{(\,sgn(x-1)+\mu(x+1)\,)x}$, se puede afirmar que:

a) $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, f es estrictamente creciente.
b) $\forall x \in dom\, f,\ f(x) > 1$
c) f es acotada superiormente.
d) $\exists x \in dom\, f,\ f(x) = 0$
e) $\forall x \in (-1, 1),\ f(x) = f(-x)$

148) El número de bacterias en un cultivo después de t horas está dado por el modelo exponencial de crecimiento $q(t) = 50e^{0.8t}$. Bajo estas condiciones, determine:

a) El número inicial de bacterias existentes en el cultivo.
b) El número aproximado de bacterias luego de haber transcurrido una hora con 25 minutos. Para este propósito puede usar una calculadora.

4.14 Funciones Logarítmicas ● ● ● • •

149) Defina e identifique los principales elementos de las siguientes funciones:

a) Función Logarítmica.
b) Función Logaritmo natural.
c) Función Logaritmo común.

150) Grafique las siguientes funciones en su correspondiente dominio:

a) $f(x) = 1 - ln(2-x)$

b) $g(x) = |log_2(2x-6)|$

c) $h(x) = log_{\frac{1}{3}} |x-1|$

d) $i(x) = log_{\frac{1}{3}}(|x|-1)$

e) $j(x) = log_{\frac{2}{5}}(2-|x-3|)$

f) $k(x)=\begin{cases} 10^{-|x|}, & |x|<1 \\ ln(|2x|-4), & |x|>2 \\ 1, & x\in[-2,-1]\cup[1,2] \end{cases}$

Scanned by CamScanner

g) $l(x)=\begin{cases} sgn(1-3^x), & |x|\leq 2 \\ log_2|x|, & |x|>2 \end{cases}$

h) $m(x)=\begin{cases} \mu(log(-x)), & -5<x<0 \\ ln|3-x|, & x\in[0,3)\cup(3,5) \\ sgn\left(log_{\frac{1}{2}}(|x|-4)\right), & |x|\geq 5 \end{cases}$

151) Simplifique las siguientes expresiones:

a) $log_8\left(log_4\left(log_2(16)\right)\right)$

b) $10^{2+log_2\left(log_3\left(\sqrt{\sqrt[4]{3}}\right)\right)}$

c) $\left(log_3(7)\right)\left(log_7(5)\right)\left(log_5(4)\right)+1$

d) $49^{1-\frac{1}{4}log_7(25)}$

e) $36^{log_6(5)}+10^{1-log(2)}-3^{log_9(36)}$

f) $81^{\frac{1}{log_5(3)}}-27^{log_9(36)}-3^{\frac{4}{log_7(9)}}$

g) $49^{\frac{1}{log_3(7)}}-4^{1-log_2(3)}+log_3\left(log_2(8)\right)$

152) Determine lo requerido en cada literal, considerando que todas las expresiones están definidas en $\mathbb{R}$:

a) $log_a(72)$, si $log_a(2)=c$ y $log_a(3)=c+2$

b) $log_{100}(40)$, si $log_2(5)=a$

c) $log_3(5)$, si $log_6(2)=a$ y $log_6(5)=b$

d) $log_{m^3}(m^2n)$, si $log_a(m)=x$ y $log_a(n)=y$

e) El intervalo en el cual la función $f(x)=log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ es estrictamente creciente.

f) El valor aproximado de $log_2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\right)\ldots\right]$

Scanned by CamScanner

153) Sea el conjunto referencial $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $p(x)$: $4^{x-1} + 2^{x+2} = 48$

b) $q(x)$: $\dfrac{2^{x-1}}{4^{x+3}} = 16^{-1}$

c) $r(x)$: $4 = 2^{x^2} \cdot 4^{\left(x-\frac{1}{2}\right)}$

d) $s(x)$: $3^x\left(4^{2x+1}\right) = 6^{x+2}$

e) $t(x)$: $4^x + 2^{x+1} = 8$

f) $u(x)$: $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$

g) $v(x)$: $e^x - e^{-x} = 1$

h) $w(x)$: $2^x + (0.5)^{2x-3} - 5\,(0.5)^{x-1} = -1$

i) $i(x)$: $6\left(3^{2x}\right) - 13\left(6^x\right) + 6\left(2^{2x}\right) = 0$

154) Considere $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $p(x)$: $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} \geq 0$

b) $q(x)$: $\mu\left(\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}} - 8^{\frac{x-3}{3x-7}}\right) = 0$

c) $r(x)$: $sgn\left(\dfrac{1}{(0.5)^x - 1} - \dfrac{1}{1-(0.5)^{x+1}}\right) = 1$

155) Determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados, si se conoce que $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$.

a) $p(x)$: $log_4(x-1) = 1 - log_2(x)$

b) $q(x)$: $log(x+4) + log(2x+3) = log(1-2x)$

c) $r(x)$: $ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - ln\left(x^2-1\right) + 2 = 0$

d) $s(x)$: $log^2(x) + log(x) + 1 = \dfrac{7}{log\left(\frac{x}{10}\right)}$

e) $t(x)$: $\left(log_{\frac{1}{2}}(x)\right)^2 = 3\,log_{\frac{1}{8}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Scanned by CamScanner

f) $u(x): \left(ln\left(\frac{1}{x+e}\right)\right)^2 log(e) = 2\,log\left(\sqrt{x+e}\right)$

g) $v(x): log_{0.5x}(x^2) - 14\ log_{16x}(x^3) + 40\ log_{4x}(\sqrt{x}) = 0$

h) $w(x): \left(\frac{b}{log_x(a)}\right)^{log_a(x)} = b^{2b}$; $a, x \in (1, +\infty)$, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$

156) Sea el conjunto referencial $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$, determine el conjunto de verdad de los siguientes predicados:

a) $p(x)$: $log_2\left(\frac{4}{x+3}\right) > log_2(2-x)$

b) $q(x)$: $\mu\left(log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x^2-4x-6}{4x-11}\right)+1\right) = 0$

c) $r(x)$: $sgn\left(log_{x-2}(2x-3) - log_{x-2}(24-6x)\right) = 1$

d) $s(x)$: $\left[\!\left[log_3(2x-1)\right]\!\right] = 0$

e) $u(x)$: $\sqrt{log_2(x)-1} + \frac{1}{2} log_{\frac{1}{2}}(x^3) + 2 > 0$

f) $t(x)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{log_4|x^2-5|-1}}$ es un número real

157) Demuestre que:

a) $\forall M \in \mathbb{R}^+, \forall N \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ $\left[log_a\left(\frac{M}{N}\right) = log_a(M) - log_a(N)\right]$

b) $\forall M \in \mathbb{R}^+, \forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\left[log_a\left(M^\alpha\right) = \alpha\, log_a(M)\right]$

c) $\forall M \in \mathbb{R}^+, \forall a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ $\left[log_a(M) = \frac{log_b(M)}{log_b(a)}\right]$

d) $\forall a, n \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$:

$$\left[\frac{1}{log_a(n)} + \frac{1}{log_{a^2}(n)} + \frac{1}{log_{a^3}(n)} + \frac{1}{log_{a^4}(n)} + \frac{1}{log_{a^5}(n)} = 15\, log_n(a)\right]$$

Scanned by CamScanner

158) Si una función logarítmica cumple con las condiciones descritas a continuación:

- f es par.
- f es estrictamente decreciente en $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$.
- f presenta una asíntota vertical en $(-1, 1)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0, +\infty)$

Entonces, su posible regla de correspondencia es:

a) $f(x) = |log|1-x||, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

b) $f(x) = \left| log_{\frac{1}{10}} |x-1| \right|, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

c) $f(x) = |log|2x||, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

d) $f(x) = |log(x)|, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

e) $f(x) = \left| log_{\frac{1}{10}} |x| \right|, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

159) Demuestre que:

Si $log_4(x + 2y) + log_4(x - 2y) = 1$, entonces el mínimo valor de $(|x| - |y|)$, es $\sqrt{3}$.

160) Compruebe gráficamente que:

a) $e^x > 1 + x, \forall x > 0$

b) $ln(x + 1) < x, \forall x > 0$

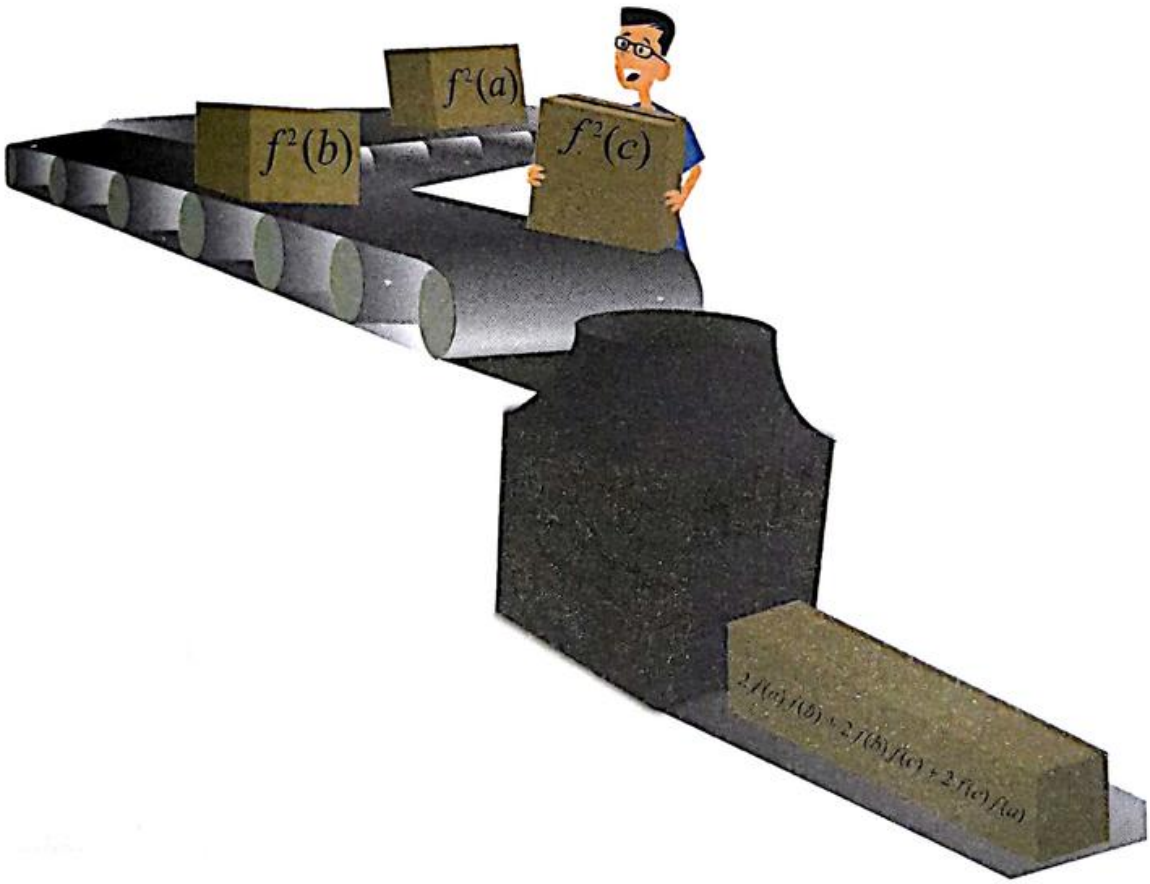
Scanned by CamScanner

La máquina de funciones

Determine todas las funciones $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ que cumplen la siguiente igualdad:

$$f^2(a)+f^2(b)+f^2(c)=2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)$$

para todos los enteros a, b, c que satisfacen la condición $a+b+c=0$.



Scanned by CamScanner

La transformación polinómica

Exprese el polinomio en x, $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{19} + x^{20}$ en un polinomio en y $g(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_{19} y^{19} + a_{20} y^{20}$, cuando $y = x - 4$; y, determine:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{20}$$

$f(x)$

$f(x)$

$f(x)$

$f(x)$

$\vdots$

$f(x)$

$g(y)$

$g(y)$

$g(y)$

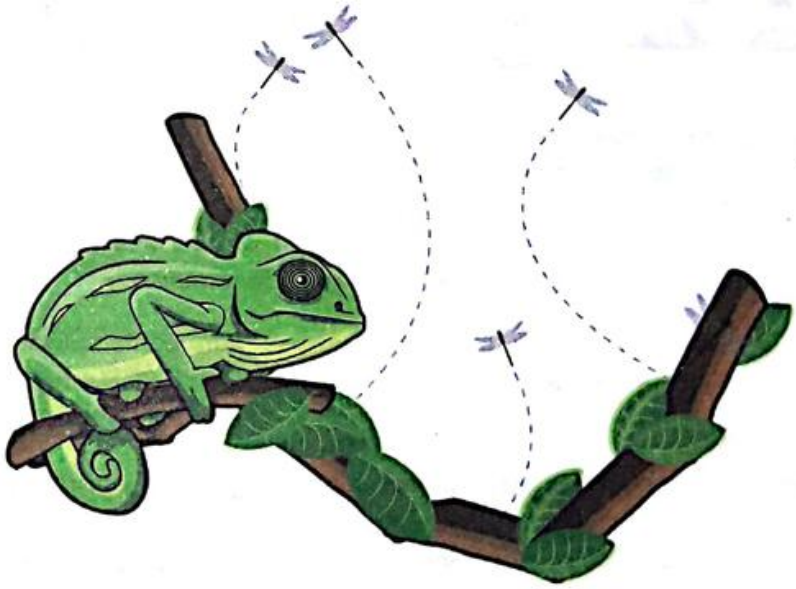
Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

Desafío

El rastreo angular

Los camaleones poseen ojos con particularidades anatómicas muy sobresalientes, siendo de los más desarrollados del reino animal. Los mismos cuentan con movimientos independientes que les permiten alcanzar un campo visual de 360°.



Considere un camaleón que desea alimentarse de libélulas, para lo cual las rastrea usando sus hábiles ojos. Se conoce que el movimiento de la libélula se describe bajo la siguiente expresión trigonométrica:

$$2sen(2°) + 4sen(4°) + \ldots + 178sen(178°) + 180sen(180°)$$

Demuestre que la misma es igual a: $90cot(1°)$

Si no puede resolver este desafío, busque la solución en la página correspondiente del presente capítulo.

pág. 537

Scanned by CamScanner

Introducción

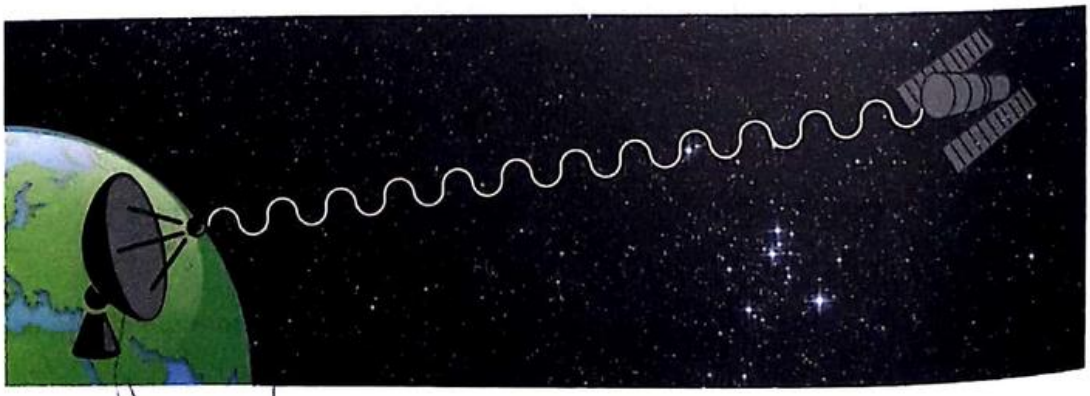
La trigonometría es una rama de las matemáticas que fue desarrollada por astrónomos griegos, quienes fueron pioneros en el cálculo de distancias a cuerpos celestes. Aún cuando su significado etimológico se relaciona con la medición de los triángulos, en la actualidad sus aplicaciones se han diversificado. Por ejemplo, los sistemas de navegación por satélites, basados en la triangulación, son claves para ajustar los rumbos de navegación en términos de latitud y longitud con gran exactitud.

El traslado de la trigonometría astronómica a las matemáticas fue realizado por Regiomontano y mejorado por Copérnico y su alumno Rheticus. En la obra de Rheticus se definen las seis funciones trigonométricas como razones entre las longitudes de los lados de los triángulos, aunque no les dio sus nombres actuales. El mérito de esto se lo lleva Thomas Fincke; sin embargo, la expresión formal que propuso no fue aceptada universalmente. La notación que quedó establecida fue la de Leonhard Euler.

Desde entonces, la trigonometría ha venido evolucionando, siendo utilizada por agrimensores, navegantes e ingenieros, hasta las aplicaciones actuales como el movimiento de las mareas en el océano, la variación de los recursos alimenticios bajo ciertas condiciones ecológicas, el movimiento pendular, los patrones de ondas cerebrales, los latidos del corazón, las corrientes eléctricas, los temblores y otros fenómenos.

En el desarrollo de las funciones trigonométricas se han contemplado dos aspectos fundamentales. El primero está relacionado con el empleo de circunferencias; y, el segundo está basado en triángulos rectángulos.

Definitivamente, la trigonometría sigue proporcionando grandes aportes en el quehacer matemático de la sociedad actual, por ejemplo, en el desarrollo de nuevos métodos numéricos, aplicaciones del cálculo diferencial, integral y vectorial; así como de la geometría en general.



Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

5.1 Ángulos y sus medidas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Explicar con sus propias palabras la diferencia entre ángulo y medida de un ángulo.
- Relacionar las medidas de los diferentes tipos de ángulos que existen.
- Dada la medida de un ángulo en grados sexagesimales, convertirla a radianes y viceversa.
- Dada la medida de un ángulo, indicar su ubicación en el plano cartesiano.

Iniciaremos esta sección describiendo un elemento importante para la definición de ángulo, éste es la semirrecta.

Dado que el concepto de semirrecta es primario, basta con indicar que cualquier punto que pertenezca a una recta, la divide en dos semirrectas. Una vez fijado, a este punto se lo denomina origen de la semirrecta.

Definición 5.1 (Ángulo)

Es la región del plano comprendida entre dos semirrectas de origen común.

Una de las semirrectas se conoce como el lado inicial del ángulo, mientras que la otra recibe el nombre de lado terminal o final. El extremo donde se intersecan las semirrectas se denomina **vértice** del ángulo.

Tal como se observa en la figura 5.1, se acostumbra designar a los ángulos por medio de puntos de las semirrectas ($\measuredangle ABC$) o utilizando solamente el vértice ($\measuredangle B$), siempre y cuando no exista confusión.

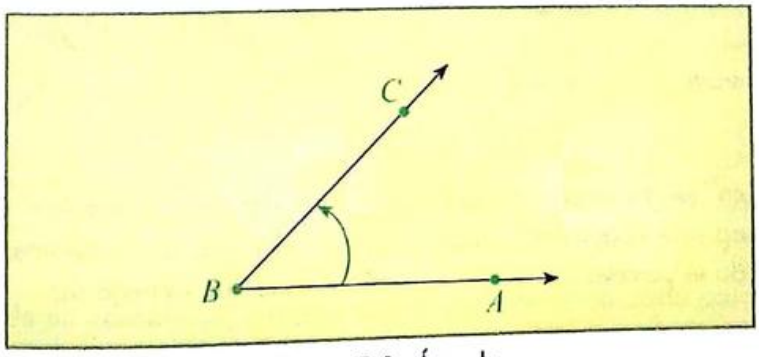


Figura 5.1: Ángulo

Scanned by CamScanner

La **medida de un ángulo** denotada por m, representa la abertura entre las dos semirrectas.

Considerando la figura 5.1, el lector debe tomar en cuenta que en esta obra, la medida a la cual se hace referencia se representará como $m\measuredangle ABC$ o $m\measuredangle B$.

Adicionalmente, es común designar a la medida de los ángulos con letras del alfabeto griego: $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \omega$, entre otras. Por ejemplo, bien podría decirse que: $\alpha = m\measuredangle ABC$.

Si se considera una región del plano con un recorrido desde el lado inicial del ángulo hasta el lado final, siguiendo el sentido contrario de las manecillas del reloj, por convención la medida del ángulo es positiva. Si dicho recorrido se realiza en sentido de las manecillas del reloj, la medida es negativa.

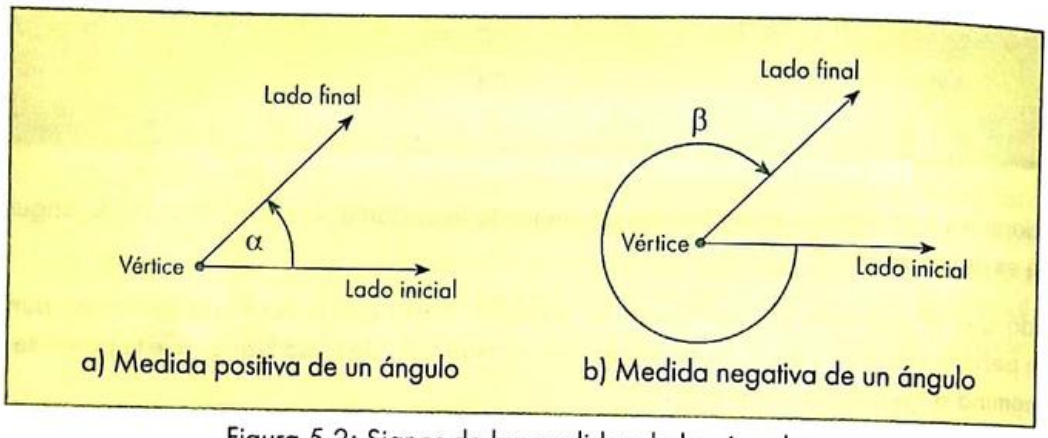


Figura 5.2: Signos de las medidas de los ángulos.

Un ángulo se encuentra en **posición normal** o **estándar** si su vértice está ubicado en el origen del sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el semieje X positivo. Si el lado terminal del ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, se denominará ángulo del segundo cuadrante y análogamente para los otros cuadrantes.

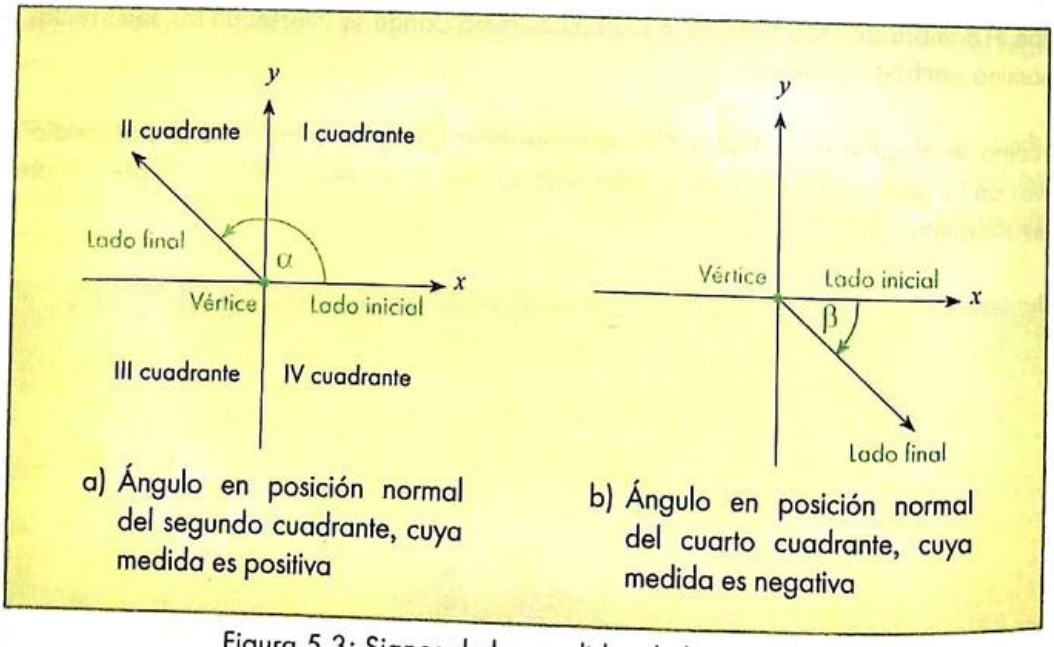


Figura 5.3: Signos de las medidas de los ángulos.

Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

5.1.1 Unidades angulares

Para la localización exacta de una estrella o de la posición de un barco, es más adecuado utilizar el grado sexagesimal como unidad de medida angular. Sin embargo, la motivación original para escoger esta unidad de medida angular es desconocida. Una teoría indica que está relacionada con el hecho de que 360 es aproximadamente la cantidad de días de un año.

El sistema de grados sexagesimales, minutos y segundos, a más de ser un sistema posicional, tiene como base el número 60, según el cual 60 unidades de orden forman una unidad de orden superior. Algunas equivalencias importantes son las siguientes:

360° representan un giro completo alrededor de una circunferencia.

180° representan medio giro alrededor de una circunferencia.

90° representan $\frac{1}{4}$ de vuelta.

1° representa $\frac{1}{360}$ de vuelta.

1° representa 60 minutos (').

1' representa 60 segundos (").

Es de observar que para generar un ángulo se puede dar más de un giro completo; por ejemplo, si damos dos giros completos se tendrían 720°; si se dan 10 giros se tendrían 3 600°.

Vale recalcar que el grado sexagesimal no pertenece al Sistema Internacional de Medidas, pues el radián es la unidad estándar de las medidas angulares. Para propósitos de cálculo, los grados sexagesimales son transformados en radianes, puesto que el radián es más práctico en las aplicaciones físicas.

Considerando una circunferencia de radio r y centro O, si se construye un ángulo de medida α cuyo vértice esté ubicado en O, y cuyos lados inicial y terminal subtienden sobre la circunferencia un arco de longitud igual a r, tenemos que α constituye un **radián**.

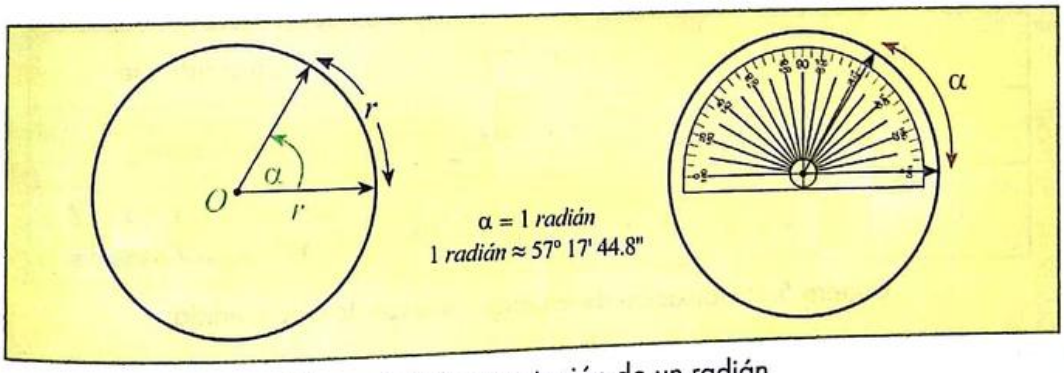


Figura 5.4: Interpretación de un radián.

Con la ayuda de un transportador o graduador, instrumento utilizado para medir ángulos, se puede verificar la medida aproximada de un radián, tal como se muestra en la figura 5.4.

Scanned by CamScanner

Es de notar que la medida de un ángulo es independiente de la longitud del radio. Por ejemplo, al dividir una pizza en 8 partes de las mismas dimensiones, la medida del ángulo de cada pedazo permanece igual, independientemente si la pizza es personal, mediana o familiar.

La medida de un ángulo permite calcular fácilmente la longitud de un arco de circunferencia; sólo basta multiplicar la longitud del radio por la medida del ángulo en radianes.

$$\text{Longitud de un arco de circunferencia} = (\text{Medida del ángulo en radianes})(\text{Longitud del radio})$$

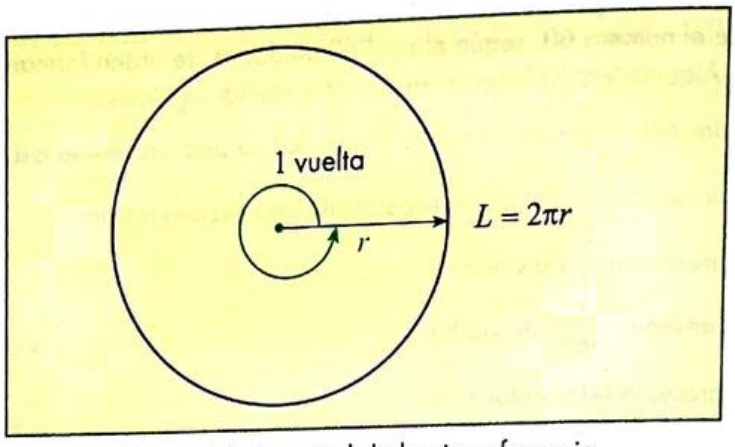


Figura 5.5: Longitud de la circunferencia.

Es importante reconocer la medida de un ángulo, ya sea que esté expresada en radianes o grados sexagesimales, porque ésta indica la ubicación del ángulo en uno de los ejes o cuadrantes del sistema de coordenadas rectangulares. Así, las diferentes ubicaciones del lado terminal de un ángulo en función de su medida se resumen en el Cuadro 5.1.

Medida en Radianes	Medida en Grados Sexagesimales	Ubicación del Lado Terminal
$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$(0°, 90°)$	I cuadrante
$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$(90°, 180°)$	II cuadrante
$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$(180°, 270°)$	III cuadrante
$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$	$(270°, 360°)$	IV cuadrante
$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$	$0°, 90°, 180°, 270°, 360°$	Semieje: X^+, Y^+, X^-, Y^-, X^+, respectivamente

Cuadro 5.1: Ubicación de los ángulos respecto a su medida.

Para medidas mayores a 2π radianes o $360°$, se debe dividir esta medida para 2π o $360°$, según sea el caso; el cociente indicará la cantidad de giros o vueltas y el residuo de la división indicará la ubicación del lado terminal del ángulo.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.1 Ubicación de los ángulos.

Se requiere ubicar un ángulo cuya medida es 410°. Si se divide para 360°, se obtiene 1 de cociente y 50 de residuo. Esto quiere decir que el ángulo ha dado una vuelta de 360° y su lado terminal se ha ubicado en 50°. Por tanto, es un ángulo del I cuadrante.

5.1.2 Clases de ángulos

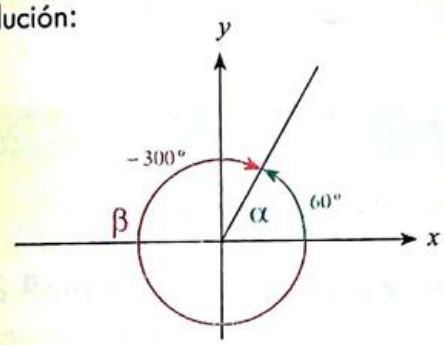
Definición 5.2 (Ángulos coterminales)

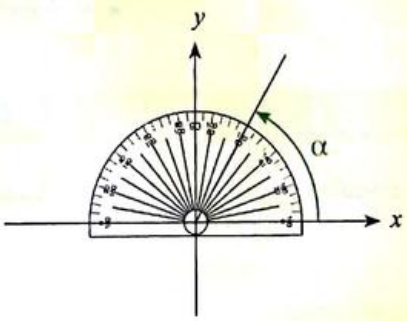
Son aquellos ángulos que tienen los mismos lados inicial y terminal.

Ejemplo 5.2 Ángulos coterminales.

Sean $\alpha = 60°$ y $\beta = -300°$. Graficando, se observa que los ángulos de las medidas dadas son coterminales.

Solución:

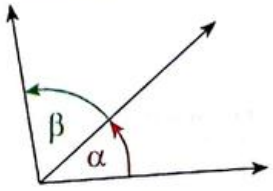




Con la ayuda del graduador, se puede verificar que $\alpha = 60°$.

Definición 5.3 (Ángulos consecutivos)

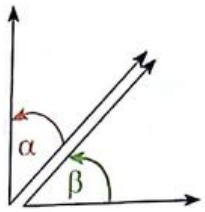
Dos ángulos de un mismo plano son consecutivos cuando lo único que tienen en común, es uno de sus lados.



Scanned by CamScanner

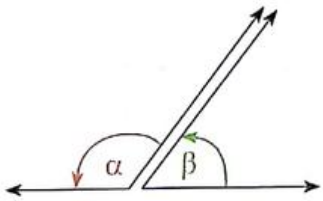
Definición 5.4 (Ángulos complementarios)

Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus medidas constituye la medida de un ángulo recto: $\alpha + \beta = 90°$.



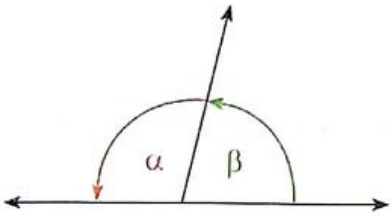
Definición 5.5 (Ángulos suplementarios)

Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus medidas constituye la medida de dos ángulos rectos: $\alpha + \beta = 180°$.



Definición 5.6 (Ángulos adyacentes)

Dos ángulos son adyacentes cuando son consecutivos y suplementarios.



Ejemplo 5.3 Ángulos complementarios y suplementarios.

Considere el ángulo ABC de medida x cuyo ángulo suplementario mide $125°$. Calcule:

a) La medida x.

b) La medida del ángulo complementario al ángulo ABC.

Scanned by CamScanner

Solución:

a) Sea $y = 125°$ la medida del ángulo suplementario de $\measuredangle ABC$, debe cumplirse que:

$$x = 180° - y = 180° - 125° = 55°$$

$\therefore$ La medida x es $55°$.

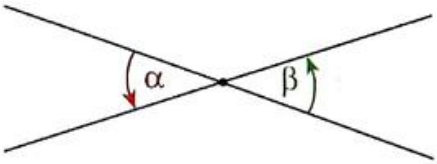
b) Sea z la medida del ángulo complementario de $\measuredangle ABC$, debe cumplirse que:

$$z = 90° - x = 90° - 55° = 35°$$

$\therefore$ El ángulo complementario de $\measuredangle ABC$ mide $35°$.

Definición 5.7 (Ángulos opuestos por el vértice)

Dos ángulos se dicen opuestos por el vértice cuando los lados de uno de ellos son semirrectas opuestas a los lados del otro, verificándose que $\alpha = \beta$.



5.1.3 Relación entre grados sexagesimales y radianes

Ya hemos visto que la longitud de una circunferencia es $2\pi r$, y para el caso de una vuelta, hemos indicado que el ángulo mide $360°$, entonces podemos definir una equivalencia entre las medidas en grados sexagesimales y radianes.

A partir de la igualdad $360° = 2\pi$ *radianes*, determinamos que:

$$180° = \pi \text{ radianes}$$

$$90° = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$$

$$60° = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$$

$$45° = \frac{\pi}{4} \text{ radianes}$$

$$30° = \frac{\pi}{6} \text{ radianes}$$

Scanned by CamScanner

Podemos observar éstas y otras equivalencias en la siguiente figura:

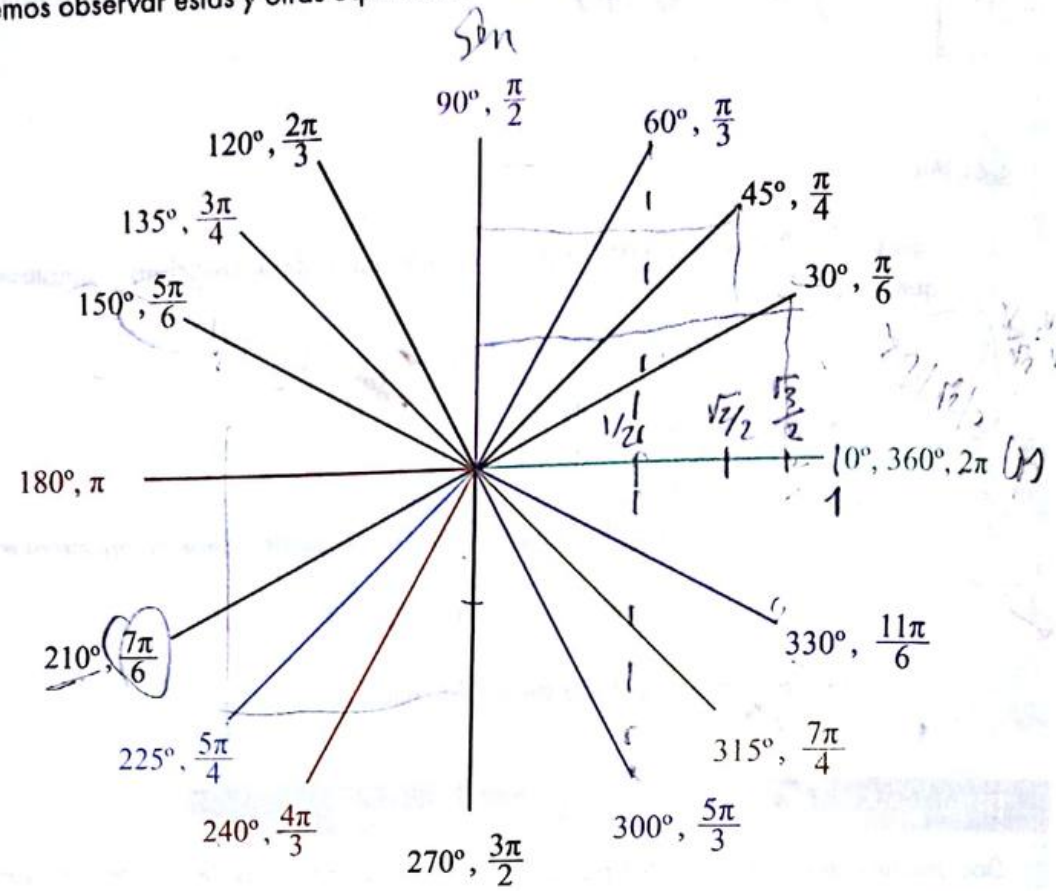


Figura 5.6: Equivalencias de unidades angulares.

Ejemplo 5.4 Conversión de unidades angulares.

Convierta de grados sexagesimales a radianes.

a) 15°
b) 390°
c) −75°
d) −150°

Solución:

a) $15° \cdot \frac{\pi \text{ radianes}}{180°} = \frac{\pi}{12} \text{ radianes}$

b) $390° \cdot \frac{\pi \text{ radianes}}{180°} = \frac{13\pi}{6} \text{ radianes}$

c) $-75° \cdot \frac{\pi \text{ radianes}}{180°} = -\frac{5\pi}{12} \text{ radianes}$

d) $-150° \cdot \frac{\pi \text{ radianes}}{180°} = -\frac{5\pi}{6} \text{ radianes}$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.5 Conversión de unidades angulares.

Convierta de radianes a grados sexagesimales.

a) $\frac{5\pi}{12}$

b) $\frac{7\pi}{12}$

c) -3π

d) $-\frac{13\pi}{4}$

Solución:

a) $\frac{5\pi}{12}\ radianes \cdot \frac{180°}{\pi\ radianes} = 75°$

b) $\frac{7\pi}{12}\ radianes \cdot \frac{180°}{\pi\ radianes} = 105°$

c) $-3\pi\ radianes \cdot \frac{180°}{\pi\ radianes} = -540°$

d) $-\frac{13\pi}{4}\ radianes \cdot \frac{180°}{\pi\ radianes} = -585°$

Ejemplo 5.6 Conversión de medidas angulares.

Resuelva cada situación planteada:

a) Si los ángulos A y B son coterminales y $m\measuredangle A = 75°$, ¿cuál es la medida en radianes del ángulo B ?

b) Si los ángulos A y B son suplementarios y $m\measuredangle A = 4\, m\measuredangle B$, ¿cuál es la medida en radianes de los ángulos A y B ?

Scanned by CamScanner

Solución:

a) Como los ángulos son coterminales:

$$m\measuredangle B = -(360° - 75°) = -285°$$

Transformando la medida obtenida en grados sexagesimales a radianes:

$$\overset{19}{\cancel{-285°}} \cdot \frac{\pi \text{ radianes}}{\underset{12}{\cancel{180°}}} = -\frac{19\pi}{12} \text{ radianes}$$

$\therefore$ El ángulo B mide $-\frac{19\pi}{12}$ radianes.

b) Debido a que son suplementarios:

$$m\measuredangle A + m\measuredangle B = 180°$$
$$4\, m\measuredangle B + m\measuredangle B = 180°$$
$$5\, m\measuredangle B = 180°$$
$$m\measuredangle B = 36°$$

$$m\measuredangle A = 4\, m\measuredangle B$$
$$m\measuredangle A = 4(36°)$$
$$m\measuredangle A = 144°$$

Transformando cada medida obtenida en grados sexagesimales a radianes:

$$m\measuredangle A = \overset{4}{\cancel{144°}} \cdot \frac{\pi \text{ radianes}}{\underset{5}{\cancel{180°}}} = \frac{4\pi}{5} \text{ radianes}$$

$$m\measuredangle B = \overset{1}{\cancel{36°}} \cdot \frac{\pi \text{ radianes}}{\underset{5}{\cancel{180°}}} = \frac{\pi}{5} \text{ radianes}$$

$\therefore$ A mide $\frac{4\pi}{5}$ radianes y B mide $\frac{\pi}{5}$ radianes.

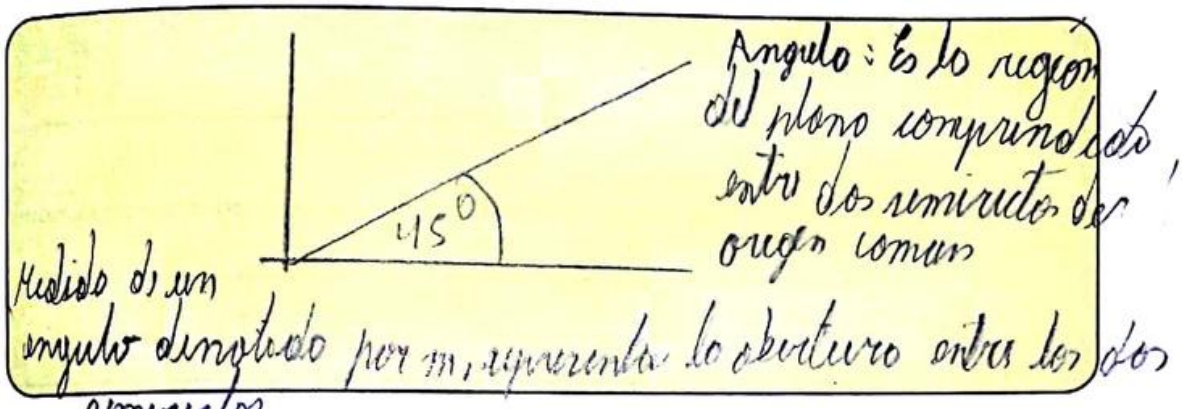
Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

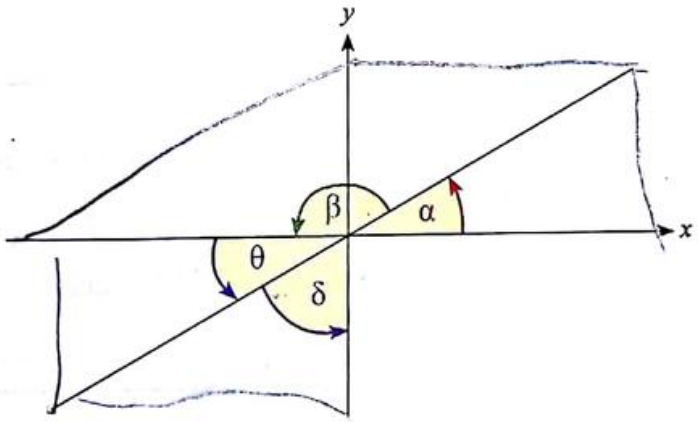
5.1 Ángulos y sus medidas

Autoevaluación

1) Dibuje un ángulo especificando su medida en grados sexagesimales. Luego, explique la diferencia que existe entre los conceptos de ángulo y medida de un ángulo.



2) Considere los ángulos de la siguiente figura y califique las proposiciones dadas como verdaderas (1) o falsas (0).



2 II

a) El ángulo cuya medida es α está en posición normal. [1]

b) $\beta = \frac{\pi}{2}$ radianes [0]

c) Los ángulos de medidas α y β son consecutivos dado que son adyacentes. [1]

d) Los ángulos de medidas β y θ no son opuestos por el vértice, pero los ángulos de medidas α y θ sí lo son. [1]

e) Los ángulos de medidas θ y δ son complementarios. [1]

f) Si $\theta = 30°$, entonces $\delta = 50°$. [0]

Scanned by CamScanner

3) Convierta a grados sexagesimales las siguientes medidas de ángulos en radianes.

a) $\frac{\pi}{15}$ $\frac{180}{\pi} = 12°$

b) $\frac{\pi}{18}$ $\frac{180}{\pi} = 10°$

c) $\frac{25\pi}{9}$ $\frac{180}{\pi} = 500°$

d) $\frac{3}{4\pi^{-1}}$ $\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 135°$

4) Convierta a radianes las siguientes medidas de ángulos en grados sexagesimales.

a) $150° \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$

b) $75° \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$

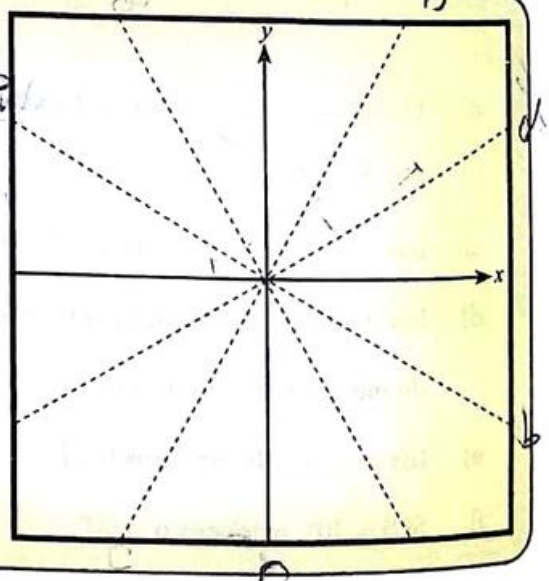
c) $120° \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$

5) Ubique en el sistema de coordenadas adjunto, los ángulos en posición estándar correspondientes a las siguientes medidas:

a) $-225°$ b) $-35°$ c) $-\frac{2\pi}{3}$ *radianes* d) $\frac{\pi}{4}$ *radianes* e) $150°$

$-\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = -120°$

$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45°$



Scanned by CamScanner

5.2 Funciones trigonométricas elementales

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada la medida de un ángulo, explicar sus seis relaciones trigonométricas mediante la circunferencia de radio unitario.
- Dadas las medidas de varios ángulos notables en grados sexagesimales o radianes, indicar el valor de sus seis relaciones trigonométricas.
- Dada la medida de un ángulo ubicado en el primer cuadrante, deducir los valores de las relaciones trigonométricas de las medidas de los ángulos asociados a él, ubicados en los otros cuadrantes.
- Calcular el valor de expresiones trigonométricas empleando las relaciones de los ángulos notables.

Si utilizamos una circunferencia de radio unitario, cuyo centro está en el origen del sistema de coordenadas rectangulares, podemos definir las coordenadas de cualquier punto $P(a, b)$ perteneciente a la circunferencia en el plano. Estas coordenadas dependerán de la medida del segmento que une el origen de coordenadas y el punto P, que en este caso es 1; y, de la medida del ángulo, la cual podrá ser denotada, además de las letras griegas, por variables como x, y o z, cuyo valor representa la abertura entre dicho segmento y el semieje horizontal positivo.

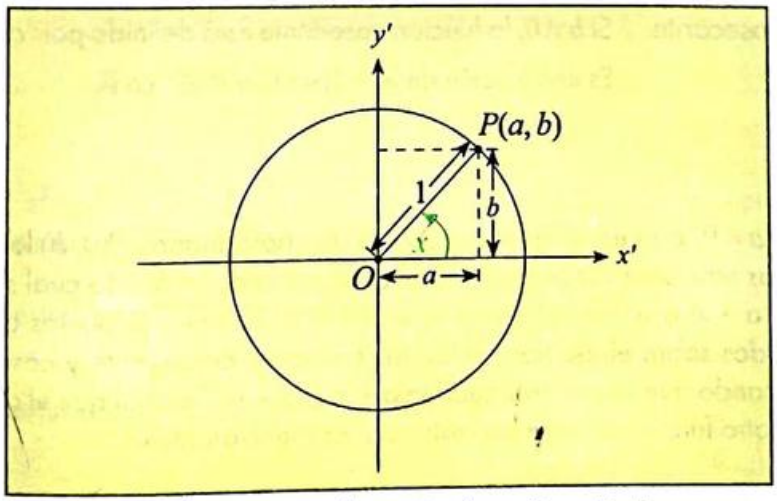


Figura 5.7: Circunferencia de radio unitario.

A partir de la circunferencia unitaria de la figura 5.7, se pueden establecer los valores de las seis relaciones trigonométricas de cualquier ángulo, con las cuales, y escogiendo los dominios adecuados en $\mathbf{R}$, se definen las seis funciones trigonométricas que se estudiarán en este capítulo.

Scanned by CamScanner

Definición 5.8 (Funciones trigonométricas)

Sea $P(a, b)$ un punto sobre la circunferencia de radio unitario y x la medida del ángulo en posición estándar que forma el segmento $\overline{OP}$, con el semieje horizontal positivo:

Función Seno La función seno está definida por: $sen(x) = \frac{b}{1}$. Es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Función Coseno La función coseno está definida por: $cos(x) = \frac{a}{1}$. Es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Función Tangente Si $a \neq 0$, la función tangente está definida por: $tan(x) = \frac{b}{a}$. Es una función de $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathbb{R}$.

Función Cotangente Si $b \neq 0$, la función cotangente está definida por: $cot(x) = \frac{a}{b}$. Es una función de $\mathbb{R} - \{(n\pi), n \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathbb{R}$.

Función Secante Si $a \neq 0$, la función secante está definida por: $sec(x) = \frac{1}{a}$. Es una función de $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathbb{R}$.

Función Cosecante Si $b \neq 0$, la función cosecante está definida por: $csc(x) = \frac{1}{b}$. Es una función de $\mathbb{R} - \{(n\pi), n \in \mathbb{Z}\}$ en $\mathbb{R}$.

Observe que si $a = 0$, esto es, se generan puntos de coordenadas $P(0, b)$ localizados sobre el eje vertical, las funciones tangente y secante no están definidas, lo cual significa que sus valores tienden a $+\infty$ o a $-\infty$. Mientras que si $b = 0$, obtenemos puntos de coordenadas $P(a, 0)$ localizados sobre el eje horizontal, las funciones cotangente y cosecante no están definidas, implicando que sus valores tienden a $+\infty$ o a $-\infty$. De aquí que el dominio de cada una de estas cuatro funciones tiene las restricciones mencionadas.

Por haber utilizado la circunferencia de radio unitario en esta definición, las funciones trigonométricas también se suelen denominar funciones circulares.

Estas funciones pueden extenderse periódicamente, considerando giros completos que determinan coincidencia en la posición final del segmento $\overline{OP}$. Una regla práctica para establecer los valores de las seis funciones trigonométricas para ángulos del II, III o IV

Scanned by CamScanner

cuadrante, es relacionar el ángulo con uno asociado del I cuadrante. Así, si x es la medida de un ángulo (en grados sexagesimales o radianes) del I cuadrante, un ángulo que tendría los mismos valores absolutos para sus seis funciones trigonométricas mide:

$180° - x$ o $\pi - x$ en el II cuadrante.
$180° + x$ o $\pi + x$ en el III cuadrante.
$360° - x$ o $2\pi - x$ en el IV cuadrante.

El signo se determina dependiendo de la ubicación del ángulo.

Ejemplo 5.7 Funciones trigonométricas.

Se conoce que el coseno de $\frac{\pi}{4}$ es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y se requiere el determinar el valor del coseno de $\frac{3\pi}{4}$, de $\frac{5\pi}{4}$ y de $\frac{7\pi}{4}$.

Solución:

Se verifica que efectivamente estas medidas de ángulos estén relacionadas con la de $\frac{\pi}{4}$. En este caso se cumple que:

$$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{7\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, el coseno de todas estas medidas de ángulos coincide con el coseno de $\frac{\pi}{4}$, en términos de valor absoluto.

Como $\frac{3\pi}{4}$ pertenece al II cuadrante, su coseno es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como $\frac{5\pi}{4}$ pertenece al III cuadrante, su coseno es $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Como $\frac{7\pi}{4}$ pertenece al IV cuadrante, su coseno es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Con el propósito de tener una visión clara del comportamiento de las funciones trigonométricas, en los próximos análisis, se hará referencia a conceptos relacionados que el lector podrá conocer más a fondo en el capítulo 7 de esta obra.

Scanned by CamScanner

A partir de la circunferencia de radio unitario y dependiendo del cuadrante en el que se localice el punto $P(a,b)$, es importante analizar el comportamiento de las seis funciones trigonométricas elementales. Iniciaremos, con la ubicación del punto en el primer cuadrante.

Análisis en el I Cuadrante

Funciones Seno y Coseno

En la figura siguiente, según la definición de las funciones seno y coseno, se observa que:

$$a = cos(x) \wedge b = sen(x)$$

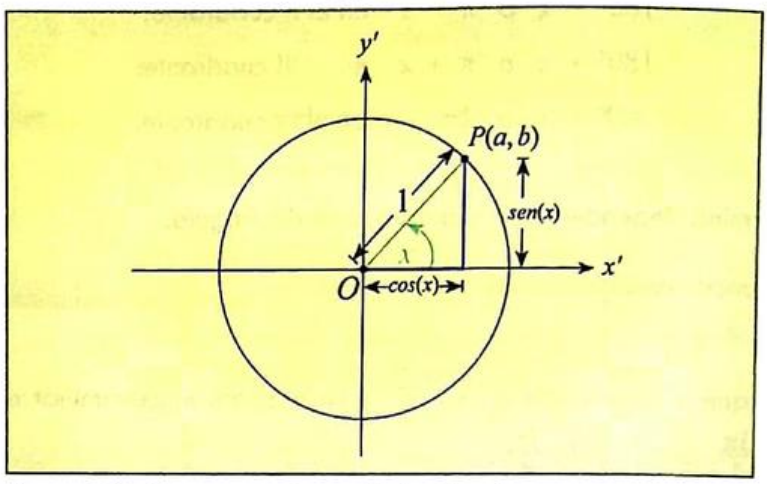


Figura 5.8: Comportamiento de las funciones seno y coseno.

Además, se cumple que:

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left[sen(x) > 0 \wedge cos(x) > 0\right]$$

Lo cual se verifica con el signo positivo tanto para la abscisa como para la ordenada del punto P.

Función Tangente

Tomando como referencia la figura 5.8 y considerando ahora los puntos $P(a, b)$ y $P'(a',b')$, tal como se muestra en la figura siguiente:

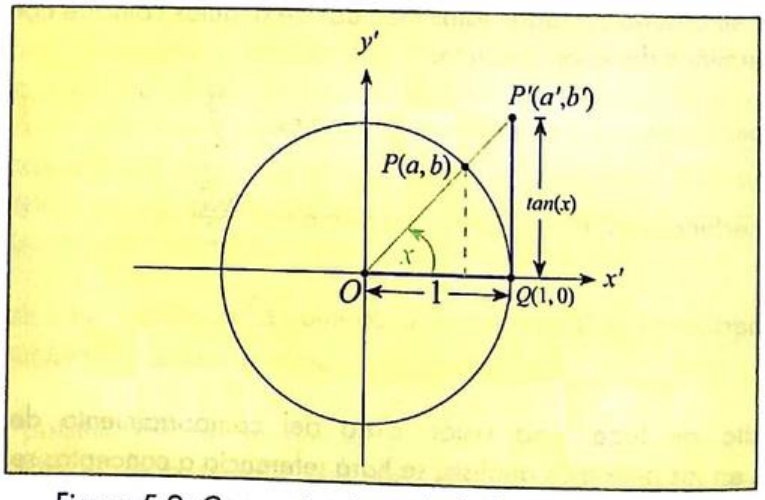


Figura 5.9: Comportamiento de la función tangente.

Scanned by CamScanner

Se concluye que:

$$tan(x)=\frac{b}{a}=\frac{sen(x)}{cos(x)}=\frac{b'}{a'}=\frac{tan(x)}{1}$$

En este caso, $a'=1$ y el lado opuesto al ángulo de medida x es tangente a la circunferencia en el punto $Q(1, 0)$.

Adicionalmente, se cumple que:

$$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\left[sen(x)>0\wedge cos(x)>0\right]\Rightarrow tan(x)>0$$

Función Cotangente

Consideremos ahora la figura 5.10 y los puntos $P(a, b)$ y $P'(a',b')$, tal como se muestra a continuación:

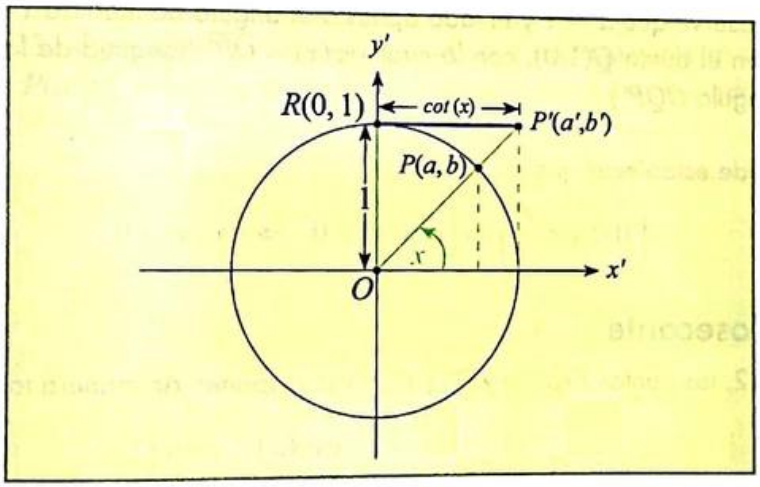


Figura 5.10: Comportamiento de la función cotangente.

Entonces se puede concluir que:

$$cot(x)=\frac{a}{b}=\frac{cos(x)}{sen(x)}=\frac{a'}{b'}=\frac{cot(x)}{1}$$

En este caso $b'=1$ y el lado adyacente al ángulo de medida x es paralelo a la recta tangente a la circunferencia en el punto $R(0, 1)$.

Análogamente al comportamiento de la función tangente, se cumple que:

$$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\left[sen(x)>0\wedge cos(x)>0\right]\Rightarrow cot(x)>0$$

Scanned by CamScanner

Función Secante

Tal como se muestra en la figura 5.11, se han localizado los puntos $P(a, b)$ y $P'(a',b')$, de manera que:

$$sec(x)=\frac{1}{a}=\frac{1}{cos(x)}=\frac{sec(x)}{a'}=\frac{sec(x)}{1}$$

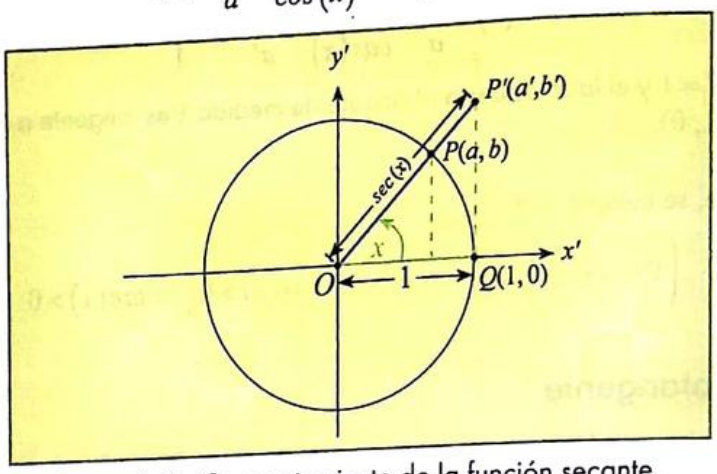


Figura 5.11: Comportamiento de la función secante.

En este caso, observe que $a' = 1$ y el lado opuesto al ángulo de medida x es tangente a la circunferencia en el punto $Q(1,0)$, con lo cual $sec(x) = \overline{OP'}$ (longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo OQP').

También se puede establecer que:

$$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\left[cos(x)>0\right]\Rightarrow sec(x)>0$$

Función Cosecante

En la figura 5.12, los puntos $P(a, b)$ y $P''(a'',b'')$ se disponen de manera tal que:

$$csc(x)=\frac{1}{b}=\frac{1}{sen(x)}=\frac{csc(x)}{b''}=\frac{csc(x)}{1}$$

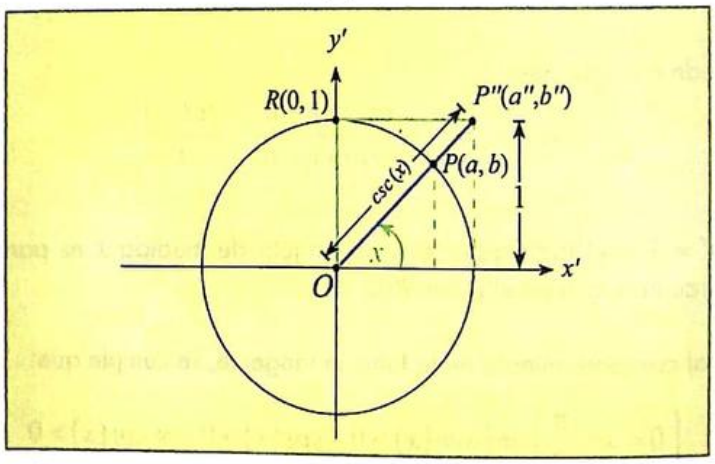


Figura 5.12: Comportamiento de la función cosecante.

Scanned by CamScanner

En este caso $b'' = 1$ y el lado adyacente al ángulo de medida x es paralelo a la recta tangente a la circunferencia en el punto $R(0, 1)$, con lo cual $csc(x) = \overline{OP''}$.

Esto permite evidenciar que:

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \left[sen(x) > 0\right] \Rightarrow csc(x) > 0$$

Para el segundo, tercer y cuarto cuadrantes, sólo consideraremos el comportamiento de las funciones seno y coseno, ya que como el lector puede concluir fácilmente, de acuerdo a los análisis anteriores, las cuatro restantes funciones pueden basarse en al menos una de estas funciones.

Análisis en el II Cuadrante

Funciones Seno y Coseno

En la figura 5.13 se presenta el ángulo de medida x perteneciente al II cuadrante y a partir del punto $P(a, b)$, se podría definir un ángulo suplementario de medida y tal como se muestra:

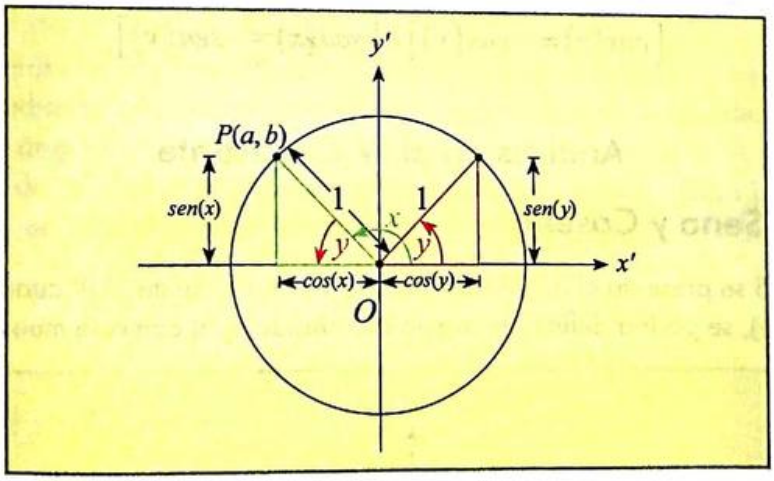


Figura 5.13: Funciones seno y coseno en el II cuadrante

Siendo así, se cumple que:

$$\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right) \wedge \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

Con lo cual, se puede concluir que:

$$\left[cos(x) = -cos(y)\right] \wedge \left[sen(x) = sen(y)\right]$$

Scanned by CamScanner

Análisis en el III Cuadrante

Funciones Seno y Coseno

En la figura 5.14 se presenta el ángulo de medida x perteneciente al III cuadrante y a partir del punto $P(a, b)$, se podría definir un ángulo de medida y tal como se muestra:

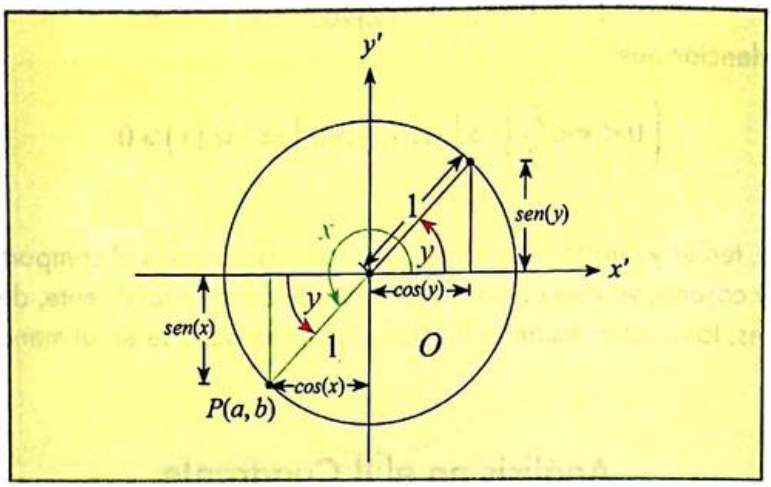


Figura 5.14: Funciones seno y coseno en el III cuadrante

Siendo así, se cumple que:

$$\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right) \wedge \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

Con lo cual, se puede concluir que:

$$\left[cos(x) = -cos(y)\right] \wedge \left[sen(x) = -sen(y)\right]$$

Análisis en el IV Cuadrante

Funciones Seno y Coseno

En la figura 5.15 se presenta el ángulo de medida x perteneciente al IV cuadrante y a partir del punto $P(a, b)$, se podría definir un ángulo de medida y tal como se muestra:

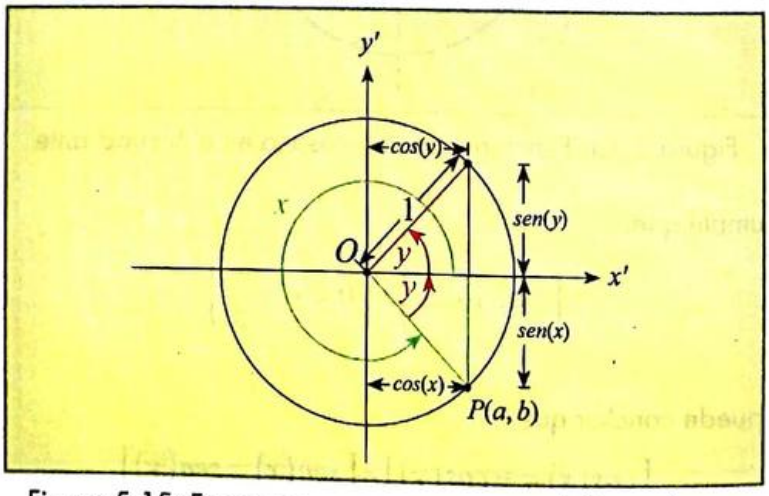


Figura 5.15: Funciones seno y coseno en el IV cuadrante

Scanned by CamScanner

Siendo así, se cumple que:

$$\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right) \wedge \left(0 < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

Con lo cual, se puede concluir que:

$$\left[cos(x) = cos(y)\right] \wedge \left[sen(x) = -sen(y)\right]$$

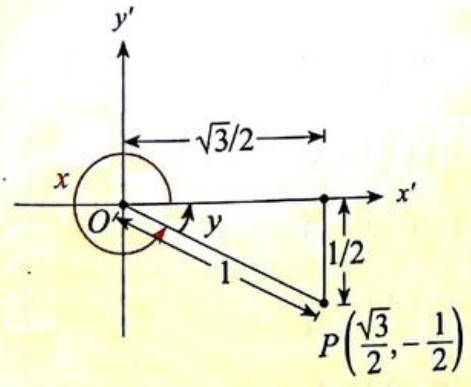
Con estas consideraciones y con el apoyo del Teorema de Pitágoras resultará muy fácil determinar los valores de las diferentes funciones trigonométricas, según fuere necesario.

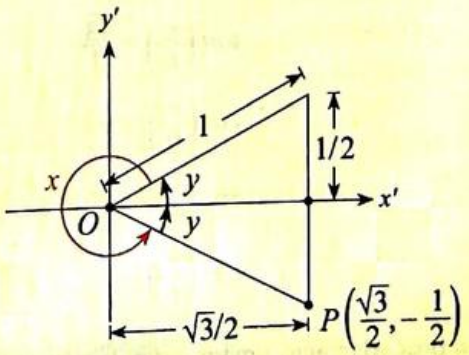
Ejemplo 5.8 Valores de las funciones trigonométricas.

Sea x la medida del ángulo en posición normal cuyo lado terminal contiene al segmento $\overline{OP}$, siendo O el origen, y P de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; determine los valores de las seis funciones trigonométricas, evaluadas en x.

Solución:

Si localizamos el punto P en el plano cartesiano, podremos notar que se encuentra en el IV cuadrante, tal como se muestra en la figura de la izquierda, identificándose además el ángulo de medida x y el ángulo agudo de medida y. A partir de la consideración de este último ángulo y siguiendo los procedimientos previamente estudiados, es posible generar la figura de la derecha:





Scanned by CamScanner

Con lo cual, los valores solicitados son:

$$sen(x) = -sen(y) = -\frac{1}{2} \quad cos(x) = cos(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad tan(x) = -tan(y) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$csc(x) = -csc(y) = -2 \quad sec(x) = sec(y) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad cot(x) = -cot(y) = -\sqrt{3}$$

Es útil y necesario conocer los valores de las funciones trigonométricas para las medidas de los ángulos más utilizados: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$.

Tomando como referencia la circunferencia de radio unitario y dibujando un triángulo equilátero cuyos lados también tienen longitud unitaria, se puede deducir que el eje X divide a dicho triángulo en dos triángulos rectángulos.

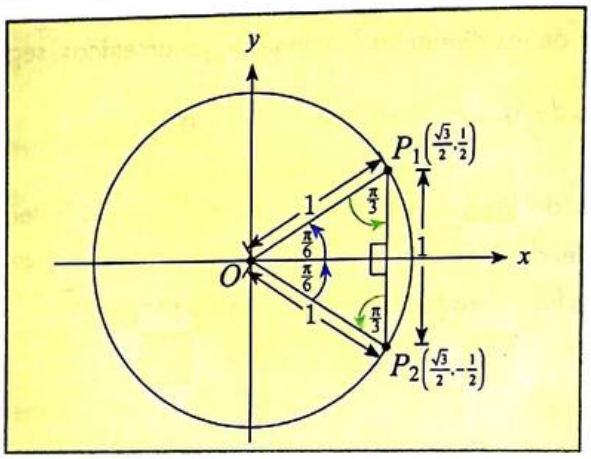


Figura 5.16: Triángulos rectángulos con medidas de ángulos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$.

Las coordenadas del punto P_1 son $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, cuya ordenada puede ser obtenida con base en las condiciones del triángulo; y su abscisa, aplicando el Teorema de Pitágoras. De acuerdo a las definiciones previas, se tiene que:

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \qquad cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sec\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$csc\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \qquad csc\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Con un procedimiento similar y dibujando un triángulo rectángulo isósceles en el interior de la circunferencia de radio unitario, tenemos:

Scanned by CamScanner

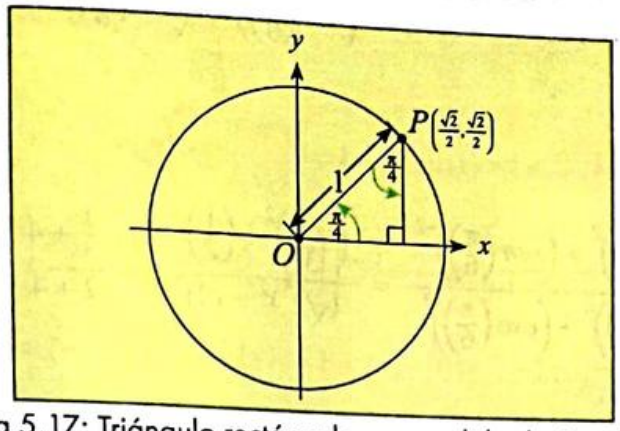


Figura 5.17: Triángulo rectángulo con medida de ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Se puede deducir por el Teorema de Pitágoras, que tanto la abscisa como la ordenada de P tienen la misma longitud, es decir, sus coordenadas son $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. De acuerdo a las definiciones previas, se tiene que:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cot\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$
$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad sec\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$
$$tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \qquad csc\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

En el Cuadro 5.2 se muestran los valores de las funciones trigonométricas de las medidas de los ángulos más conocidos, que son convenientes recordar:

Medida del ángulo (x)	$sen(x)$	$cos(x)$	$tan(x)$	$cot(x)$	$sec(x)$	$csc(x)$
$0=0°$	0	1	0	*	1	*
$\frac{\pi}{6}=30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
$\frac{\pi}{4}=45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}=60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}=90°$	1	0	*	0	*	1
$\pi=180°$	0	−1	0	*	−1	*
$\frac{3\pi}{2}=270°$	−1	0	*	0	*	−1
$2\pi=360°$	0	1	0	*	1	*

(*) La función no está definida

Cuadro 5.2: Funciones trigonométricas de medidas de ángulos notables.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.9 Expresiones trigonométricas.

Determine el valor de la expresión: $\dfrac{\left(tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2+\left(sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-2}}{\left(csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2+\left(csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}$

Solución:

$$\frac{\left(tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2+\left(sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-2}}{\left(csc\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2+\left(csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{(\sqrt{2})^2+(2)^2}=\frac{\frac{1}{3}+4}{2+4}=\frac{13}{18}$$

Ejemplo 5.10 Expresiones trigonométricas.

Determine el valor de la expresión: $\dfrac{sen\left(\frac{\pi}{6}\right)+\left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{-2}}{sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)+cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Solución:

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{6}\right)+\left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{-2}}{sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)+cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3+8}{6}}{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

$$=\left(\frac{11}{3(\sqrt{2}+1)}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$=\frac{11}{3}(\sqrt{2}-1)$$

Ejemplo 5.11 Evaluación de una función trigonométrica.

Sea la función $f:\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$ con regla de correspondencia $f(x)=1-2\,sgn(sen(x))$, calcule los siguientes valores:

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

c) $f(2\pi)$

Scanned by CamScanner

Solución:

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1-2\,sgn\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1-2\,sgn(1) = 1-2(1) = -1$

b) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1-2\,sgn\left(sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1-2\,sgn\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1-2(-1) = 3$

c) $f(2\pi) = 1-2\,sgn(sen(2\pi)) = 1-2\,sgn(0) = 1-2(0) = 1$

Ejemplo 5.12 Expresiones trigonométricas.

Calcule el valor aproximado de: $log\left(100 + tan\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{9\pi}{16}+\frac{27\pi}{64}+\ldots\right)\right)$

Solución:

El argumento de la función tangente es la suma de los términos de una progresión geométrica infinita con primer término $a = \frac{3\pi}{4}$ y razón $r = \frac{3}{4}$.

La suma de todos los términos de la progresión geométrica se puede aproximar por:

$$P_\infty \approx \frac{a}{1-r} \approx \frac{\frac{3\pi}{4}}{1-\frac{3}{4}} \approx \frac{\frac{3\pi}{4}}{\frac{1}{4}} \approx 3\pi$$

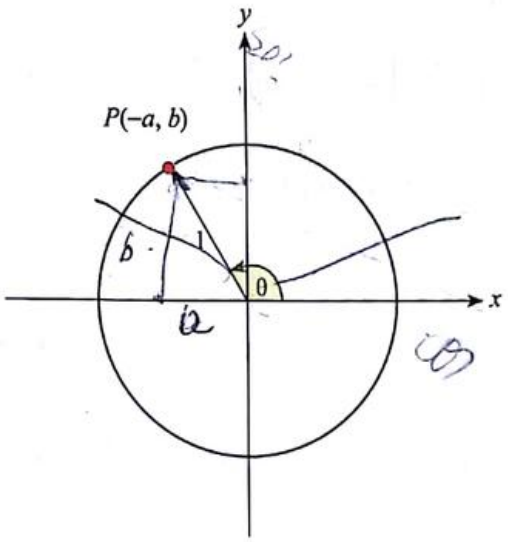
Entonces:

$$log\left(100 + tan\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{9\pi}{16} + \frac{27\pi}{64} + \ldots\right)\right) \approx log(100 + tan(3\pi)) \approx log(100 + 0) \approx 2$$

Scanned by CamScanner

1) Sean $a > 0$, $b > 0$, el punto $P(-a, b)$ mostrado en la figura adjunta pertenece a la circunferencia unitaria centrada en el origen de coordenadas rectangulares.

a) Determine una expresión para cada una de las seis relaciones trigonométricas del ángulo de medida θ.



$\sin = \frac{b}{1}$ $\csc = \frac{1}{b}$

$\cos = \frac{-a}{1}$ $\sec = \frac{1}{-a}$

$\tan = \frac{b}{-a}$ $\cot = \frac{-a}{b}$

b) Si para el punto $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ la medida del ángulo correspondiente es $\theta = \frac{5\pi}{6}$, determine el valor de la siguiente expresión trigonométrica:

$$\cos(\theta) + \left[1 + (\cos(\theta))(\sec(\theta))\right]^{\csc(\theta)} - \sqrt{(\operatorname{sen}(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \left[1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right]^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + [1 + (-1)]^2 - \sqrt{1}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{4} - \frac{1}{1}$$

$$\frac{-\sqrt{3} + 8 - 2}{2}$$

$$\frac{6 - \sqrt{3}}{2}$$

Scanned by CamScanner

2) Analice el problema resuelto a continuación, detecte errores y corríjalos.

Si $sen(15°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, determine $sen(165°)$, $sen(195°)$, $sen(345°)$

Solución:

$$sen(165°) = sen(180° - 15°) = sen(180°) - sen(15°) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$sen(180° + 15°) = sen(180°) + sen(15°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$sen(345°) = sen(360° - 15°) = sen(360°) - sen(15°) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Sen(165) = Sen(90-75) = Sen(90) - Sen(75) = Sen 15° = $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Sen(345) = Sen(15 - 360) = Sen(15) - Sen(360) = Sen 345° =

$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

3) Determine el valor de la siguiente expresión trigonométrica: 32

$$\left(7+\cos(\pi)+4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{\frac{2}{3}} + \pi^2\left[1+sen(\pi)-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$\left(7+(-1)+4\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{2/3} + 1\,[1+0-1]$

$\sqrt[3]{8^2} + 0$

$\sqrt[3]{(2^3)^2}$ $\sqrt[3]{2^6}$ $2^2 = 4$ R//

Scanned by CamScanner

5.3 Gráficas de funciones trigonométricas

Objetivos

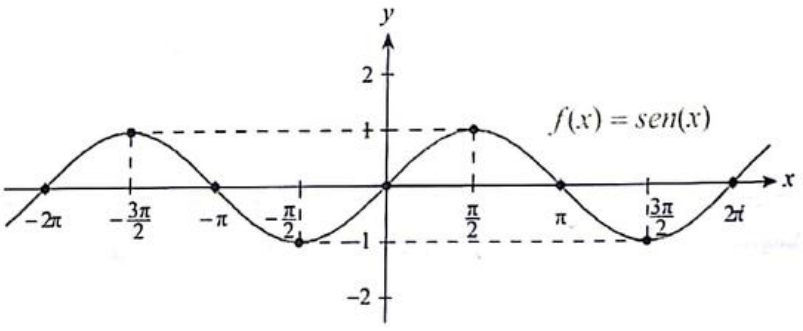
Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada la regla de correspondencia de una función trigonométrica, analizarla gráficamente especificando dominio, rango, período fundamental, cotas, asíntotas, intervalos de monotonía y otras características gráficas.
- Dada la gráfica estándar de una función trigonométrica (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante), aplicar técnicas de graficación para obtener nuevas funciones trigonométricas.
- Realizar composiciones con funciones trigonométricas, identificando gráficas, así como sus principales características.
- Realizar demostraciones usando propiedades de las funciones trigonométricas.
- Aplicar gráficas de las funciones trigonométricas a problemas de la vida diaria.

Tal como conocemos, los ángulos pueden ser medidos en grados sexagesimales o radianes. Puesto que ahora estamos interesados en graficar las funciones trigonométricas, la escala en el eje horizontal del plano cartesiano será especificada en radianes (números reales) y las divisiones que se consideren corresponderán a factores del número trascendente π; esto debido a que la variable independiente será la medida angular y la variable dependiente será la evaluación de dicha medida en alguna función trigonométrica.

Función Seno

x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0



La gráfica de la función $f(x) = sen(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R}$
- $rg\, f = [-1, 1]$
- f es impar.
- f es acotada, $|f(x)| \leq 1$.
- f es periódica, su período fundamental es $T = 2\pi$.
- Las intersecciones con el eje X están en el conjunto $\{x/x = n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.
- f es continua en todo su dominio.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.13 Gráfica de funciones trigonométricas.

Bosqueje la gráfica de f: $[-2\pi, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3sen(x) + sen(|x|)$.

Solución:

Utilizando la definición del valor absoluto:

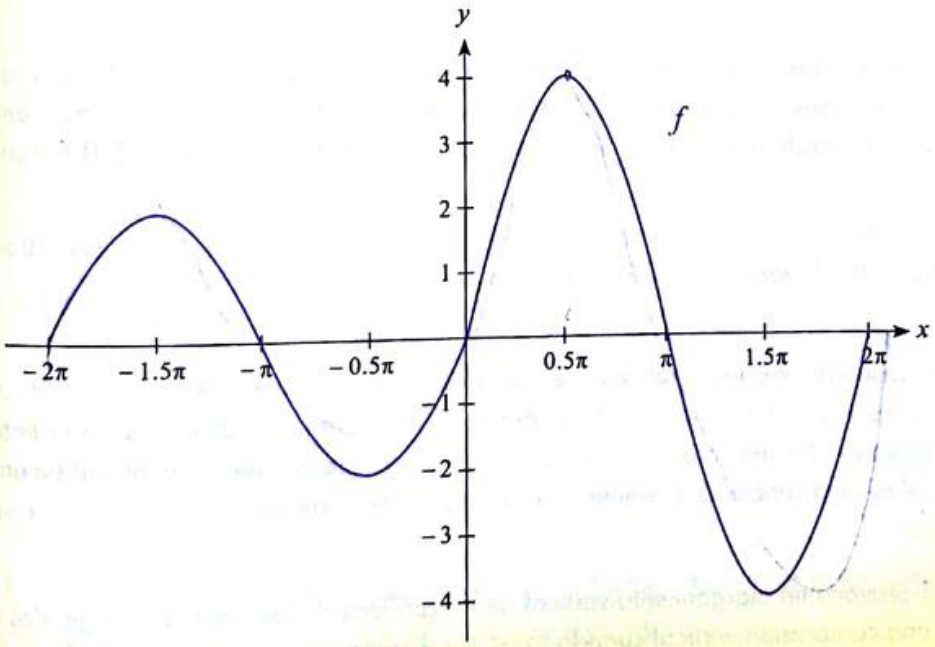
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow sen(|x|) = \begin{cases} sen(x), & x \geq 0 \\ sen(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Aplicando esta definición en la regla de correspondencia dada; esto es, considerando el dominio especificado:

$$f(x) = 3sen(x) + sen(|x|) = \begin{cases} 3sen(x) + sen(x), & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 3sen(x) - sen(x), & -2\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 3sen(x) + sen(|x|) = \begin{cases} 4sen(x), & 0 \leq x \leq 2\pi \\ 2sen(x), & -2\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

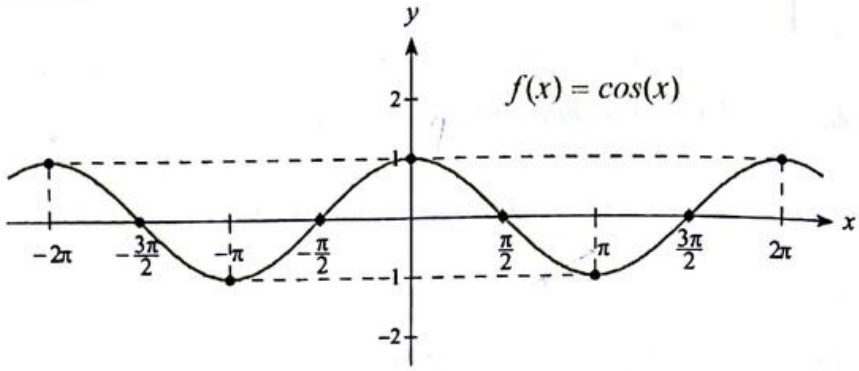
Luego, la gráfica requerida se muestra a continuación:



Scanned by CamScanner

Función Coseno

x	$f(x)$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



La gráfica de la función $f(x) = cos(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R}$
- $rg\, f = [-1, 1]$
- f es par.
- f es acotada, $|f(x)| \leq 1$.
- f es periódica, su período fundamental es $T = 2\pi$.
- Las intersecciones con el eje X están en el conjunto $\{x/x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$.
- f es continua en todo su dominio.

Ejemplo 5.14 Aplicación de las funciones trigonométricas.

Determine el valor de la suma: $cos(1°) + cos(2°) + cos(3°) + ... + cos(360°)$.

Solución:

Al observar detenidamente la gráfica de $f(x) = cos(x)$, se puede deducir que evaluando todos los valores de x entre 1° y 90°, más los que se encuentran entre 270° y 360°, resultan positivos, mientras que los valores de x entre 90° y 270° resultan negativos.

Tales resultados positivos se van a cancelar completamente con todos los valores negativos. Por lo tanto, el valor de la suma es 0.

Se puede observar en las gráficas de las dos primeras funciones trigonométricas que $-1 \leq sen(x) \leq 1$ y $-1 \leq cos(x) \leq 1$, es decir, $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = cos(x)$ tienen una cota superior en $y = 1$ y una cota inferior en $y = -1$, valores que definen su amplitud; sin embargo, se puede definir una amplitud diferente con las reglas de correspondencia $f(x) = A\, sen(x)$ y $g(x) = A\, cos(x)$.

Este valor A provoca un alargamiento vertical de las gráficas de las funciones originales cuando $|A| > 1$; o, una compresión vertical cuando $|A| < 1$, tal como se puede notar en la figura 5.18.

Scanned by CamScanner

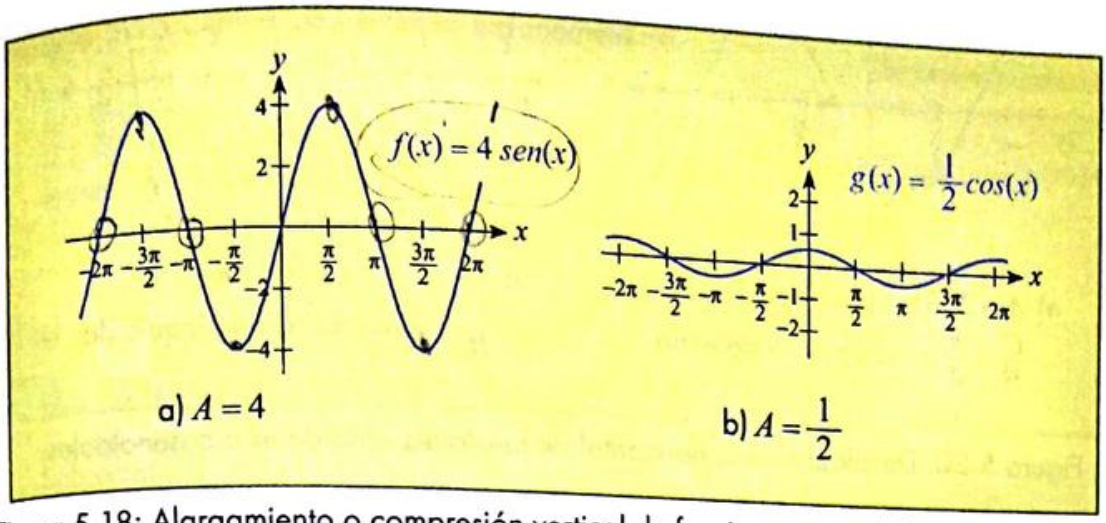


Figura 5.18: Alargamiento o compresión vertical de funciones senoidales o cosenoidales.

El período fundamental de las funciones seno y coseno también puede ser modificado. Las funciones $f(x) = sen(Bx)$ y $g(x) = cos(Bx)$ con $B > 0$, tienen un período $T = \frac{2\pi}{B}$. Esto representa una compresión horizontal para ambas funciones cuando $B > 1$; o, un alargamiento horizontal cuando $0 < B < 1$, los cuales se pueden observar en la figura 5.19.

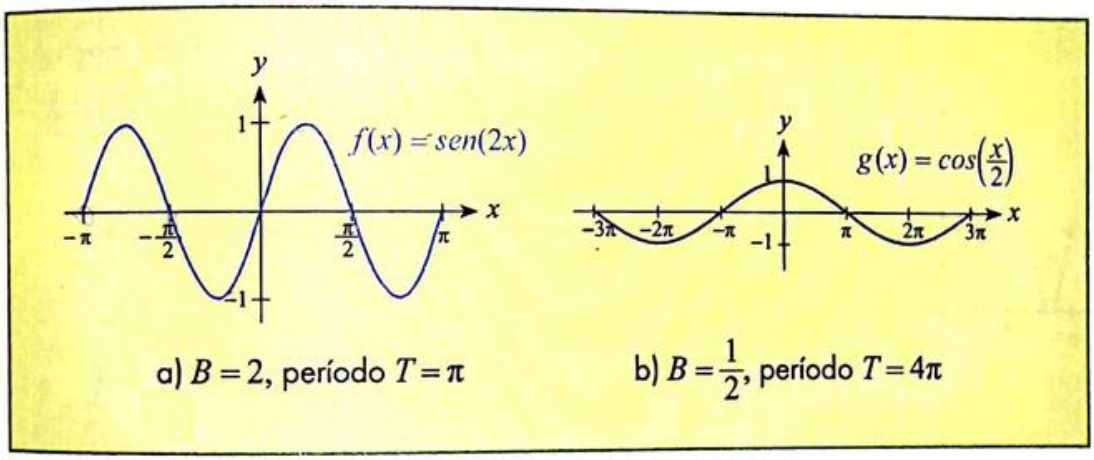


Figura 5.19: Compresión o alargamiento horizontal de funciones trigonométricas senoidales o cosenoidales.

Si el signo de B es negativo, se verifica el mismo cambio en el período fundamental de la función, pero adicionalmente se aplica un efecto de reflexión respecto al eje Y.

Ahora analizaremos las gráficas de $f(x) = A\,sen(Bx + C)$ y $g(x) = A\,cos(Bx + C)$, las cuales tienen amplitud $|A|$, período $\frac{2\pi}{B}$ y un desfase (desplazamiento horizontal) de $\frac{C}{B}$ unidades.

El sentido del desplazamiento depende del signo de $\frac{C}{B}$. La figura 5.20 ilustra tal efecto sobre las gráficas del seno y del coseno, respectivamente.

Scanned by CamScanner

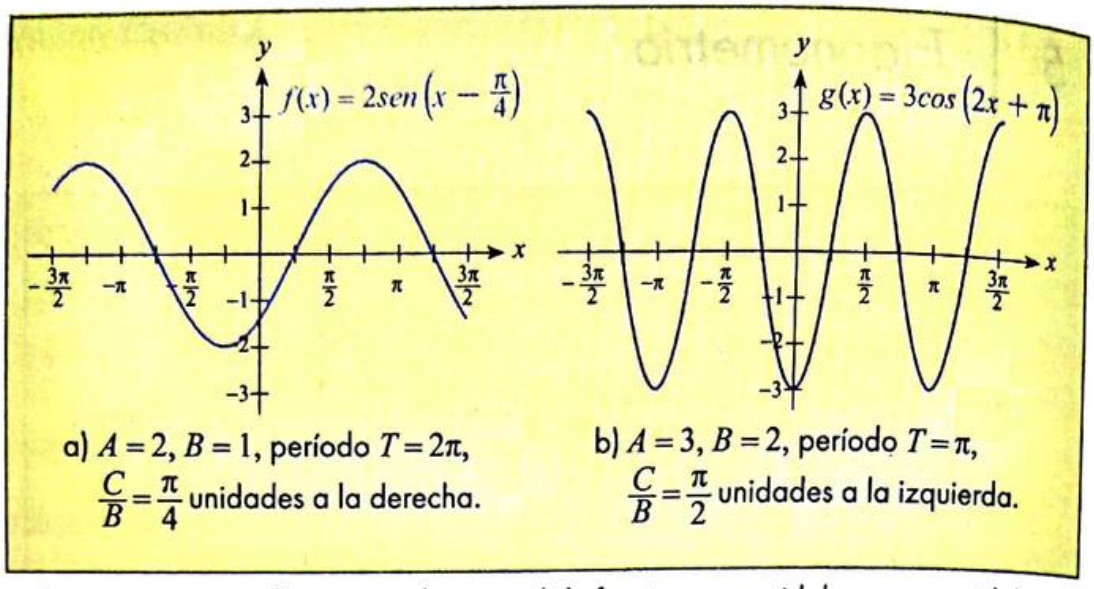


Figura 5.20: Desplazamiento horizontal de funciones senoidales o cosenoidales.

Si a las funciones anteriores se les suma algebraicamente un valor D, se definen las siguientes reglas de correspondencia $f(x) = A\,sen(Bx + C) + D$ y $g(x) = A\,cos(Bx + C) + D$.

El efecto de este valor D consiste en un desplazamiento vertical cuya dirección dependerá de su signo, es decir, si $D > 0$ la gráfica se desplazará D unidades hacia arriba; y, si $D < 0$ la gráfica se desplazará D unidades hacia abajo. En la figura 5.21 se presenta tal efecto.

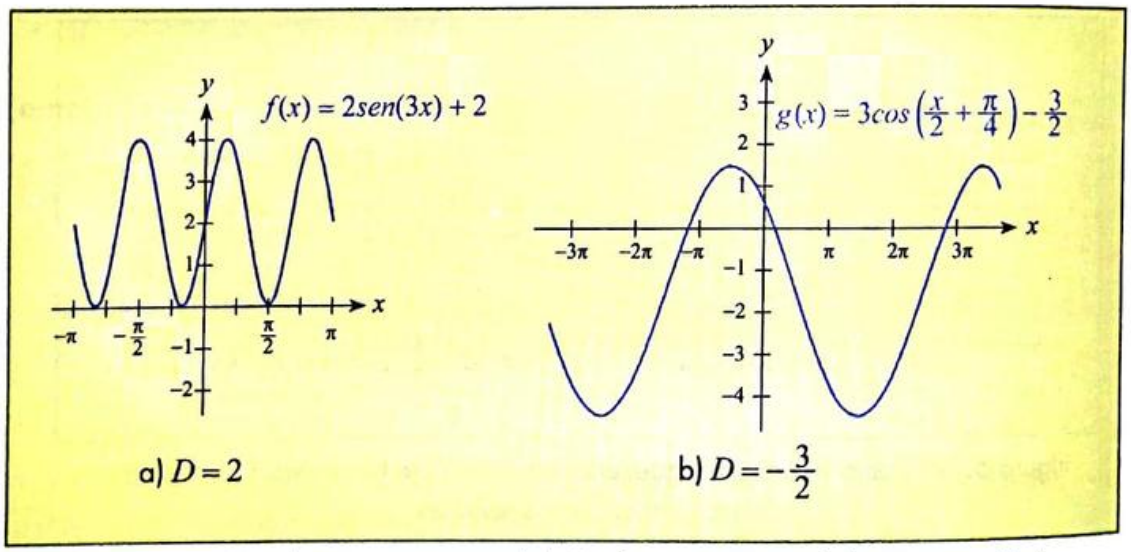


Figura 5.21: Desplazamiento vertical de las funciones senoidales o cosenoidales.

Las cotas de estas funciones trigonométricas presentan cambios. En la figura 5.21 (a), las cotas inferior y superior son 0 y 4, respectivamente. En la figura 5.21 (b), las cotas inferior y superior son $-\frac{9}{2}$ y $\frac{3}{2}$, respectivamente.

Cuando se combinan varios efectos sobre la gráfica, es recomendable hacer los cambios en el siguiente orden: reflexión horizontal, cambio del período, desfase, cambio en la amplitud, reflexión vertical; y, desplazamiento vertical.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.15 Gráfica de funciones trigonométricas.

Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2\,sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $rg\,f = [-2, 2]$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\,[f(-x) = f(x)]$

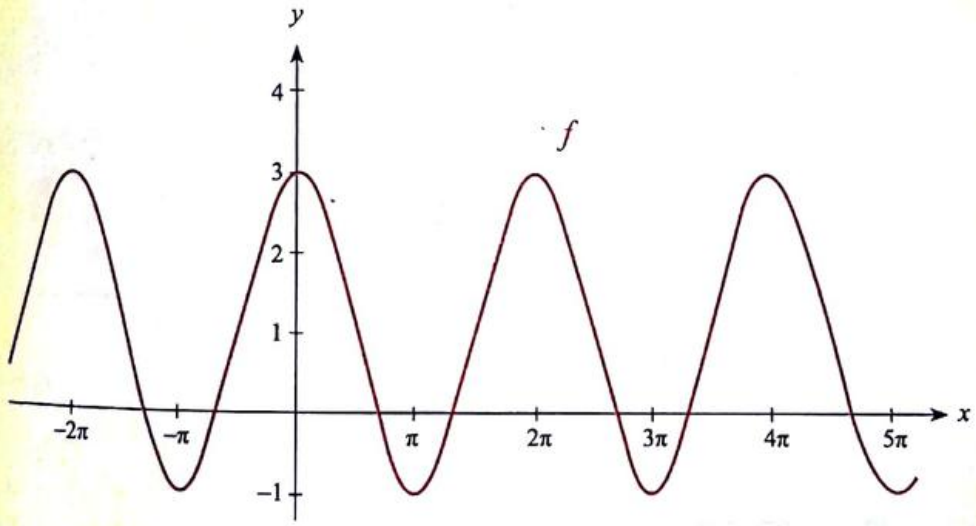
c) $\exists x \in \mathbb{R}\,[f(x) < -1]$

Solución:

Con base en la regla de correspondencia de f y tomando como referencia la gráfica de la función seno, podemos concluir que:

- Su amplitud es $|A| = 2$.
- Su período fundamental es $T = 2\pi$.
- Su desplazamiento horizontal es $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda.
- Su desplazamiento vertical es de 1 unidad hacia arriba.

La gráfica de f es:



Analizando las opciones:

a) Se puede observar que $rg\,f = [-1, 3]$. Por lo tanto, esta proposición es falsa.

b) La definición dada corresponde a la de una función par. Efectivamente, la gráfica de f es simétrica respecto al eje Y, lo cual convierte esta proposición en verdadera.

c) El valor mínimo de f es -1. No existe la posibilidad de obtener un valor menor que éste. Esta proposición es falsa.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.16 Gráfica de funciones trigonométricas.

Si f es una función de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{2}\cos(4x) + 2$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x, |f(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) $\forall x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), [(x_1 < x_2) \rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))]$

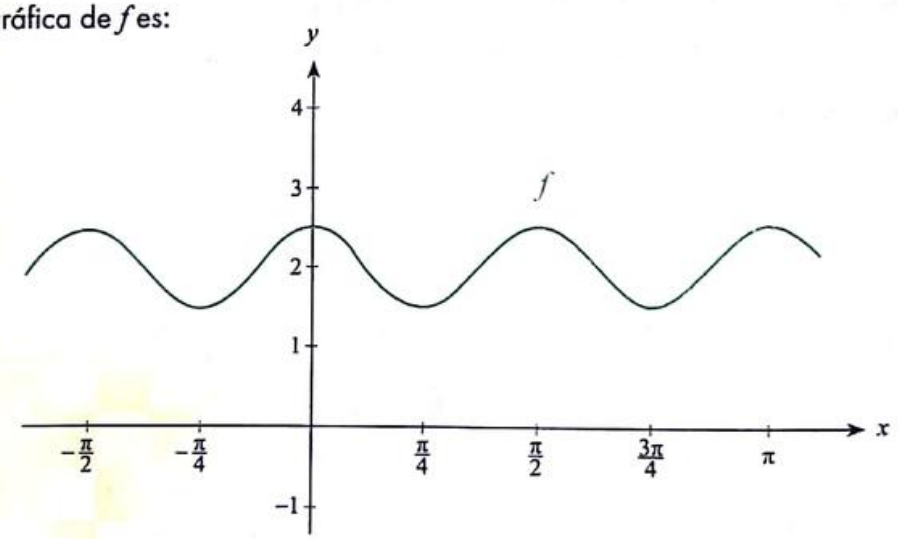
c) $\forall x, [f(x + 2\pi) = f(x)]$

Solución:

Con base en la regla de correspondencia de f y tomando como referencia la gráfica de la función coseno, podemos concluir que:

- Su amplitud es $|A| = \frac{1}{2}$.
- Su período fundamental es $T = \frac{\pi}{2}$.
- Su desplazamiento vertical es 2 unidades hacia arriba.

La gráfica de f es:



Analizando las opciones:

a) Se puede observar que $rg\, f = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Por lo tanto, esta proposición es falsa.

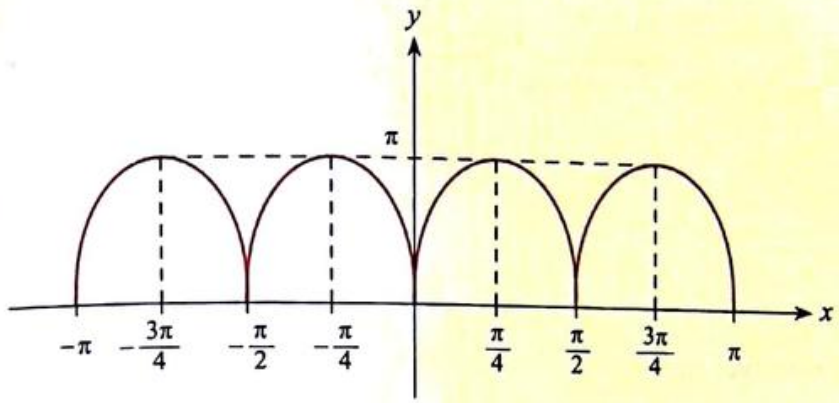
b) La definición dada corresponde a la de una función creciente. Efectivamente, f lo es en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, lo cual convierte a esta proposición en verdadera.

c) El período fundamental de f es $T = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto, $T = 2\pi$ también es otro período de la función. Esta proposición es verdadera.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.17 Gráfica de funciones trigonométricas.

Determine una regla de correspondencia para la función trigonométrica $f: [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$, cuya gráfica se adjunta:



Solución:

Se puede observar que la amplitud es $|A| = \pi$.

Como la función siempre es positiva, se deduce que se ha aplicado el valor absoluto a una función cuyo período fundamental era π, la cual podría ser $f(x) = sen(2x)$.

Con estas observaciones, podemos concluir que una posible regla de correspondencia para f es: $f(x) = \pi\,|sen(2x)|$.

También se podría considerar la regla de correspondencia de la función $cos(2x)$, con amplitud π y desplazamiento de $\frac{\pi}{4}$ unidades hacia la derecha.

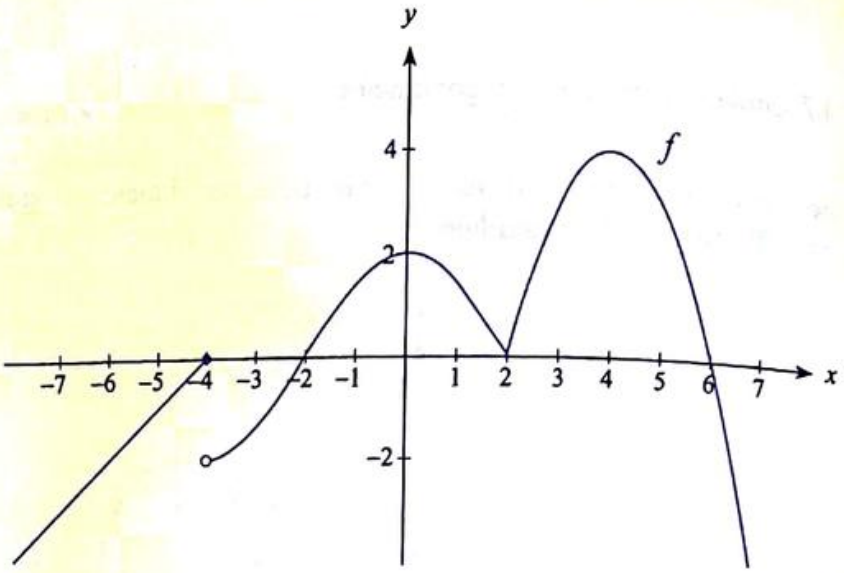
Esto es, $f(x) = \pi \left| cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right|$.

Ejemplo 5.18 Gráfica de funciones de variable real.

Bosqueje la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leq -4 \\ 2\,cos\left(\frac{\pi}{4}x\right), & -4 < x \leq 2 \\ -(x-4)^2 + 4, & x > 2 \end{cases}$ y adicionalmente indique sus características.

Scanned by CamScanner

Solución:



Se puede observar que:

- $dom\, f = \mathbb{R}$
- $rg\, f = (-\infty, 4]$
- f es creciente en $(-\infty, -4) \cup (-4, 0) \cup (2, 4)$.
- f es decreciente en $(0, 2) \cup (4, +\infty)$.
- f está acotada superiormente por la recta $y = 4$.
- f tiene una discontinuidad en $x = -4$.

Ejemplo 5.19 Gráfica de funciones de variable real.

Bosqueje la gráfica de la función de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2}x\right), & 0 \le x \le 8 \\ ln\,(-x+1), & x < 0 \end{cases}$$

Adicionalmente:

a) Indique sus características.

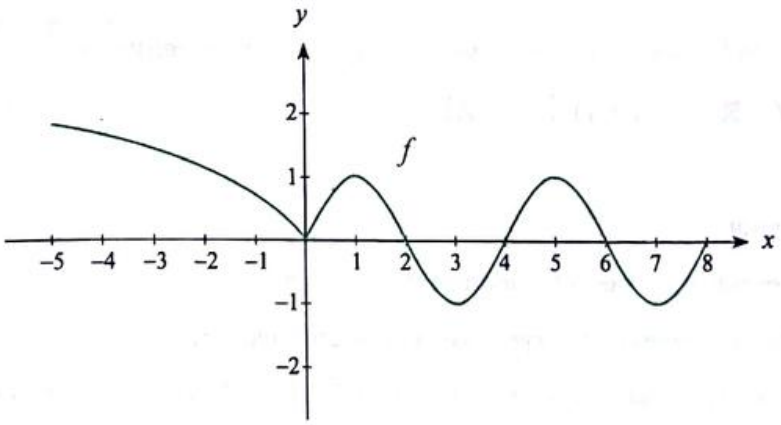
b) Calcule $f(1)$ y $f(1-e)$.

Scanned by CamScanner

Solución:

Para el tramo de la función senoidal $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, se calculará $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, cuando $0 \leq x \leq 8$.

Construir la gráfica de $f(x) = ln[-(x-1)]$ implica desplazar $ln(-x)$ una unidad hacia la derecha.



a) Se puede observar que:

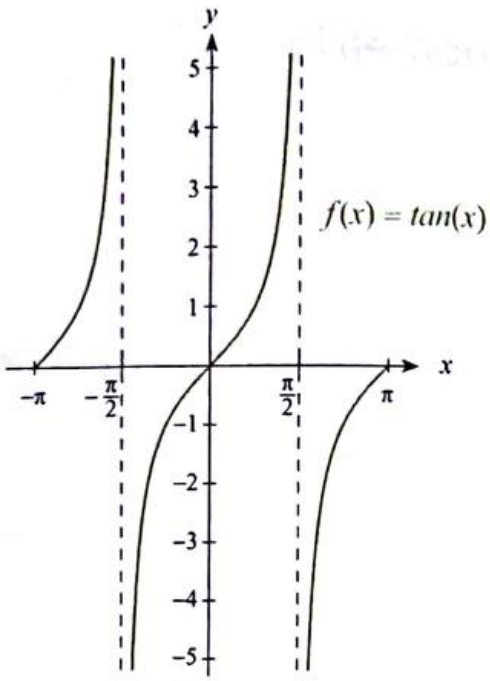
- $dom\, f = (-\infty, 8]$
- $rg\, f = [-1, +\infty)$
- f es creciente en $(0, 1) \cup (3, 5) \cup (7, 8)$.
- f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (1, 3) \cup (5, 7)$.
- f está acotada inferiormente por la recta $y = -1$.
- f es continua, $\forall x \in dom\, f$.

b) $f(1) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f(1-e) = ln[-(1-e)+1] = ln(e) = 1$

Scanned by CamScanner

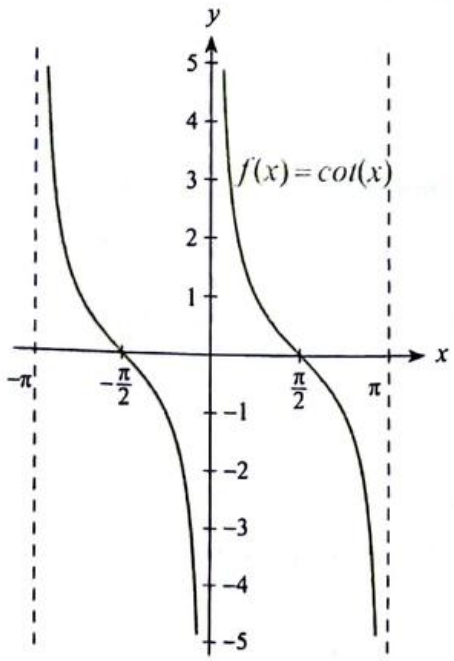
Función Tangente



La gráfica de la función $f(x) = tan(x)$ tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R} - \{(2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$
- $rg\, f = \mathbb{R}$
- f es impar.
- f es periódica, su período fundamental es $T = \pi$.
- Las intersecciones con el eje X están en el conjunto $\{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.
- Tiene asíntotas verticales $\forall x \in \{(2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$, lo cual significa que cuando x se aproxima por izquierda a múltiplos enteros impares de $\pi/2$, la función tiende a $+\infty$; mientras que cuando x se aproxima por derecha a estos valores, la función tiende a $-\infty$.

Función Cotangente



Scanned by CamScanner

La gráfica de la función $f(x) = cot(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbf{R} - \{n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$
- $rg\, f = \mathbf{R}$
- f es impar.
- f es periódica, su período fundamental es $T = \pi$.
- Las intersecciones con el eje X están en el conjunto $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$.
- Tiene asíntotas verticales $\forall x \in \{n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$, evidenciándose que cuando x se aproxima por izquierda a múltiplos enteros de π, la función tiende a $-\infty$; mientras que cuando se aproxima por derecha a estos valores, la función tiende a $+\infty$.

Ejemplo 5.20 Valores de las funciones trigonométricas.

Si $f(x) = tan\left(\frac{x}{2}\right) cot\left(\frac{x}{2}\right)$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, determine el valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Solución:

Evaluando $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{3}$ en la función dada, se tiene que:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = tan\left(\frac{\pi}{4}\right) cot\left(\frac{\pi}{4}\right) + tan\left(\frac{\pi}{6}\right) cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = (1)(1) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}) = 2$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

El lector puede comprobar que $f(x) = 1$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ejemplo 5.21 Gráficas de las funciones trigonométricas.

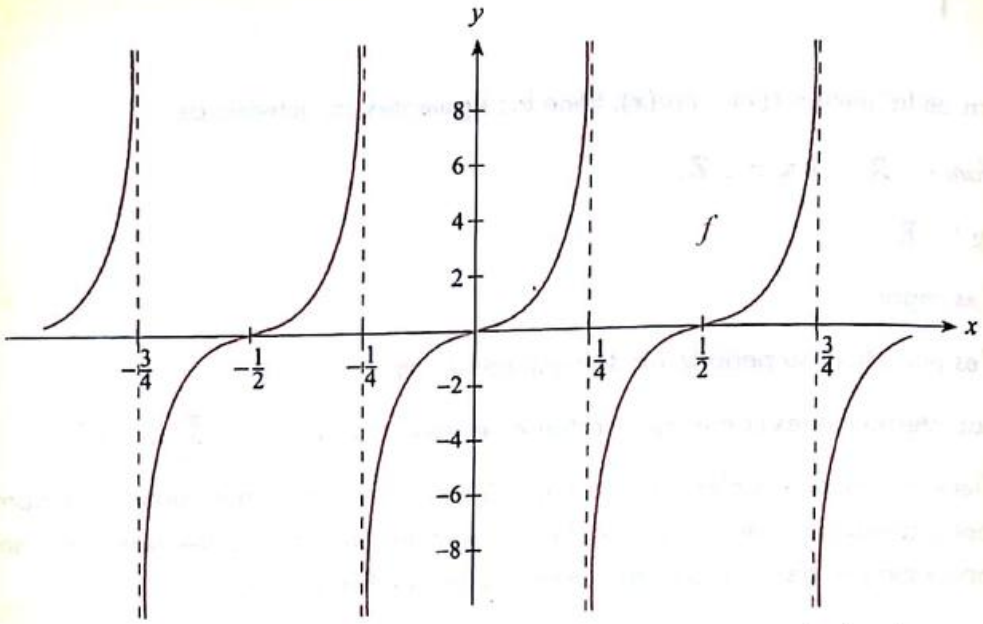
Bosqueje la gráfica de $f(x) = tan(2\pi x)$, especifique su dominio y sus características.

Solución:

El período fundamental de esta función es $T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$.

Scanned by CamScanner

Su gráfica es:



Su dominio es todo número real, menos los números impares multiplicados por el factor $\frac{1}{4}$, lo cual puede ser expresado así:

$$dom\, f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

f es sobreyectiva, impar, periódica y estrictamente creciente por intervalos.

Ejemplo 5.22 Propiedades de funciones trigonométricas.

Proporcione un contraejemplo para la siguiente proposición: " Si f y g son funciones periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con período fundamental T, entonces la función fg también es periódica con período fundamental T ".

Solución:

Para $f(x) = sen(x)$, su período fundamental $T = 2\pi$.
Para $g(x) = cos(x)$, su período fundamental $T = 2\pi$.
El producto entre las funciones f y g es:
$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = sen(x)\,cos(x)$

En la sección 5.5 se demostrará que $sen(x)\,cos(x) = \frac{1}{2}\,sen(2x)$.

Podemos notar que la función $(fg)(x) = \frac{1}{2}\,sen(2x)$ tiene período fundamental $T = \pi$, lo cual verifica que la proposición dada es falsa, es decir, $y = \frac{1}{2}\,sen(2x)$ constituye un contraejemplo apropiado.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.23 Gráficas de funciones trigonométricas.

Bosqueje la gráfica de las siguientes funciones:

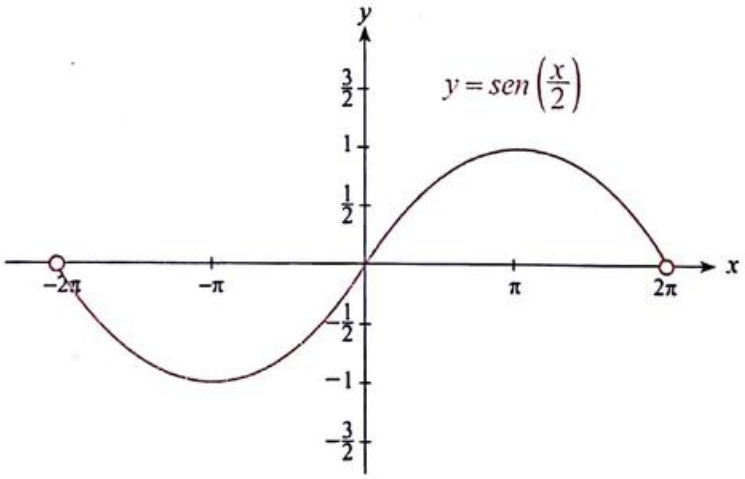
a) $f(x) = \left[\!\left[sen\left(\frac{x}{2}\right) \right]\!\right]$, $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

b) $g(x) = \mu\left(tan\left(\frac{x}{4}\right)\right)$, $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

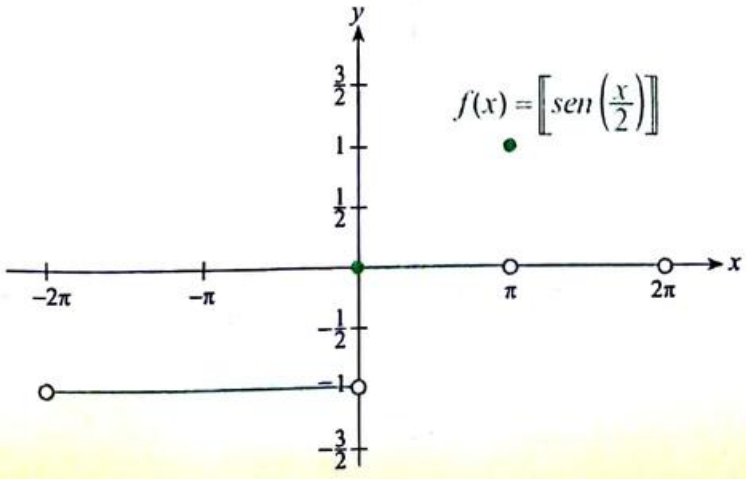
c) $h(x) = sgn\left(cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$, $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

Solución:

a) La función $y = sen\left(\frac{x}{2}\right)$ tiene período fundamental 4π, y su gráfica es:

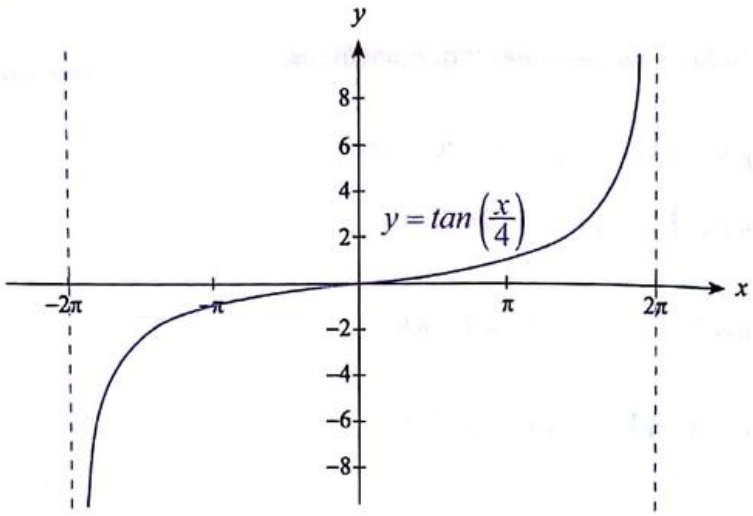


Al aplicar la definición de la función entero mayor, se obtiene:

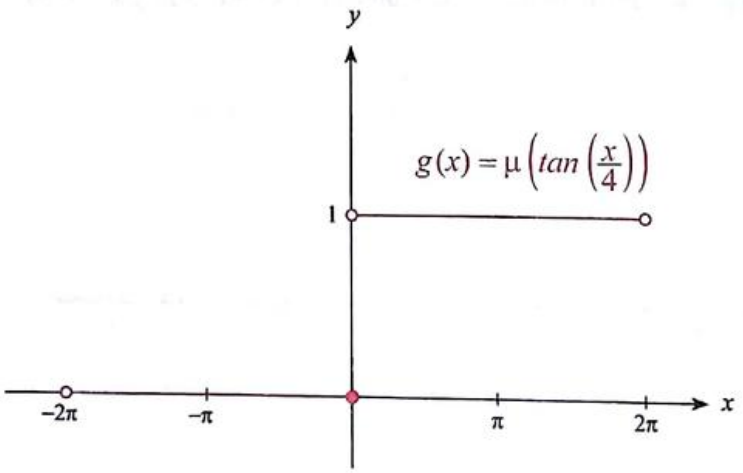


Scanned by CamScanner

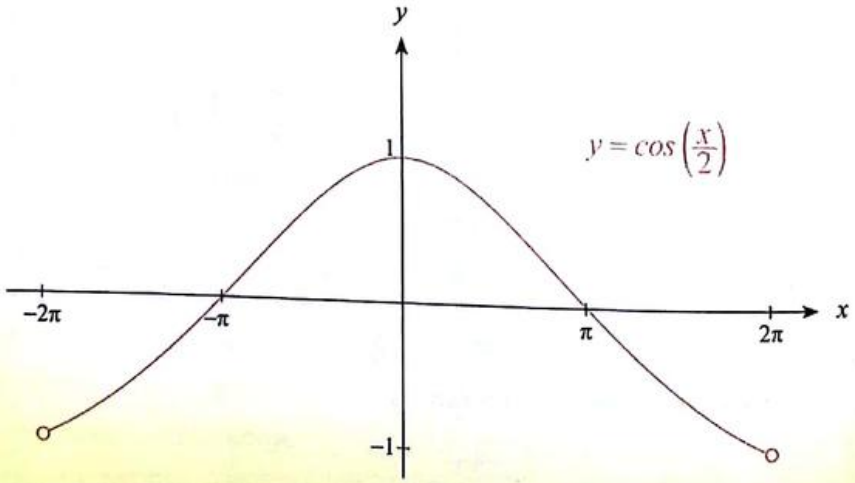
b) La función $y = tan\left(\frac{x}{4}\right)$ tiene período fundamental $T = 4\pi$, y su gráfica es:



Al aplicar la definición de la función escalón, se obtiene:

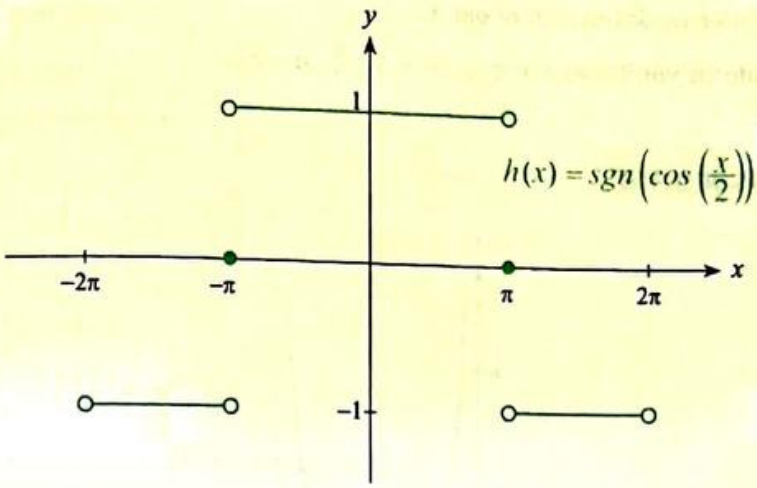


c) La función $y = cos\left(\frac{x}{2}\right)$ tiene período fundamental $T = 4\pi$, y su gráfica es:

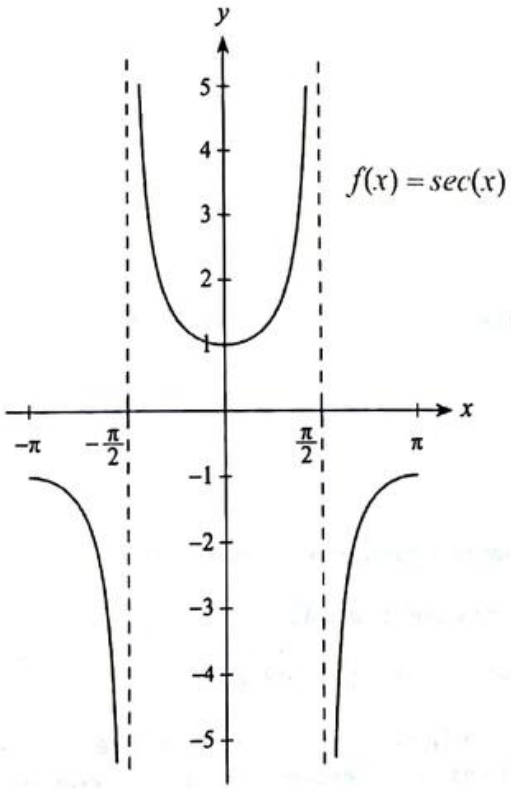


Scanned by CamScanner

Al aplicar la definición de la función signo, se obtiene:



Función Secante

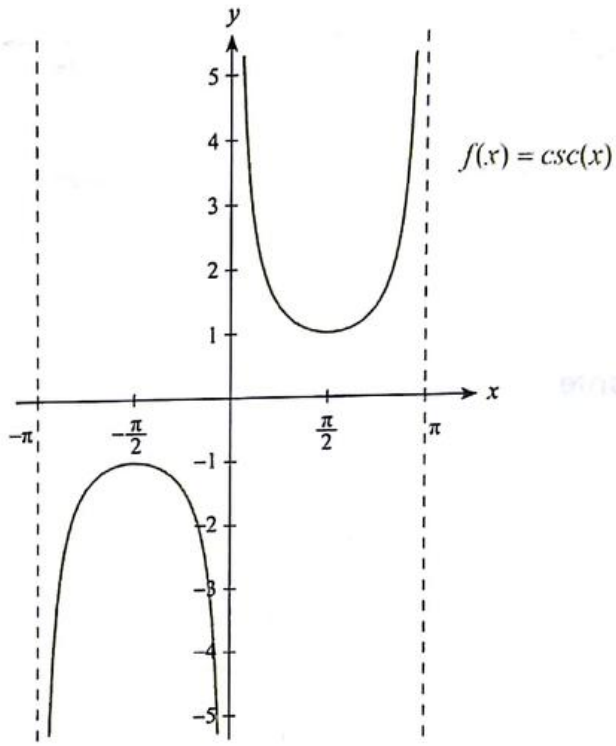


Scanned by CamScanner

La gráfica de la función $f(x) = sec(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R} - \{(2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$
- $rg\, f = \mathbb{R} - (-1, 1)$
- f es par.
- f es periódica, su período fundamental es $T = 2\pi$.
- No tiene intersecciones con el eje X.
- Tiene asíntotas verticales $\forall x \in \{(2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$.

Función Cosecante



La gráfica de la función $f(x) = csc(x)$, tiene las siguientes características:

- $dom\, f = \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$
- $rg\, f = \mathbb{R} - (-1, 1)$
- f es impar.
- f es periódica, su período fundamental es $T = 2\pi$.
- No tiene intersecciones con el eje X.
- Tiene asíntotas verticales $\forall x \in \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante también pueden experimentar desplazamientos horizontales y verticales, así como compresiones o alargamientos horizontales y verticales.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.24 Gráfica de una función trigonométrica.

A partir de la gráfica de la función $f(x) = sec(x)$, construya las gráficas de las siguientes funciones:

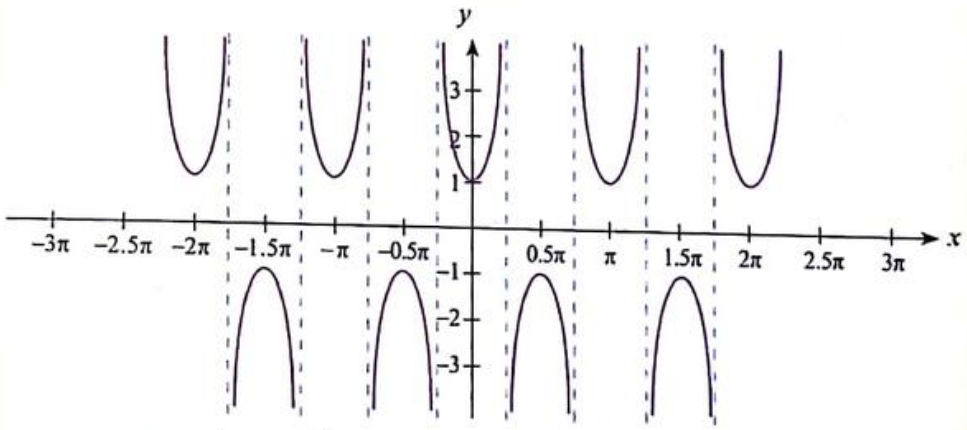
a) $g(x) = sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $h(x) = \left|sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\right|$

c) $m(x) = sec\left|2x - \frac{\pi}{2}\right|$

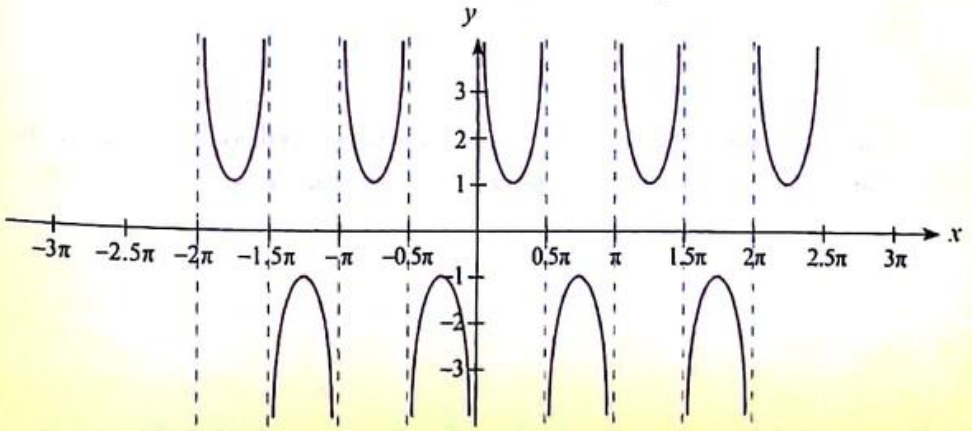
Solución:

Se obtiene la gráfica de la función $sec(2x)$:



a) $g(x) = sec\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

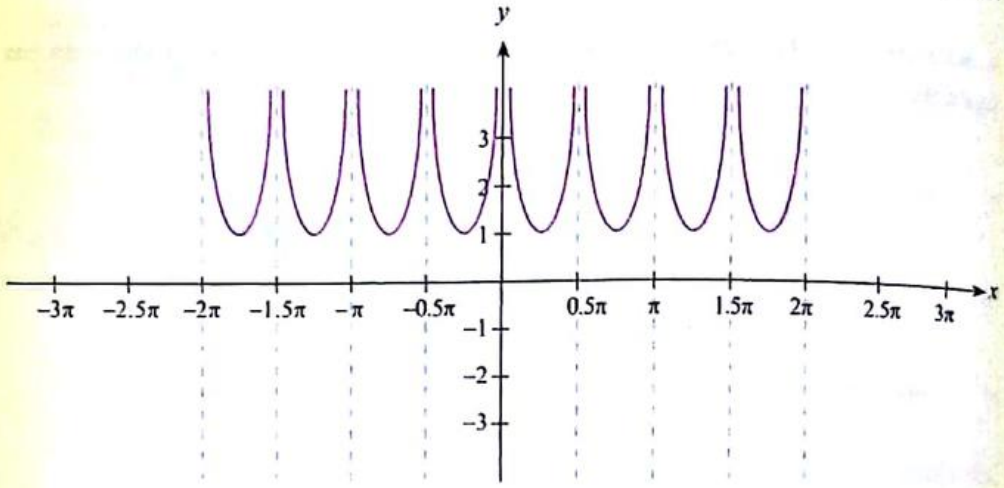
La función $sec(2x)$ sufre un desplazamiento de $\frac{\pi}{4}$ unidades a la derecha:



Scanned by CamScanner

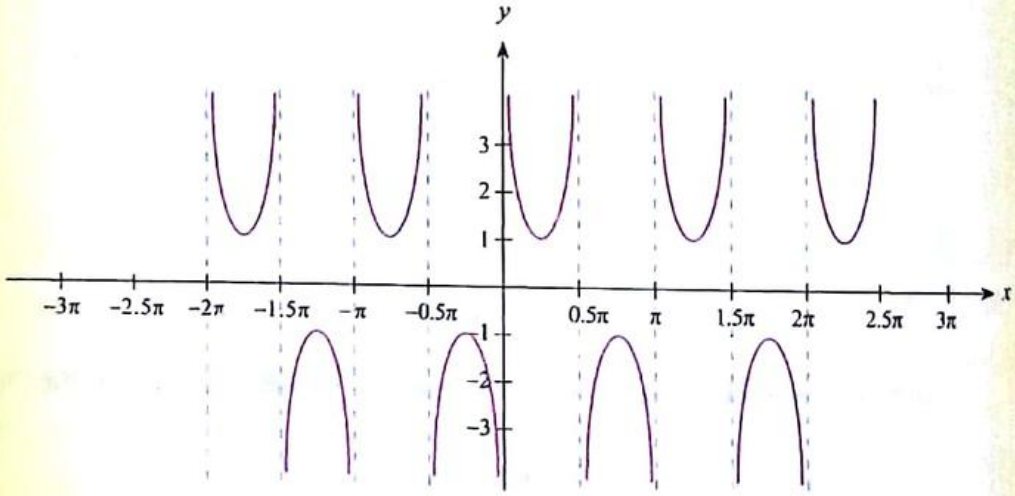
b) $h(x)=\left|sec\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|$

La función g experimenta una reflexión con respecto al eje X cuando $y<0$.



c) $m(x)=sec\left|2x-\frac{\pi}{2}\right|$

La función g se refleja con respecto al eje $x=\frac{\pi}{4}$ cuando $x>\frac{\pi}{4}$.



El lector puede notar que al hacer esta última reflexión la gráfica es la misma que la de la función g del literal a), lo cual lleva a concluir que:

$$sec\left|2x-\frac{\pi}{2}\right|=sec\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

Definitivamente, el estudio de las funciones trigonométricas y en particular de sus gráficas, es de mucha utilidad sobre todo cuando se emplean para modelar situaciones de la vida diaria, tal como se pretende ilustrar con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.25 Modelo depredador - presa.

Un bosque seco tropical contiene insectos de dos especies X e Y, siendo los insectos de la especie X depredadores de los insectos de la especie Y. Se conoce que la cantidad de insectos de la especie X varía entre 500 y 1 500; mientras que la cantidad de la especie Y varía entre 1 000 y 3 000. Además, la población de los insectos en el bosque varía con un período de 180 días. Si la especie X alcanza su población máxima 30 días después de la especie Y; y, la población para ambas especies tiene un comportamiento cosenoidal con respecto al tiempo:

a) Bosqueje un período fundamental de la gráfica de las funciones que describen la cantidad de individuos para cada especie en el tiempo, si se conoce que la población de la especie Y es máxima cuando $t = 0$ días.

b) Con base en los bosquejos anteriores, determine los valores de A, B, C y D en el modelo de las funciones que describen la cantidad de individuos para cada especie en el tiempo, si éste se ajusta a la ecuación $P(t) = A\cos(Bt + C) + D$, siendo $|C|$ el mínimo posible.

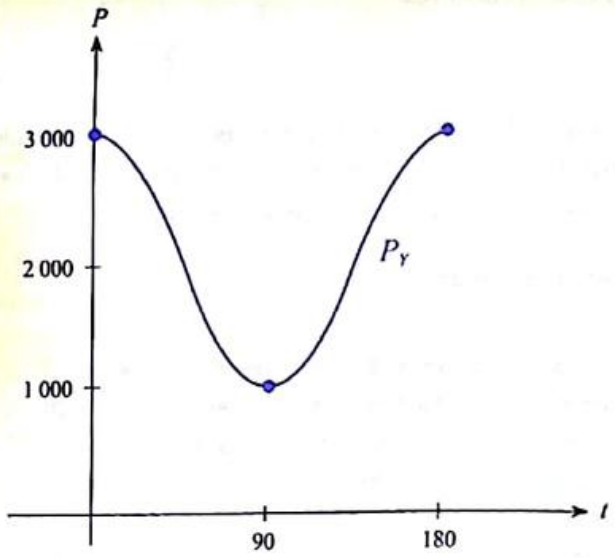
Solución:

a) Para realizar los bosquejos solicitados, se considerará como P_Y la función referida para la población de la especie Y, concluyéndose a partir de la información dada, lo siguiente:

- $rg\ P_Y = [1\,000, 3\,000]$
- $T(P_Y) = 180$
- $P_Y(0) = 3\,000$ (valor máximo)

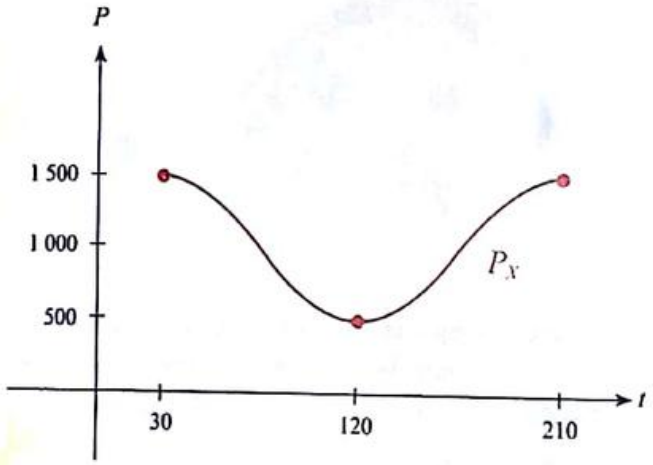
Como se trata de una función coseno su valor máximo ocurrirá en $t = 0$ días o en $t = 180$ días; así mismo su valor mínimo ocurrirá en $t = 90$ días, el cual corresponde a 1 000 insectos de esta especie. Siendo así, un bosquejo para la gráfica de P_Y sería:

Scanned by CamScanner



Para la función que describe la cantidad de individuos de la especie X, es decir P_X, el valor máximo así como sus otros valores ocurrirán 30 días después que la población Y. Dado que ambas funciones tienen el mismo período, P_X alcanzará sus valores máximos cuando $t = 30$ días o $t = 210$ días, correspondientes a 1 500 insectos, así como su valor mínimo en $t = 120$ días con 500 insectos.

Con estas consideraciones, un bosquejo para la gráfica de P_X quedaría como sigue:



b) A partir de los bosquejos, se definen las funciones correspondientes para ambas especies:

$$P_X(t) = A_X \cos(B_X t + C_X) + D_X$$

$$P_Y(t) = A_Y \cos(B_Y t + C_Y) + D_Y$$

Scanned by CamScanner

La amplitud, estaría dada por la mitad de la distancia de extremo a extremo del rango, éstas serían:

Para la especie X: $A_X = \frac{1500-500}{2} = 500$

Para la especie Y: $A_Y = \frac{3000-1000}{2} = 1000$

Luego, el desplazamiento vertical estaría dado por el valor localizado en la mitad de los valores extremos del rango:

Para la especie X: $D_X = 500 + A_X = 1500 - A_X = 1000$

Para la especie Y: $D_Y = 1000 + A_Y = 3000 - A_Y = 2000$

Se conoce que el período para ambas funciones, es 180 días, es decir:

$$T = 180 = \frac{2\pi}{B} \rightarrow B_X = B_Y = \frac{\pi}{90}$$

A partir del análisis previo se puede concluir que:

$$P_X(t) = 500\ cos\left(\frac{\pi}{90}t + C_X\right) + 1\,000$$

$$P_Y(t) = 1\,000\ cos\left(\frac{\pi}{90}t + C_Y\right) + 2\,000$$

Dado que la especie Y, alcanza su población máxima en $t = 0$, se puede decir que:

$$P_Y(0) = 3\,000 = 1\,000\ cos\left(\frac{\pi}{90}(0) + C_Y\right) + 2\,000 \rightarrow cos(C_Y) = 1$$

Como $|C_Y|$ debe ser el mínimo, entonces $C_Y = 0$.

Por otra parte, que la población de la especie X, alcance su máximo en $t = 30$ puede interpretarse como un desplazamiento horizontal; luego, el argumento de $P_X(t)$ sería:

$$\frac{\pi}{90}t + C_X = \frac{\pi}{90}(t-30) = \frac{\pi}{90}t - \frac{\pi}{3} \rightarrow C_X = -\frac{\pi}{3}$$

Otra opción para este desplazamiento podría ser, por ejemplo, $C_X = \frac{5\pi}{3}$; sin embargo, $C_X = -\frac{\pi}{3}$ cumple la condición de hacer que $|C_X|$ sea el mínimo posible.

Finalmente, las reglas de correspondencia de las funciones $P_X(t)$ y $P_Y(t)$ son:

$P_X(t) = 500\ cos\left(\frac{\pi}{90}t - \frac{\pi}{3}\right) + 1\,000$ y $P_Y(t) = 1\,000\ cos\left(\frac{\pi}{90}t\right) + 2\,000$

Scanned by CamScanner

En matemáticas, es muy común realizar aproximaciones para valores de funciones trigonométricas, tomando como punto de partida las funciones polinomiales. Aunque estas aplicaciones se estudiarán en cursos superiores de cálculo, en el siguiente ejemplo se ilustra, a un nivel básico, la relación muy cercana de estos dos tipos de funciones.

Ejemplo 5.26 Aproximación de valores de funciones trigonométricas.

Si se conoce que el desarrollo polinomial de la función seno está dado por la siguiente suma infinita de funciones polinomiales:

$$sen(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

a) Utilizando los 4 primeros términos de este desarrollo polinomial, obtenga aproximadamente el valor de $sen(\theta)$, si $\theta = 1$ *radián*.

b) Con la ayuda de un software graficador, obtenga la gráfica del polinomio de aproximación empleando sus cuatro primeros términos y verifique el valor obtenido en el literal anterior.

Solución:

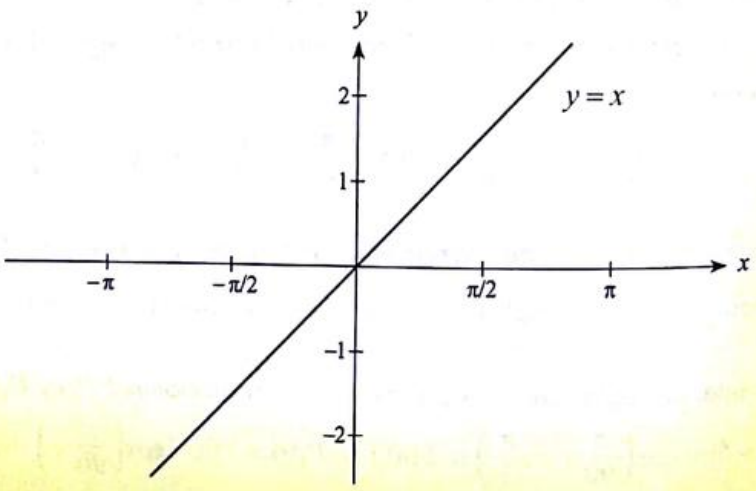
a) Reemplazando $\theta = 1$ *radián* en los 4 primeros términos de la expresión:

$$sen(1) \approx 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040}$$

$$sen(1) \approx \frac{5040 - 840 + 42 - 1}{5040} \approx \frac{4241}{5040} \approx 0.841$$

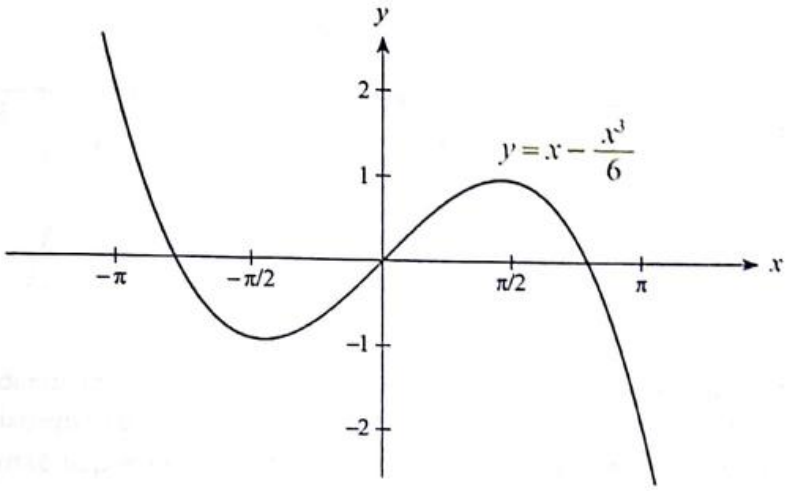
b) Con la ayuda de un software graficador, se puede observar la aproximación de la función trigonométrica $f(x) = sen(x)$ a partir del desarrollo polinomial dado. Para el efecto, se graficarán en diferentes pasos las sumas de los términos del polinomio, tal como se muestra a continuación:

- Primer paso: Gráfica de la función del primer término de la suma infinita.

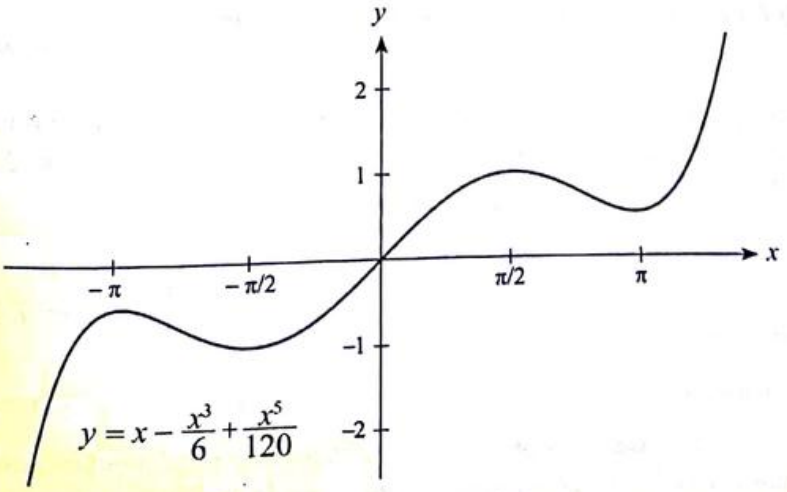


Scanned by CamScanner

- Segundo paso: Gráfica de la función que incluye los dos primeros términos de la suma infinita.

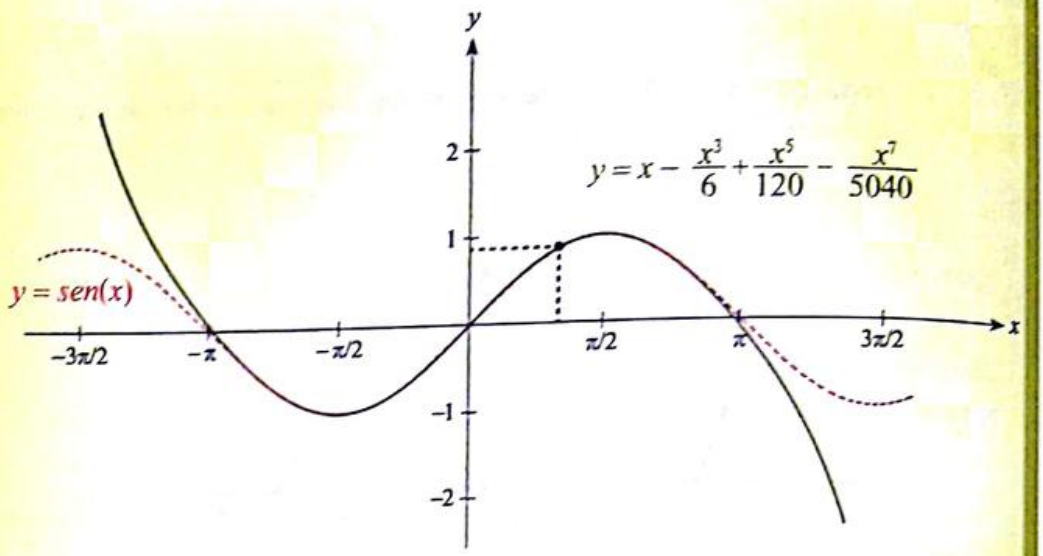


- Tercer paso: Gráfica de la función que incluye los tres primeros términos de la suma infinita.



Scanned by CamScanner

- **Cuarto paso: Gráfica de la función que incluye los cuatro primeros términos de la suma infinita.**



Tal como se puede observar en este último paso, al graficar el polinomio generado con los cuatro primeros términos de la suma infinita se obtiene la aproximación de la función seno requerida, lográndose verificar efectivamente que $sen(1) \approx 0.84$.

La Trigonometría tiene una amplia aplicación en la generación de ondas de voltaje o corriente en el campo de la electricidad. Uno de los instrumentos más utilizados en el registro y presentación gráfica de dichas ondas es el osciloscopio, tema sobre el cual trata el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.27 Aplicación de señales senoidales en electricidad.

Se conoce que la descripción matemática de una onda de voltaje variable medido en voltios respecto al tiempo t en segundos, está dada por $v(t) = V\ sen(2\pi f t + \theta)$, en la cual:

V : es el voltaje máximo,

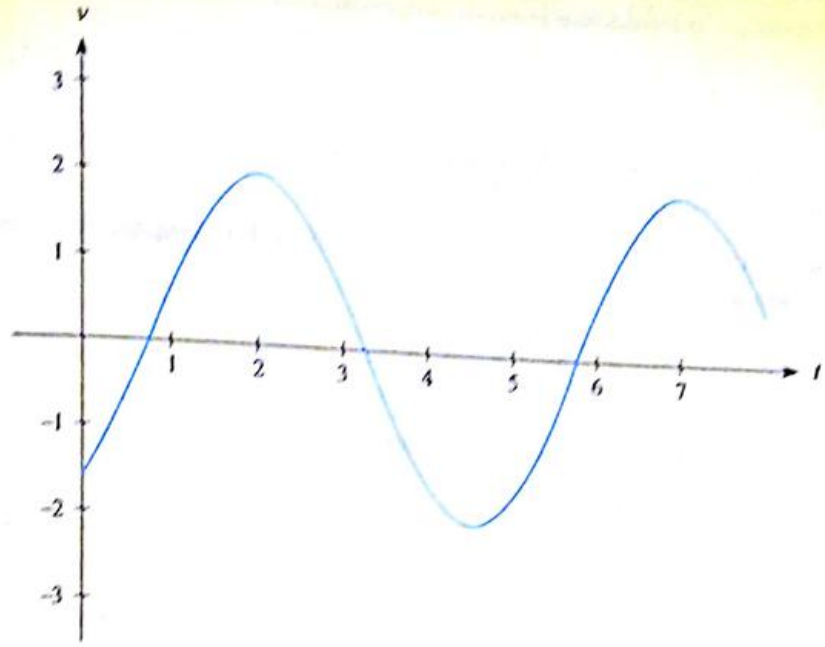
f : es la frecuencia medida en Hertz (Hz), donde $f = \frac{1}{T}$, siendo T el período fundamental; y,

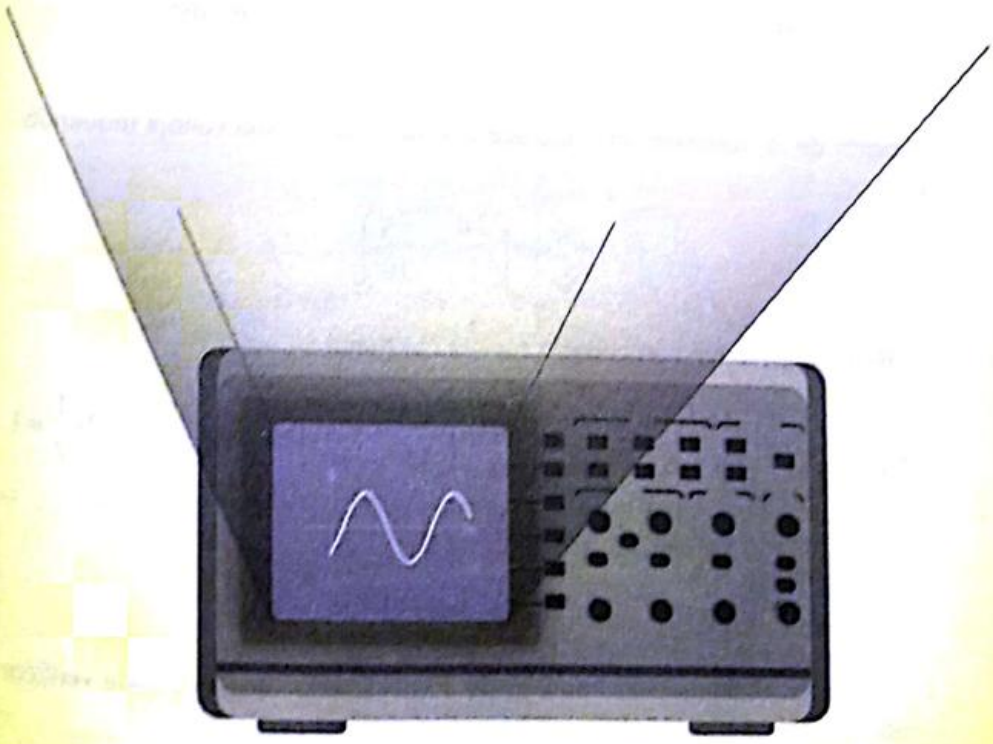
θ : es el desplazamiento de fase medido en radianes, tal que $-\pi \leq \theta < \pi$.

Si en una práctica de laboratorio se mide durante cierto intervalo de tiempo el voltaje que experimenta un circuito eléctrico con la ayuda de un osciloscopio; y, en su pantalla se visualiza la siguiente gráfica:

Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría





Scanned by CamScanner

Determine:

a) La ecuación de esta onda de voltaje.

b) En forma analítica, el voltaje que experimenta este circuito eléctrico a los $\frac{7}{6}s$ (segundos) de haber iniciado la medición; y, verifique este resultado con la ayuda de la salida que muestra el osciloscopio.

Solución:

a) Del análisis gráfico, en la salida del osciloscopio, se puede concluir que el máximo valor de voltaje es de 2 voltios.

Adicionalmente, desde $t = 2s$ hasta $t = 7s$ se ha completado un período fundamental, con lo cual:

$T = 5$, siendo $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5} Hz.$

Por otra parte, como $v(2) = 2$, se cumple que:

$$v(2) = 2sen\left(2\pi\frac{1}{5}(2) + \theta\right) = 2 \Rightarrow sen\left(\frac{4\pi}{5} + \theta\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{5} + \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{3\pi}{10}$$

por tanto, $\theta = -\frac{3\pi}{10}$ es la medida del desplazamiento de fase.

A partir de lo obtenido, se establece que la ecuación del voltaje requerida es:

$$v(t) = 2sen\left(\frac{2\pi}{5}t - \frac{3\pi}{10}\right)$$

b) Evaluando en la función cuando $t = \frac{7}{6}s$, se tiene:

$$v\left(\frac{7}{6}\right) = 2sen\left(\frac{2\pi}{5}\left(\frac{7}{6}\right) - \frac{3\pi}{10}\right) = 2sen\left(\frac{7\pi}{15} - \frac{3\pi}{10}\right) = 2sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

Con lo cual $v\left(\frac{7}{6}\right) = 1$

Por lo tanto, el voltaje solicitado es de 1 voltio, valor que se puede verificar gráficamente con la señal de salida que registra el osciloscopio.

Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

5.3 Gráficas de funciones trigonométricas

Autoevaluación

1) Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x)=\frac{1}{10}cos\left(\frac{\pi}{2}x-\pi\right)$.

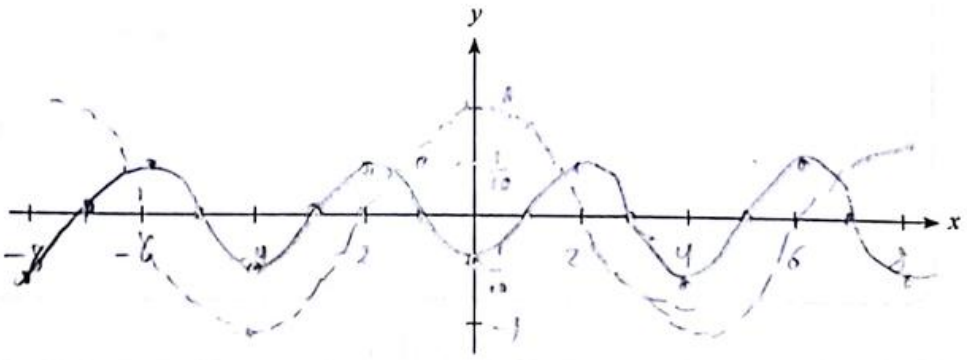
a) Indique la amplitud, el período y desfase de la función f.

Amplitud $= \frac{1}{10} = 0,1$

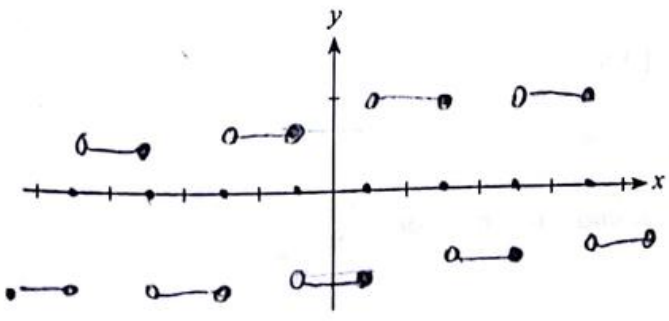
desfase: dos unidades a la derecha

período $= \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}$ $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}$ 4π

b) Grafique la función f mostrando las características descritas en el literal anterior. Utilice una escala adecuada.



c) Grafique la nueva función $g(x) = sgn(f(x))$ y evalúe $g(2)$.

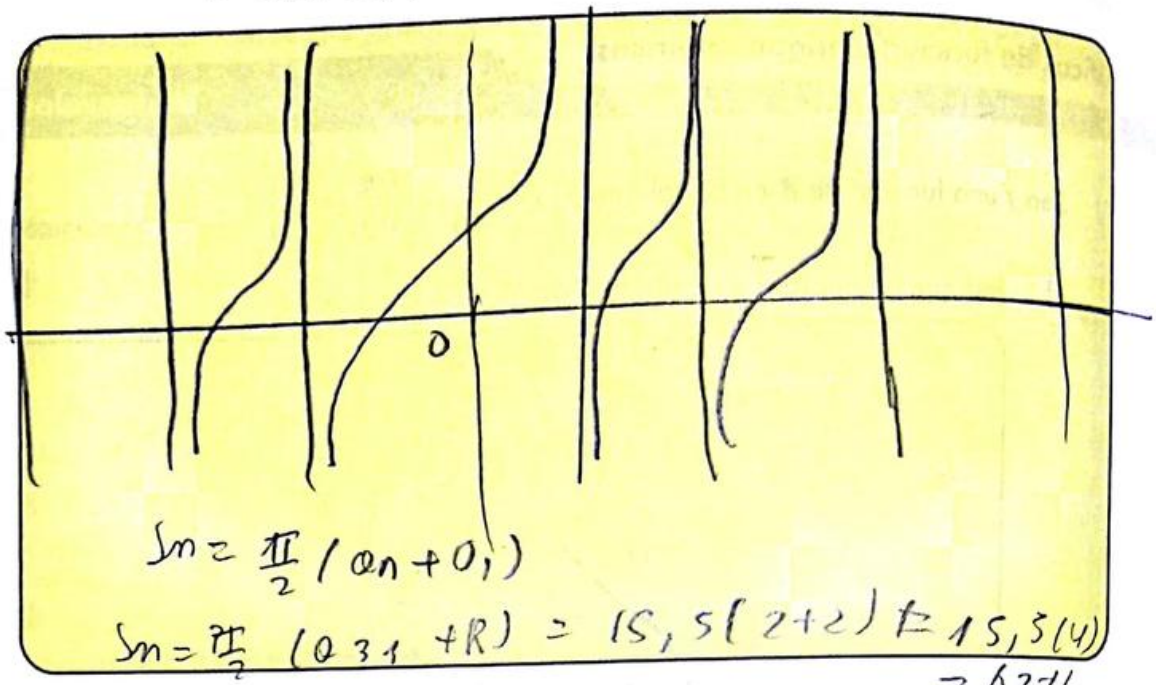


$g(2) = 1$

Scanned by CamScanner

2) Considerando la función trigonométrica $g(x) = tan(x) + 2$, determine el valor exacto de la suma S:

$$S = g(0) + g(\pi) + g(2\pi) + g(3\pi) + \ldots + g(29\pi) + g(30\pi)$$



$Sn = \frac{\pi}{2}(0n + 0,)$

$Sn = \frac{\pi}{2}(031 + R) = 15,5(2+2) \pm 15,5(4)$

$= 62\pi$

3) Determine si la función $h(x) = sen(8x^3)\, sgn(x)$ es par, impar o no posee alguna de estas características.

$F(x) = F(-x)$

$Sen(8x^3) sgn x = Sen(8(-x)^3) sgn(-x)$

$Sen(8x^3) sgn x = + Sen(8x^3) sgn x$

Par

4) Dada la función trigonométrica $J(x) = \frac{sen(x)}{x}$, identifique la proposición falsa:

a) J tiene el mismo dominio que $f(x) = ln|x|$.

b) J no es una función impar.

c) $\left[\frac{J(x)}{sen(x)}\right]^{-1} = x, \forall x \in (0,\pi)$

d) $\pi \cdot J(\pi) = 1$ $\quad \pi \cdot \frac{sen\,\pi}{\pi} = 0$

e) $\frac{J(x)}{x}, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ es una función impar.

F F

Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

5.4 Funciones trigonométricas inversas

Objetivos

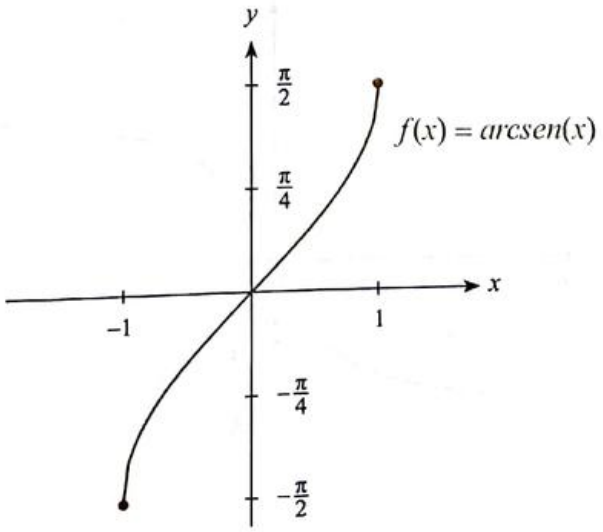
Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una función trigonométrica, determinar el dominio, rango, asíntotas, monotonía y otras características de su función inversa.
- Dada la gráfica estándar de una función trigonométrica inversa, aplicar técnicas de graficación para obtener nuevas funciones.
- Determinar relaciones trigonométricas de medidas de ángulos, cuyos argumentos están dados en función de relaciones trigonométricas inversas.

En los capítulos 2 y 4 de este libro, analizamos que si una función es biyectiva es posible obtener su función inversa. Como ya se ha podido notar, las funciones trigonométricas no son inyectivas y no todas son sobreyectivas; sin embargo, podemos restringir sus dominios y conjuntos de llegada de manera adecuada para obtener las funciones trigonométricas inversas.

Función Seno Inverso

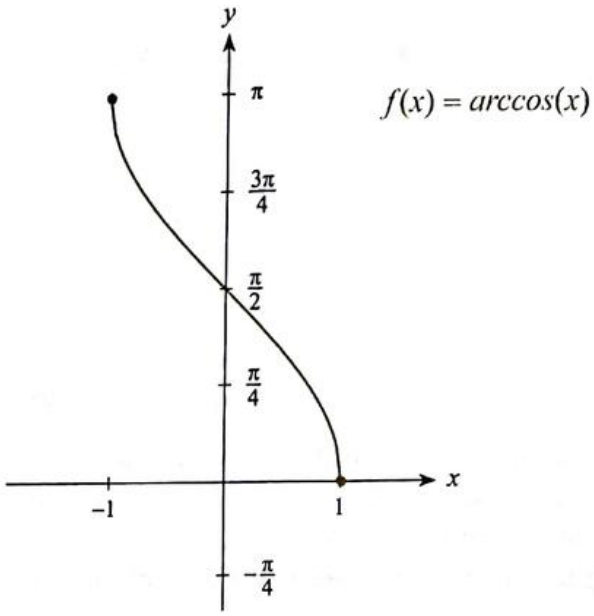
Si restringimos el dominio de $f(x) = sen(x)$ al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y el conjunto de llegada al intervalo $[-1, 1]$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa del seno se la denota por $sen^{-1}(x)$ o $arcsen(x)$.



Scanned by CamScanner

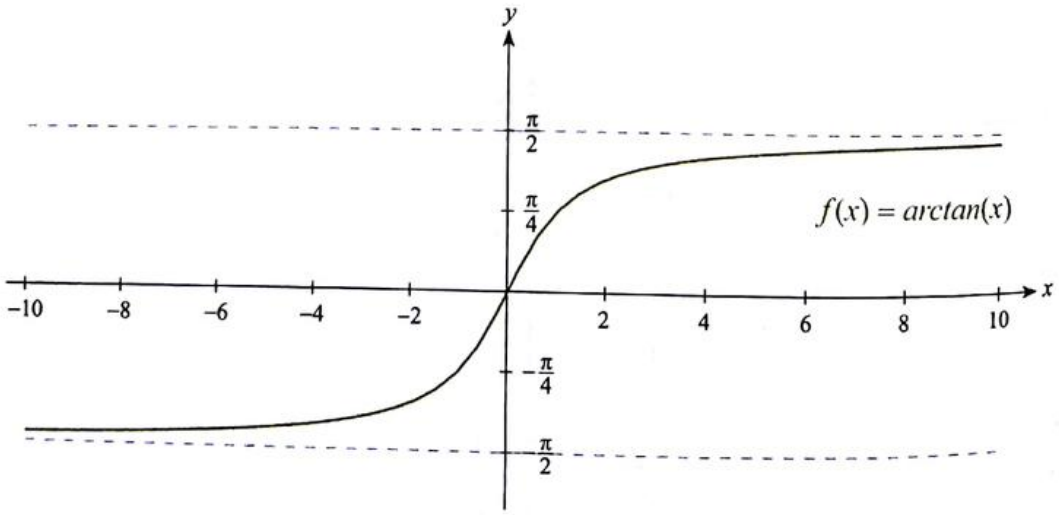
Función Coseno Inverso

Si restringimos el dominio de $f(x) = cos(x)$ al intervalo $[0, \pi]$ y el conjunto de llegada al intervalo $[-1, 1]$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa del coseno se la denota por $cos^{-1}(x)$ o $arccos(x)$.



Función Tangente Inversa

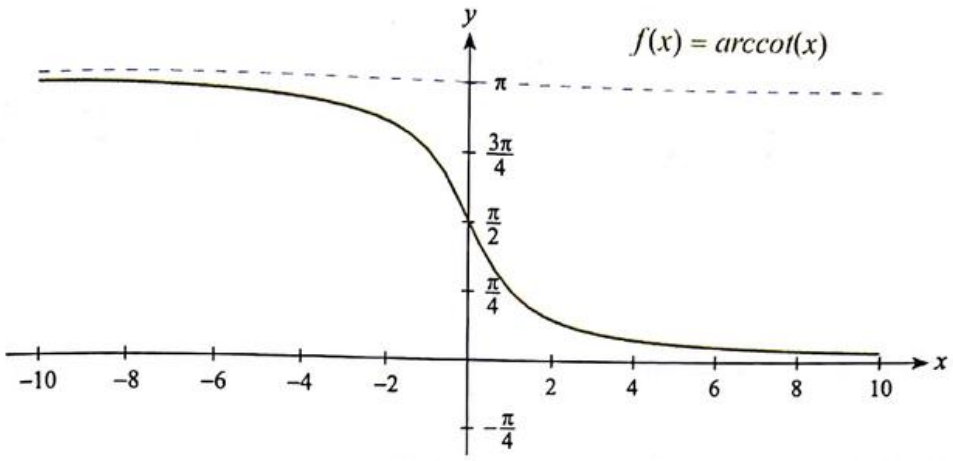
Si restringimos el dominio de $f(x) = tan(x)$ al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa de la tangente se la denota por $tan^{-1}(x)$ o $arctan(x)$.



Scanned by CamScanner

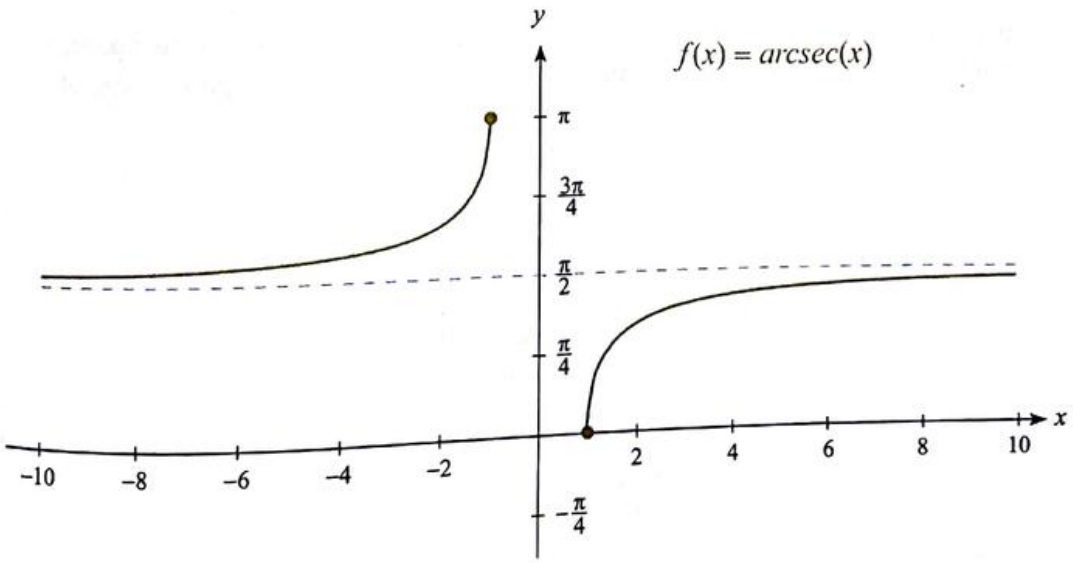
Función Cotangente Inversa

Si restringimos el dominio de $f(x) = cot(x)$ al intervalo $(0, \pi)$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa de la cotangente se la denota por $cot^{-1}(x)$ o $arccot(x)$.



Función Secante Inversa

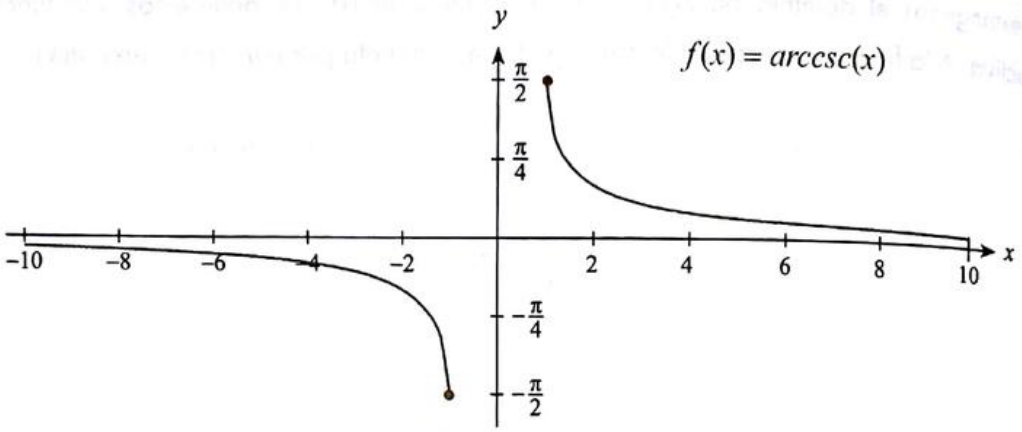
Si restringimos el dominio de $f(x) = sec(x)$ al intervalo $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ y el conjunto de llegada al intervalo $\mathbb{R} - (-1, 1)$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa de la secante se la denota por $sec^{-1}(x)$ o $arcsec(x)$.



Scanned by CamScanner

Función Cosecante Inversa

Si restringimos el dominio de $f(x) = csc(x)$ al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ y el conjunto de llegada al intervalo $\mathbb{R} - (-1, 1)$, obtenemos una función biyectiva. A la función inversa de la cosecante se la denota por $csc^{-1}(x)$ o $arccsc\,(x)$.



Ejemplo 5.28 Relaciones trigonométricas inversas.

Determine el valor de $tan(x)$, tal que $x = arcsen\left(-\frac{15}{17}\right)$, $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

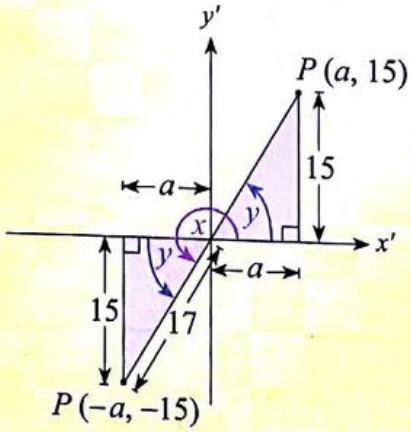
Solución:

Al aplicar función seno a ambos miembros de la ecuación, se obtiene:

$$sen(x) = sen\left[arcsen\left(-\frac{15}{17}\right)\right]$$

$sen(x) = -\frac{15}{17}$, lo cual ratifica que se trata de un ángulo del III cuadrante.

Tal como se estableció en la sección 5.2 y con base en la siguiente figura, es posible definir el ángulo de medida y en el correspondiente triángulo rectángulo:



Aplicando el Teorema de Pitágoras, se establece que:

$$a = \sqrt{(17)^2 - (15)^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8$$

Scanned by CamScanner

Es importante anotar que la relación de proporcionalidad entre las medidas de los catetos de este triángulo y los del triángulo rectángulo generado por la localización de un punto en la circunferencia de radio unitario, se mantiene. Por todo esto, el análisis realizado para una circunferencia de radio unitario, sirve también para aquellas de radio no unitario.

Con estos resultados, se concluye que:

$$sen(x) = -sen(y) = -\frac{15}{17}$$

$$cos(x) = -cos(y) = -\frac{8}{17}$$

Relacionando las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{sen(y)}{cos(y)} = \frac{15}{8}$$

$$tan(x) = tan(y) = \frac{15}{8}$$

Luego, $tan(x) = \frac{15}{8}$.

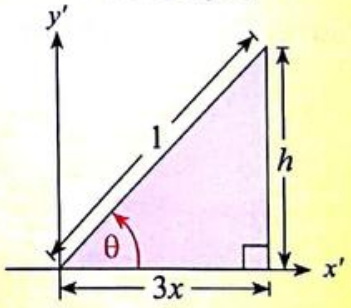
Ejemplo 5.29 Relaciones trigonométricas inversas.

Si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y $\theta = arccos(3x)$, determine expresiones para $sen(\theta)$ y $cot(\theta)$.

Solución:

$\theta = arccos(3x) \Rightarrow cos(\theta) = 3x$

La gráfica correspondiente en el plano cartesiano se presenta como sigue:



Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$h = \sqrt{(1)^2 - (3x)^2}$

$h = \sqrt{1 - 9x^2}$

Por lo tanto los valores solicitados son:

$sen(\theta) = \frac{h}{1}$ $\qquad$ $cot(\theta) = \frac{3x}{h}$

$sen(\theta) = \sqrt{1 - 9x^2}$ $\qquad$ $cot(\theta) = \frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^2}}$

Note que por ser θ la medida de un ángulo del I cuadrante, sus funciones trigonométricas poseen signos positivos.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.30 Relaciones trigonométricas inversas.

Sea $f(x) = arcsen(3x - 2)$ una función de variable real cuyo rango es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, determine el dominio de f.

Solución:

A partir de la definición de la función seno inversa, se deduce que:

$-1 \leq 3x - 2 \leq 1$

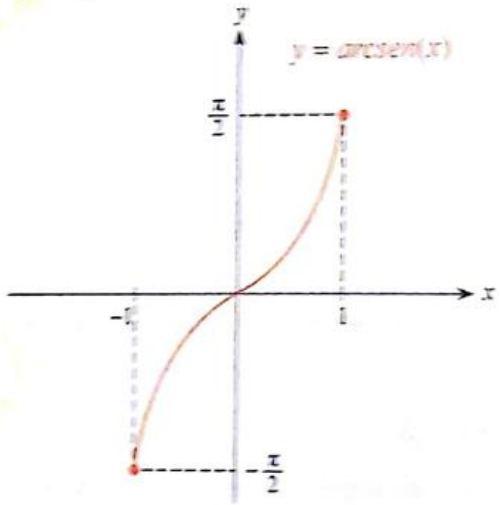
$1 \leq 3x \leq 3$

$\frac{1}{3} \leq x \leq 1$

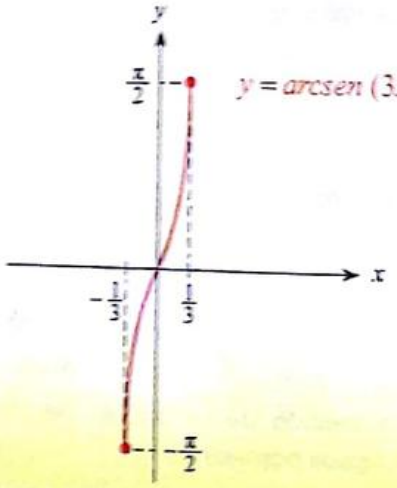
$\therefore dom\, f = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

Una alternativa al método analítico propuesto, consiste en graficar la función f:

Paso 1: Función original $y = arcsen\,(x)$.

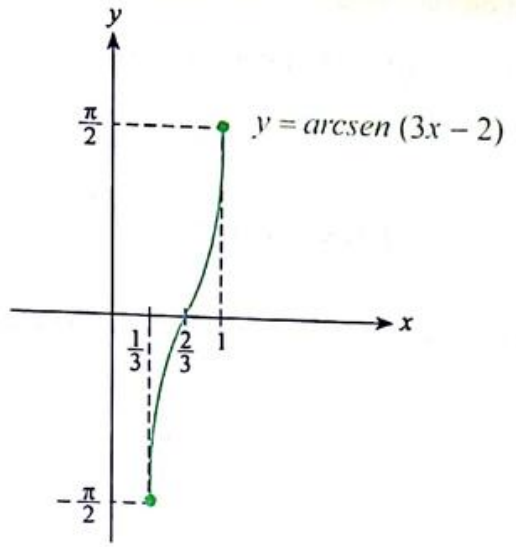


Paso 2: Compresión horizontal $y = arcsen\,(3x)$.



Scanned by CamScanner

Paso 3: Desplazamiento de $\frac{2}{3}$ unidades a la derecha, $y = arcsen\left[3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right]$.



Esta última gráfica corresponde a la función f, y en ella se puede notar que efectivamente $dom\, f = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

Ejemplo 5.31 Funciones trigonométricas inversas.

Sean dos ángulos de medidas α y β que están en el segundo cuadrante:

$$\alpha = arcsen\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right) \text{ y } \beta = arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

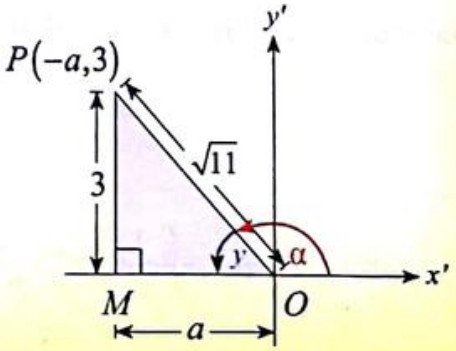
Calcule el valor de: $cos(\alpha) - tan(\beta)$.

Solución:

Aplicando función seno en ambos miembros de la primera expresión, se obtiene:

$$sen(\alpha) = sen\left[arcsen\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)\right]$$

$$sen(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{11}}$$



Scanned by CamScanner

Está claro que el ángulo de medida y en el triángulo rectángulo mostrado permite, aplicando el Teorema de Pitágoras, obtener la medida a del cateto faltante. Por ser α la medida de un ángulo del segundo cuadrante, se cumple que:

$$sen(\alpha) = sen(y) = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

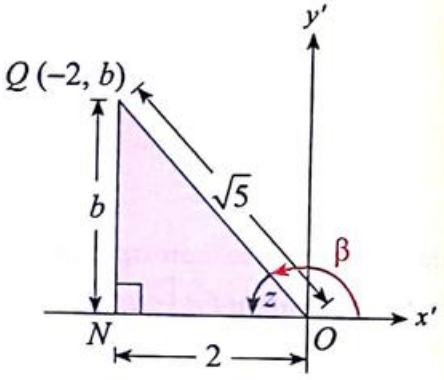
$$\left(\sqrt{11}\right)^2 = (3)^2 + (a)^2 \Rightarrow 11 = 9 + a^2 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

Por otra parte:

$$cos(\alpha) = -cos(y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$$

Realizando un análisis similar para la segunda expresión dada:

$$cos(\beta) = cos\left[arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right]$$



Puesto que β es la medida de un ángulo que también pertenece al segundo cuadrante, el lector puede verificar que:

$$cos(\beta) = -cos(z) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{(I)}$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$\left(\sqrt{5}\right)^2 = (2)^2 + (b)^2 \Rightarrow (b)^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

Así mismo:

$$sen(\beta) = sen(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{(II)}$$

Relacionando las expresiones (I) y (II), se tiene que:

$$tan(\beta) = -tan(z) = -\frac{1}{2}$$

Entonces:

$$cos(\alpha) - tan(\beta) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{11}} - \left(\frac{1}{-2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{11}\sqrt{2}}{11} + \frac{1}{2} = -\frac{2\sqrt{22} - 11}{22}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.32 Funciones trigonométricas inversas.

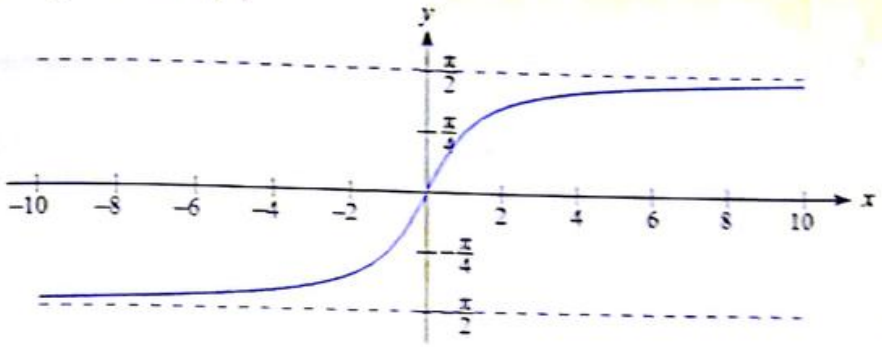
Sea $f(x) = 1 - arctan\left(|x|\right), \forall x \in \mathbb{R}$:

a) Bosqueje la gráfica de f.
b) Especifique el rango de f.
c) Indique los intervalos de monotonía de f.

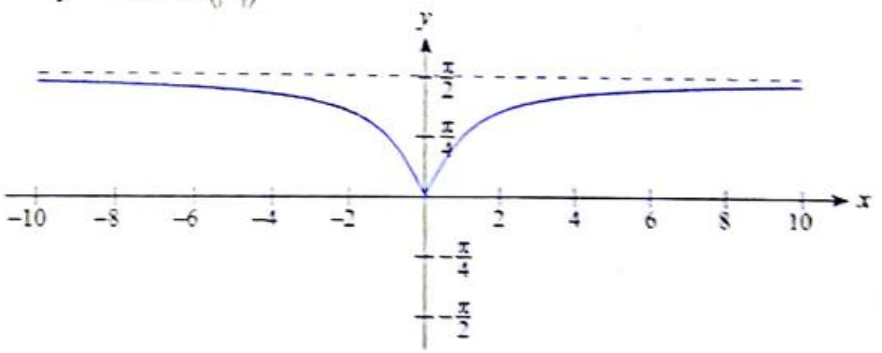
Solución:

a) Se procede a graficar desde la función original hasta la función solicitada.

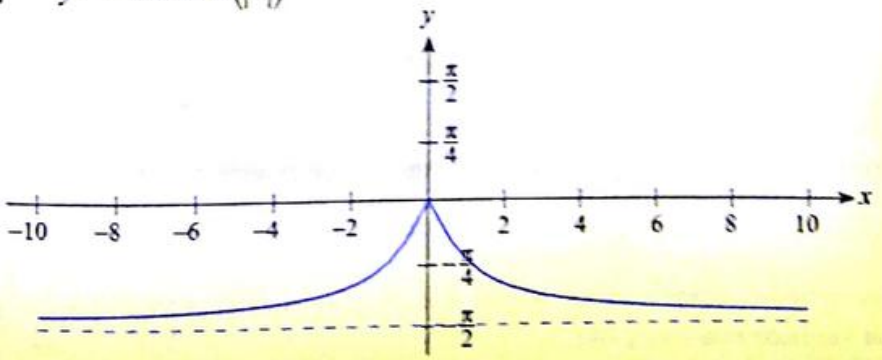
1) $y = arctan\left(x\right)$



2) $y = arctan\left(|x|\right)$

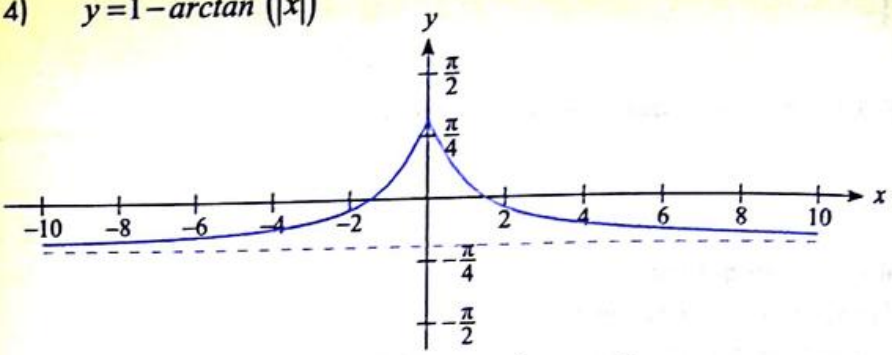


3) $y = -arctan\left(|x|\right)$



Scanned by CamScanner

4) $y = 1 - arctan\left(|x|\right)$



b) Como se observa en la gráfica, $rg\ f = \left(1 - \frac{\pi}{2}, 1\right]$

c) La función es estrictamente creciente en el intervalo: $(-\infty, 0)$; y, la función es estrictamente decreciente en el intervalo: $(0, +\infty)$.

Ejemplo 5.33 Funciones trigonométricas inversas.

Calcule el valor de $sen\left(arctan\left(-\frac{5}{3}\right)\right)$ si se conoce que $\frac{\pi}{2} \leq arctan\left(-\frac{5}{3}\right) \leq \pi$.

Solución:

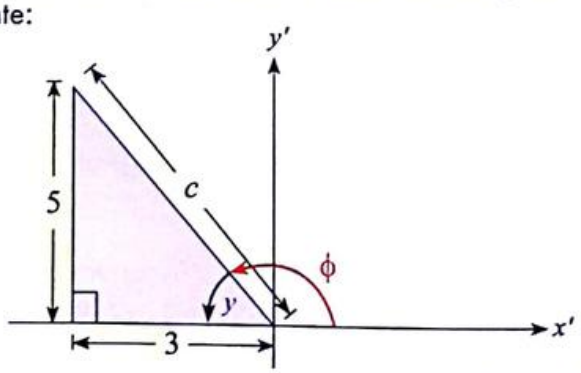
Realizando una sustitución o cambio de variable:

$$\phi = arctan\left(-\frac{5}{3}\right)$$

Aplicando función tangente en ambos miembros:

$$tan(\phi) = tan\left(arctan\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = -\frac{5}{3}$$

Construyendo un triángulo apropiado a partir del ángulo correspondiente al segundo cuadrante:



Con base en la figura y la condición planteada, se puede concluir que:

$$tan(\phi) = -\ tan\ (y) = -\frac{5}{3}$$

Adicionalmente, obteniendo el valor de la hipotenusa del triángulo rectángulo, se puede verificar que $c = \sqrt{34}$.

Scanned by CamScanner

Luego, el valor requerido es:

$$sen(\phi) = sen\left(arctan\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

Este valor es positivo, ya que el ángulo corresponde al II cuadrante.

Ejemplo 5.34 Funciones trigonométricas inversas.

Sea la función dada por: $f(x) = \frac{1}{\pi}\, arccos\left(\frac{x}{3}+1\right)$ cuyo rango es el intervalo $[0,1]$.

Determine de ser posible:

a) Su dominio.

b) La regla de correspondencia de su inversa.

Solución:

a) A partir de la definición de la función coseno inverso, se establece que:

$$-1 \le \frac{x}{3}+1 \le 1 \;\Rightarrow\; -3 \le x+3 \le 3 \;\Rightarrow\; -6 \le x \le 0$$

$$\therefore\ dom\, f = [-6, 0]$$

b) $f(x) = \frac{1}{\pi}\, arccos\left(\frac{x}{3}+1\right)$ y $rg\, f = [0,1]$.

$y = \frac{1}{\pi}\, arccos\left(\frac{x}{3}+1\right)$ Reemplazando $f(x)$ por y.

$x = \frac{1}{\pi}\, arccos\left(\frac{y}{3}+1\right)$ Intercambiando x e y.

$\pi x = arccos\left(\frac{y}{3}+1\right)$ Multiplicando por π ambos miembros.

$cos(\pi x) = cos\left(arccos\left(\frac{y}{3}+1\right)\right)$ Aplicando función coseno a ambos miembros.

$cos(\pi x) = \frac{y}{3}+1$ Realizando la composición entre la función coseno y su inversa.

$y = 3\left(cos(\pi x) - 1\right)$ Despejando y.

$\therefore\ f^{-1}(x) = 3cos(\pi x) - 3;\ x \in [0,1]$ Obteniendo la función inversa.

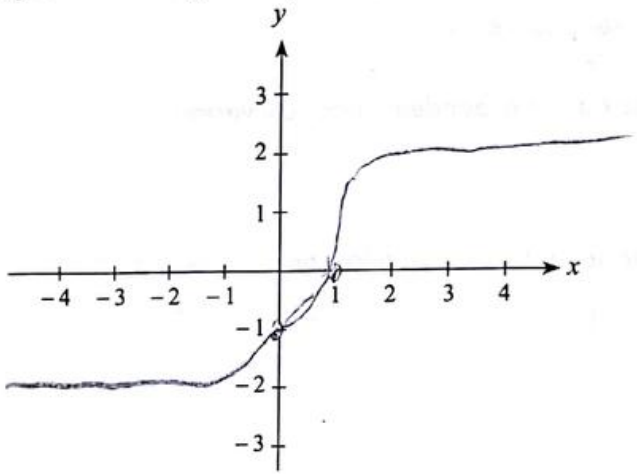
Scanned by CamScanner

1) A partir de la función definida por $f(x) = \frac{4}{\pi} \arctan(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$:

a) Complete la siguiente tabla:

$dom\, f$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$rg\, f$	Asíntotas horizontales
$\mathbb{R}$	-1	0	1	$(-2,2)$	una asintota $y=2$ $y=-2$

b) Bosqueje su gráfica en el siguiente plano cartesiano:



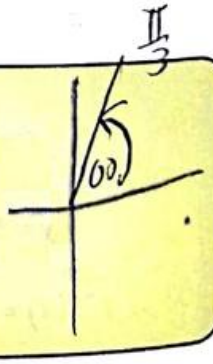
c) Indique cinco características de la función f.

- Es Biyectiva
- Es impar
- Es creciente
- Su dominio son todos los $\mathbb{R}$
- Tiene asintotas horizontales y inferiores

2) Calcule la medida $\omega = \arccos\left(\sqrt{1-\left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2}\right)$ de un ángulo perteneciente al primer cuadrante.

$\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)$

$\arccos = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} = 60°$



Scanned by CamScanner

3) Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa, justificando su respuesta.
"Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $sen(a) = sen(b)$, entonces $a = b$".

$2 \operatorname{sen} 30° = 30^2$

$2\left(\frac{1}{2}\right) = 90°$

$1 = 900$

no cumple

4) Sea α la medida de un ángulo situado en el primer cuadrante tal que $sen(\alpha) = t$. Determine expresiones, en términos de t, para:

a) $cos(\alpha)$
b) $tan(\alpha)$
c) $(csc(\alpha))^2$

Scanned by CamScanner

5.5 Identidades trigonométricas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Demostrar identidades empleando las seis funciones trigonométricas elementales.
- Deducir identidades para la suma o diferencia de ángulos, ángulo doble, ángulo mitad, de suma a producto y de producto a suma.
- Identificar identidades trigonométricas analítica y gráficamente.
- Obtener relaciones trigonométricas de medidas de ángulos, a partir de otras relaciones conocidas.

En esta sección veremos que dada una expresión trigonométrica, es posible simplificarla o transformarla en otra expresión equivalente a la original, empleando las principales identidades trigonométricas del seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante, ángulo doble, ángulo mitad, productos de seno y/o coseno.

Así mismo, se dará una interpretación gráfica de algunas identidades, lo cual resulta más eficiente en algunos casos.

Para poder alcanzar los objetivos precedentes, en esta sección se usarán propiedades de gran importancia en trigonometría, analizándose varias de las denominadas identidades trigonométricas.

El procedimiento para demostrar identidades es:

- Empezar con el miembro que tenga la expresión más compleja.
- Preferir el uso de funciones senos y cosenos.
- Trabajar en el miembro seleccionado, teniendo en cuenta la expresión que se necesita obtener.

Identidades Cocientes

$$tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$cot(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Identidades Recíprocas

$$cot(x) = \frac{1}{tan(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left(\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}\right)$$

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$csc(x) = \frac{1}{sen(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

Identidades Pitagóricas

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

A partir de esta identidad y dividiendo por $cos^2(x)$ y $sen^2(x)$, se obtiene:

$$tan^2(x) + 1 = sec^2(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$$

$$1 + cot^2(x) = csc^2(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R} - \{n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$$

Identidades Pares o Impares

Con base en las gráficas de las seis funciones trigonométricas, se puede deducir que:

$$sen(-x) = -sen(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

$$cos(-x) = cos(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

$$tan(-x) = -tan(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$$

$$cot(-x) = -cot(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R} - \{n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$$

$$sec(-x) = sec(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\right\}$$

$$csc(-x) = -csc(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R} - \{n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$$

Para las demostraciones requeridas en esta sección, considere que todas las expresiones están definidas en $\mathbf{R}$.

Ejemplo 5.35 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad: $(sen(x) + cos(x))^2 + (sen(x) - cos(x))^2 = 2$.

Solución:

$$\begin{aligned}
&(sen(x) + cos(x))^2 + (sen(x) - cos(x))^2 = \\
&= (sen^2(x) + 2sen(x)\,cos(x) + cos^2(x)) + \\
&\quad (sen^2(x) - 2sen(x)\,cos(x) + cos^2(x)) && \text{Productos notables.} \\
&= 2sen^2(x) + 2cos^2(x) && \text{Simplificación de términos.} \\
&= 2(sen^2(x) + cos^2(x)) && \text{Factor común.} \\
&= 2 && \text{Identidad pitagórica.}
\end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.36 Identidades trigonométricas.

Identifique la expresión por la cual debe ser reemplazada Δ para que la siguiente igualdad se convierta en una identidad trigonométrica:

$$\frac{sen(\alpha)}{1+cos(\alpha)} + \frac{1+cos(\alpha)}{sen(\alpha)} = \Delta$$

Luego, especifique los valores de Δ para los cuales está restringida la identidad.

Solución:

$$\frac{sen^2(\alpha)+(1+cos(\alpha))^2}{sen(\alpha)(1+cos(\alpha))} = \Delta \qquad \text{Denominador común.}$$

$$\frac{sen^2(\alpha)+1+2cos(\alpha)+cos^2(\alpha)}{sen(\alpha)(1+cos(\alpha))} = \Delta \qquad \text{Cuadrado del binomio.}$$

$$\frac{1+1+2cos(\alpha)}{sen(\alpha)(1+cos(\alpha))} = \Delta \qquad \text{Identidad pitagórica.}$$

$$\frac{2(1+cos(\alpha))}{sen(\alpha)(1+cos(\alpha))} = \Delta \qquad \text{Factor común.}$$

$$\frac{2\cancel{(1+cos(\alpha))}}{sen(\alpha)\cancel{(1+cos(\alpha))}} = \Delta \qquad \text{Simplificación de factores.}$$

$$2csc(\alpha) = \Delta \qquad \text{Identidad recíproca.}$$

$\therefore \Delta = 2csc(\alpha)$

Se puede notar que hay 2 restricciones:

- Cuando $1+cos(\alpha)=0$, por lo que $\alpha \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
- Cuando $sen(\alpha)=0$, por lo que $\alpha \in \mathbb{R} - \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Puesto que la medida angular debe satisfacer las dos restricciones especificadas, se concluye que:

$$\alpha \in \mathbb{R} - \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.37 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad: $\dfrac{tan(x)+tan(y)}{cot(x)+cot(y)} = tan(x)\,tan(y)$.

Solución:

$$\frac{tan(x)+tan(y)}{cot(x)+cot(y)} = \frac{\dfrac{sen(x)}{cos(x)}+\dfrac{sen(y)}{cos(y)}}{\dfrac{cos(x)}{sen(x)}+\dfrac{cos(y)}{sen(y)}}$$ Identidades cocientes.

$$= \frac{\dfrac{sen(x)\,cos(y)+sen(y)\,cos(x)}{cos(x)\,cos(y)}}{\dfrac{sen(y)\,cos(x)+sen(x)\,cos(y)}{sen(x)\,sen(y)}}$$ m.c.m. del denominador.

$$= \frac{sen(x)\,sen(y)}{cos(x)\,cos(y)}$$ Simplificación de factores.

$$= \left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right)\left(\frac{sen(y)}{cos(y)}\right)$$ Propiedad de las fracciones.

$$\frac{tan(x)+tan(y)}{cot(x)+cot(y)} = tan(x)\,tan(y)$$ Identidades cocientes.

Ejemplo 5.38 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad: $\dfrac{1+cos(-x)-sen(-x)}{1+cos(-x)+sen(-x)} = sec(x)+tan(x)$.

Solución:

$$\frac{1+cos(-x)-sen(-x)}{1+cos(-x)+sen(-x)}$$

$$= \frac{1+cos(x)+sen(x)}{1+cos(x)-sen(x)}$$ Identidades pares o impares.

$$= \left(\frac{1+cos(x)+sen(x)}{1+(cos(x)-sen(x))}\right)\left(\frac{1-(cos(x)-sen(x))}{1-(cos(x)-sen(x))}\right)$$ Multiplicación por el conjugado del denominador.

Scanned by CamScanner

$$= \frac{1 - \cancel{cos(x)} + sen(x) + \cancel{cos(x)} - cos^2(x) + \cancel{sen(x)\,cos(x)} + sen(x) - \cancel{sen(x)\,cos(x)} + sen^2(x)}{1 - (cos(x) - sen(x))^2}$$

$$= \frac{1 - cos^2(x) + 2sen(x) + sen^2(x)}{1 - (cos^2(x) - 2sen(x)cos(x) + sen^2(x))}$$ Simplificación de términos.

$$= \frac{sen^2(x) + 2sen(x) + sen^2(x)}{2sen(x)\,cos(x)}$$ Identidad pitagórica.

$$= \frac{2sen^2(x) + 2sen(x)}{2sen(x)\,cos(x)}$$ Simplificación de términos.

$$= \frac{\cancel{2}sen^2(x)}{\cancel{2}sen(x)cos(x)} + \frac{\cancel{2}sen(x)}{\cancel{2}sen(x)cos(x)}$$ Propiedades de las fracciones.

$$= \frac{sen(x)}{cos(x)} + \frac{1}{cos(x)}$$ Simplificación de fracciones.

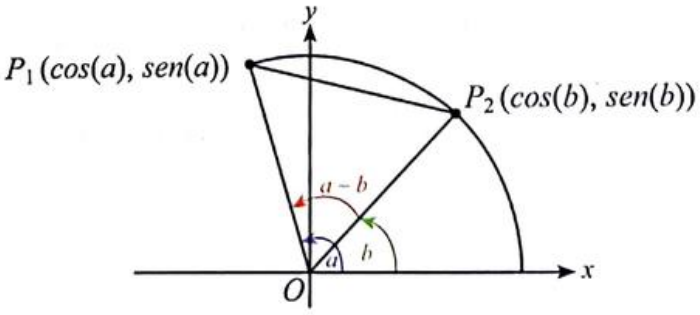
$$= tan(x) + sec(x)$$ Identidades cociente y recíproca.

$$= sec(x) + tan(x)$$ Propiedad conmutativa.

Identidades de suma y diferencia de medidas de ángulos

En esta sección vamos a demostrar las identidades correspondientes a $cos(x+y)$, $cos(x-y)$, $sen(x+y)$ y $sen(x-y)$.

Sean los ángulos cuyas medidas son a, b y $a-b$, en la siguiente gráfica:



La longitud del segmento $\overline{P_1P_2}$ es:

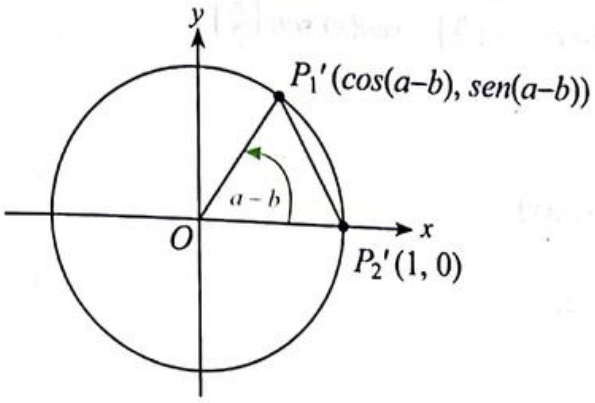
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(cos(b) - cos(a))^2 + (sen(b) - sen(a))^2}$$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(cos^2(b) - 2cos(b)\,cos(a) + cos^2(a)) + (sen^2(b) - 2sen(b)\,sen(a) + sen^2(a))}$$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{2 - 2cos(a)cos(b) - 2sen(a)sen(b)}$$

Scanned by CamScanner

Hagamos rotar el triángulo OP_1P_2 de forma que el punto P_2 se sitúe sobre el eje horizontal.



Si designamos por P_1' y P_2' las posiciones de los vértices luego de la rotación, y observando que las coordenadas de P_2' son $(1, 0)$, podemos calcular la longitud del segmento $\overline{P_1'P_2'}$:

$$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{(cos(a-b)-1)^2 + (sen(a-b)-0)^2}$$

$$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{cos^2(a-b) - 2cos(a-b) + 1 + sen^2(a-b)}$$

$$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{2 - 2cos(a-b)}$$

Desde luego, $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1'P_2'}$

y así:

$$2 - 2\,cos(a-b) = 2 - 2\,cos(a)\,cos(b) - 2\,sen(a)\,sen(b)$$

Finalmente:

$$cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sen(a)\,sen(b)$$

El procedimiento anterior puede repetirse para un par de ángulos completamente arbitrarios de medidas x e y:

$$cos(x-y) = cos(x)\,cos(y) + sen(x)\,sen(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

A partir de este resultado, se puede obtener $cos(x+y)$.

$$cos(x+y) = cos[x-(-y)]$$

$$cos(x+y) = cos(x)\,cos(-y) + sen(x)\,sen(-y)$$

Scanned by CamScanner

Puesto que $cos(y)$ es par y $sen(y)$ es impar,

$$cos(x+y) = cos(x)\,cos(y) - sen(x)\,sen(y) \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Si consideramos $y = \frac{\pi}{2}$,

$$cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos(x)\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(x)\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Esto es:

$$cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\,sen(x)$$

Si consideramos $x + \frac{\pi}{2} = z$,

$$x = z - \frac{\pi}{2}$$

Del resultado anterior:

$$cos\,(z) = -\,sen\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$$

Por otra parte:

$$cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = cos(x)\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen(x)\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sen(x)$$

Resumiendo:

$$cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\,sen(x) \qquad cos(x) = -\,sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sen(x) \qquad cos(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Podemos ahora calcular $sen\,(x+y)$:

$$\begin{aligned} sen\,(x+y) &= cos\left[(x+y) - \frac{\pi}{2}\right] \\ &= cos\left[x + \left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= cos\,(x)\,cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - sen\,(x)\,sen\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= cos\,(x)\,sen\,(y) - sen\,(x)\,(-\,cos\,(y)) \end{aligned}$$

$$sen\,(x+y) = sen\,(x)\,cos\,(y) + cos\,(x)\,sen\,(y) \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Scanned by CamScanner

A partir de este resultado, se puede obtener $sen\,(x-y)$.

$$\begin{aligned} sen\,(x-y) &= sen\,[x+(-y)] \\ &= sen\,(x)\,cos\,(-y)+cos\,(x)\,sen\,(-y) \end{aligned}$$

$$sen\,(x-y) = sen\,(x)\,cos\,(y)-cos\,(x)\,sen\,(y) \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Podemos ahora calcular $tan(x+y)$:

$$\begin{aligned} tan\,(x+y) &= \frac{sen\,(x+y)}{cos\,(x+y)} \\ &= \frac{sen\,(x)\,cos\,(y)+cos\,(x)\,sen\,(y)}{cos\,(x)\,cos\,(y)-sen\,(x)\,sen\,(y)} \\ &= \frac{\dfrac{sen\,(x)}{cos\,(x)}+\dfrac{sen\,(y)}{cos\,(y)}}{1-\dfrac{sen\,(x)}{cos\,(x)}\,\dfrac{sen\,(y)}{cos\,(y)}} \end{aligned}$$

$$tan\,(x+y) = \frac{tan\,(x)+tan\,(y)}{1-tan\,(x)\,tan\,(y)} \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}-\{(2n+1)\tfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$$

A partir de este resultado, se puede obtener $tan\,(x-y)$.

$$\begin{aligned} tan\,(x-y) &= tan\,(x+(-y)) \\ &= \frac{tan\,(x)+tan\,(-y)}{1-tan\,(x)\,tan\,(-y)} \end{aligned}$$

$$tan\,(x-y) = \frac{tan\,(x)-tan\,(y)}{1+tan\,(x)\,tan\,(y)} \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}-\{(2n+1)\tfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$$

También se puede demostrar que:

$$x+y=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} sen\,(x) = cos\,(y) \\ cos\,(x) = sen\,(y) \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Se pueden comprobar estas últimas identidades con medidas de ángulos notables:

$$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Ejemplo 5.39 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad $sen\,(x+y) + sen\,(x-y) = 2\,sen\,(x)\,cos\,(y)$.

Solución:

$$sen(x+y) + sen(x-y) = (sen(x)\,cos(y) + cos(x)\,sen(y)) + (sen(x)\,cos(y) - cos(x)\,sen(y))$$

$$sen(x+y) + sen(x-y) = 2\,sen(x)\,cos(y)$$

Ejemplo 5.40 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad: $sen\,(x+y)\,sen\,(x-y) = sen^2\,(x) - sen^2\,(y)$.

Solución:

$$\begin{aligned} sen(x+y)\,sen(x-y) &= [sen(x)\,cos(y) + cos(x)\,sen(y)][sen(x)\,cos(y) - cos(x)\,sen(y)] \\ &= sen^2(x)\,cos^2(y) - cos^2(x)\,sen^2(y) \\ &= sen^2(x)[1 - sen^2(y)] - sen^2(y)[1 - sen^2(x)] \\ &= sen^2(x) - \cancel{sen^2(x)\,sen^2(y)} - sen^2(y) + \cancel{sen^2(x)\,sen^2(y)} \\ sen(x+y)\,sen(x-y) &= sen^2(x) - sen^2(y) \end{aligned}$$

Ejemplo 5.41 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad: $cot(x-y) = \dfrac{cot\,(x)\,cot\,(y)+1}{cot\,(y) - cot\,(x)}$.

Solución:

$$\frac{cot\,(x)\,cot\,(y)+1}{cot\,(y) - cot\,(x)} = \frac{\left(\dfrac{1}{tan\,(x)}\right)\left(\dfrac{1}{tan\,(y)}\right)+1}{\dfrac{1}{tan\,(y)} - \dfrac{1}{tan\,(x)}}$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{\dfrac{1 + tan(x)\,tan(y)}{\cancel{tan(x)\,tan(y)}}}{\dfrac{tan(x) - tan(y)}{\cancel{tan(x)\,tan(y)}}}$$

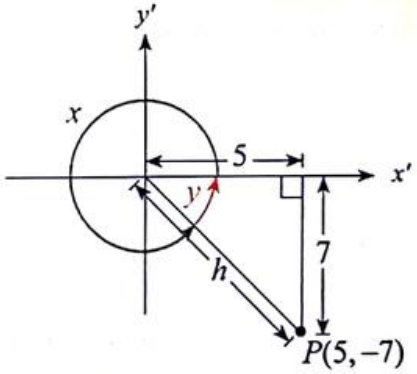
$$= \frac{1}{tan(x-y)}$$

$$\frac{cot(x)\,cot(y)+1}{cot(y)-cot(x)} = cot(x-y)$$

Ejemplo 5.42 Aplicación de identidades trigonométricas.

Si $tan(x) = -\frac{7}{5}$, $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$, determine el valor de $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución:



Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(5)^2 + (7)^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$$

Considerando la posición del ángulo de medida x en el IV cuadrante, se cumple que:

$$\left(tan(x) = -\,tan(y) = -\frac{7}{5} \wedge \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi\right);\ y,$$

$$\left(cos(x) = cos(y) = \frac{5}{\sqrt{74}}\right) \wedge \left(sen(x) = -\,sen(y) = -\frac{7}{\sqrt{74}}\right)$$

Empleando la identidad pertinente, se obtiene:

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = cos(x)\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - sen(x)\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{74}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{-7}{\sqrt{74}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Luego, $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5 + 7\sqrt{3}}{2\sqrt{74}}$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.43 Aplicación de identidades trigonométricas.

Sean los ángulos de medidas $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Considerando que $\alpha = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ y $\beta = arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, determine $(\alpha + \beta)$.

Solución:

Se tiene que $cos(\alpha) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ y $cos(\beta) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, pero $sen(\alpha) = \pm\sqrt{1 - cos^2(\alpha)}$.

Y, puesto que $\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$sen(\alpha) = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad y \quad sen(\beta) = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Como: $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)\, cos(\beta) - sen(\alpha)\, sen(\beta)$.

Entonces: $cos(\alpha + \beta) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto, $(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 5.44 Aplicación de identidades trigonométricas.

Sin utilizar calculadora, determine el valor de:

a) $sen(75°)$

b) $cos(105°)$

Solución:

a) $$\begin{aligned} sen(75°) &= sen(30° + 45°) \\ &= sen(30°)\, cos(45°) + cos(30°)\, sen(45°) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$sen(75°) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b) $$\begin{aligned} cos(105°) &= cos(45° + 60°) \\ &= cos(45°)\, cos(60°) - sen(45°)\, sen(60°) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$cos(105°) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Scanned by CamScanner

Identidades de ángulo doble

$$\cos(2x) = \cos(x + x)$$

$$\cos(2x) = \cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Con la identidad pitagórica y esta última, se puede deducir que:

$$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Además:

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x + x)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \cos(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

A partir de las expresiones anteriores, es posible obtener la siguiente identidad para la tangente:

$$\tan(2x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ejemplo 5.45 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen}^3(x) + \cos^3(x)}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)} = 1 - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$.

Solución:

$$\frac{\operatorname{sen}^3(x) + \cos^3(x)}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)} = \frac{(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))(\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \cos^2(x))}{(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))(1 - \operatorname{sen}(x)\cos(x))}{(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^3(x) + \cos^3(x)}{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)} = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$$

Scanned by CamScanner

Identidades de ángulo mitad

Sabemos que:

$$cos(2x) = 2\,cos^2(x) - 1$$

De donde:

$$cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$$

y así:

$$cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1+cos(2x)}{2}}$$

$$cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cos(x)}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

El signo del radical debe escogerse en relación con la ubicación del ángulo de medida $\left(\frac{x}{2}\right)$. Si se encuentra en el primer cuadrante, $cos\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ y así sucesivamente.

$$cos(2x) = 1 - 2\,sen^2(x)$$

$$sen^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$$

$$sen(x) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(2x)}{2}}$$

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(x)}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(x)}{1+cos(x)}} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo 5.46 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad: $\frac{sen(3x)}{sen(x)} - \frac{cos(3x)}{cos(x)} = 2.$

Solución:

$$\frac{sen(3x)}{sen(x)} - \frac{cos(3x)}{cos(x)} = \frac{sen(2x+x)}{sen(x)} - \frac{cos(2x+x)}{cos(x)}$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{sen(2x)\cos(x) + \cos(2x)\,sen(x)}{sen(x)} - \frac{\cos(2x)\cos(x) - sen(2x)\,sen(x)}{\cos(x)}$$

$$= \frac{2sen(x)\cos^2(x) + (2\cos^2(x) - 1)\,sen(x)}{sen(x)} - \frac{(2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\,sen^2(x)\cos(x)}{\cos(x)}$$

$$= \frac{2sen(x)\cos^2(x) + 2\cos^2(x)\,sen(x) - sen(x)}{sen(x)} - \frac{2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\,sen^2(x)\cos(x)}{\cos(x)}$$

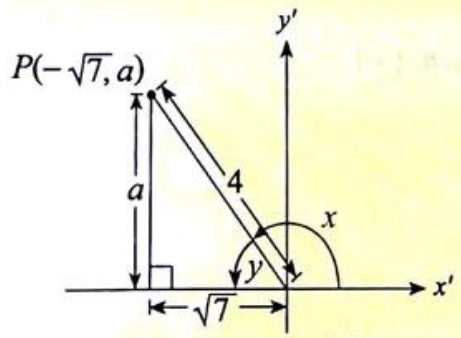
$$= \frac{\cancel{sen(x)}\,(2\cos^2(x) + 2\cos^2(x) - 1)}{\cancel{sen(x)}} - \frac{\cancel{\cos(x)}\,(2\cos^2(x) - 1 - 2sen^2(x))}{\cancel{\cos(x)}}$$

$$= 2\cos^2(x) + \cancel{2\cos^2(x)} - \cancel{1} - \cancel{2\cos^2(x)} + \cancel{1} + 2sen^2(x)$$
$$= 2\,(sen^2(x) + \cos^2(x))$$
$$= 2$$

Ejemplo 5.47 Aplicación de identidades trigonométricas.

Si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, y $\cos(x) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, determine el valor de $\tan(2x + \pi)$.

Solución:



Con base en conceptos previos y la aplicación del Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$a = \sqrt{(4)^2 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt{16 - 7} = 3$$

$$\tan(x) = -\tan(y) = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

Aplicando la identidad correspondiente, el valor requerido está dado por:

$$\tan(2x + \pi) = \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} = \frac{2\left(-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)}{1 - \frac{9}{7}} = \frac{-\frac{6}{\sqrt{7}}}{-\frac{2}{7}}$$

Por lo tanto, $\tan(2x + \pi) = 3\sqrt{7}$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.48 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad: $csc^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2}{1-cos(x)}$.

Solución:

$$csc^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-\left(\sqrt{\frac{1+cos(x)}{2}}\right)^2}$$

$$csc^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2}{1-cos(x)}$$

Ejemplo 5.49 Demostración de identidades trigonométricas.

Determine si las siguientes expresiones constituyen identidades trigonométricas.

a) $cos^2\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(1-cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right)$

b) $sen\,(3x)=2\,sen\left(\frac{3x}{2}\right)\,cos\left(\frac{3x}{2}\right)$

c) $cos\,(x)=cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Solución:

a) $$cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cos(x)}{2}}$$

$$cos\left(\frac{x}{3}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}}$$

$$cos^2\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1+cos\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}$$

$\therefore$ La expresión dada no es una identidad trigonométrica.

b) $$sen(2x) = 2\,sen(x)\,cos(x)$$

$$sen(3x) = 2\,sen\left(\frac{3x}{2}\right)cos\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$\therefore$ La expresión dada sí es una identidad trigonométrica.

Scanned by CamScanner

c) $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$

$cos(x) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$

∴ La expresión dada sí es una identidad trigonométrica.

Identidades de suma a producto

El lector puede verificar que:

$$sen(x+y) + sen(x-y) = 2\,sen(x)\,cos(y)$$
$$cos(x-y) - cos(x+y) = 2\,sen(x)\,sen(y)$$
$$cos(x+y) + cos(x-y) = 2\,cos(x)\,cos(y)$$
$$sen(x+y) - sen(x-y) = 2\,cos(x)\,sen(y)$$

Es frecuente utilizar estas expresiones de otra manera. Si hacemos:

$$x + y = u \qquad x = \frac{u+v}{2}$$
$$x - y = v \qquad y = \frac{u-v}{2}$$

$$sen(u) + sen(v) = 2\,sen\left(\frac{u+v}{2}\right)cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$
$$cos(v) - cos(u) = 2\,sen\left(\frac{u+v}{2}\right)sen\left(\frac{u-v}{2}\right)$$
$$cos(u) + cos(v) = 2\,cos\left(\frac{u+v}{2}\right)cos\left(\frac{u-v}{2}\right)$$
$$sen(u) - sen(v) = 2\,cos\left(\frac{u+v}{2}\right)sen\left(\frac{u-v}{2}\right)$$

Las cuales pueden ser expresadas como:

$$sen(x) + sen(y) = 2\,sen\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$
$$sen(x) - sen(y) = 2\,sen\left(\frac{x-y}{2}\right)cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$
$$cos(x) - cos(y) = -2\,sen\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$
$$cos(x) + cos(y) = 2\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Scanned by CamScanner

Identidades de producto a suma

$$sen(x)\,cos(y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y) + sen(x-y)\right] \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

$$sen(x)\,sen(y) = \frac{1}{2}\left[cos(x-y) - cos(x+y)\right] \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

$$cos(x)\,cos(y) = \frac{1}{2}\left[cos(x+y) + cos(x-y)\right] \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

$$cos(x)\,sen(y) = \frac{1}{2}\left[sen(x+y) - sen(x-y)\right] \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

Ejemplo 5.50 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad: $\dfrac{sen(4x) + sen(8x)}{cos(4x) + cos(8x)} = tan(6x)$.

Solución:

$$\frac{sen(4x) + sen(8x)}{cos(4x) + cos(8x)} = \frac{\not{2}\, sen\left(\frac{4x+8x}{2}\right) cos\left(\frac{4x-8x}{2}\right)}{\not{2}\, cos\left(\frac{4x+8x}{2}\right) cos\left(\frac{4x-8x}{2}\right)}$$

$$= \frac{sen(6x)\,\cancel{cos(-2x)}}{cos(6x)\,\cancel{cos(-2x)}}$$

$$= tan(6x)$$

Ejemplo 5.51 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad:

$$sen(x)\,(sen(3x) + sen(5x)) = cos(x)\,(cos(3x) - cos(5x))$$

Solución:

$$sen(x)\,(sen(3x) + sen(5x)) = sen(x)\left[2\,sen\left(\frac{3x+5x}{2}\right) cos\left(\frac{3x-5x}{2}\right)\right]$$

$$= sen(x)\,[2\,sen(4x)\,cos(-x)]$$

$$= 2\,cos(x)\,[sen(4x)\,sen(x)]$$

$$= 2\,cos(x)\left(\frac{1}{2}\,[cos(4x-x) - cos(4x+x)]\right)$$

$$= cos(x)\,(cos(3x) - cos(5x))$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.52 Demostración de identidades trigonométricas.

Demuestre la identidad: $\frac{cos(x)+cos(y)}{cos(x)-cos(y)} = -\,cot\left(\frac{x+y}{2}\right)cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Solución:

$$\frac{cos(x)+cos(y)}{cos(x)-cos(y)} = \frac{\not{2}\,cos\left(\frac{x+y}{2}\right)cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{-\not{2}\,sen\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$\frac{cos(x)+cos(y)}{cos(x)-cos(y)} = -\,cot\left(\frac{x+y}{2}\right)cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Ejemplo 5.53 Interpretación gráfica de una identidad trigonométrica.

Se requiere establecer si la igualdad $sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = cos(x)$ es una identidad.

Solución:

$sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = sen(x)\,cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos\,(x)\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Desarrollando miembro izquierdo.

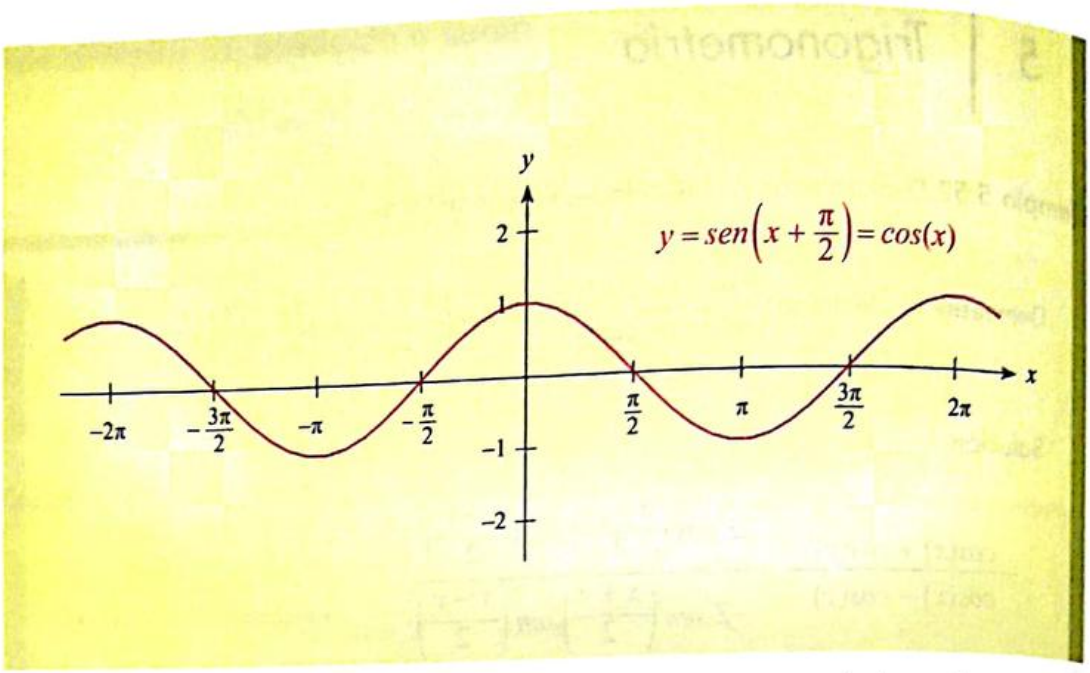
$sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = (sen(x))\,(0) + (cos(x))\,(1)$ Reemplazando valores conocidos.

$sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = cos(x)$ Simplificando.

Con lo cual se demuestra la identidad.

En la siguiente figura se observa que la gráfica de $sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ es la de $sen(x)$ desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda, la cual corresponde a la gráfica de $cos(x)$. Con esto se verifica la identidad.

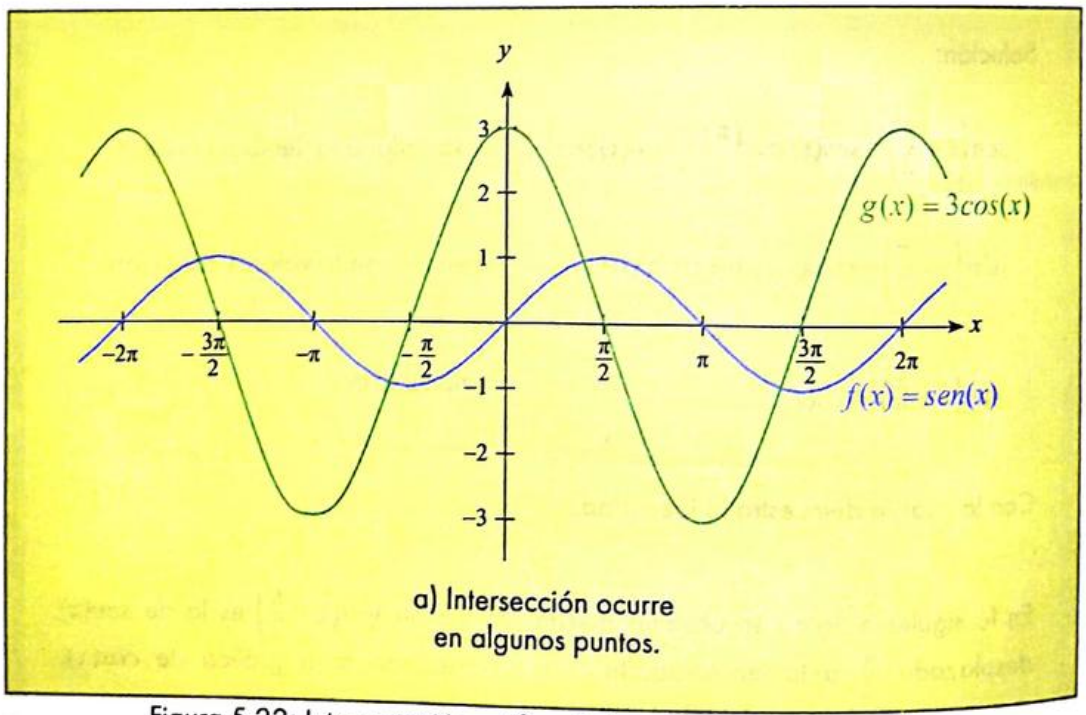
Scanned by CamScanner



Identificar gráficamente identidades trigonométricas es práctico cuando las gráficas no son muy complicadas de construir o cuando no se dispone de un software graficador.

Una identidad se la puede considerar como una ecuación que la satisfacen todos los elementos del conjunto referencial.

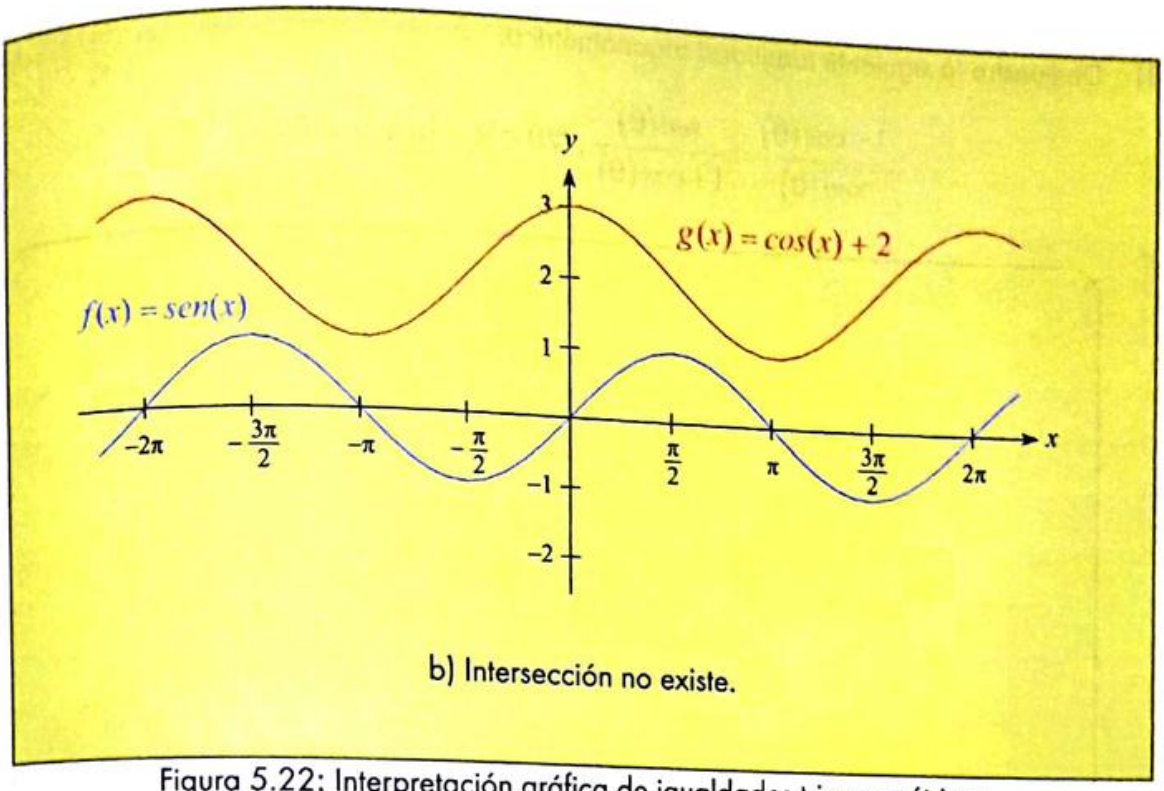
En caso de tener una igualdad que no represente una identidad trigonométrica, las gráficas serán diferentes y puede ocurrir que se intersequen en algunos puntos o que la intersección no exista, tal como se ilustra en la Figura 5.22.



a) Intersección ocurre en algunos puntos.

Figura 5.22: Interpretación gráfica de igualdades trigonométricas.

Scanned by CamScanner



b) Intersección no existe.

Figura 5.22: Interpretación gráfica de igualdades trigonométricas.

La Figura 5.22(a) puede interpretarse como una igualdad que se cumple sólo para ciertos elementos del dominio de las funciones, mientras que en la figura 5.22(b) se puede notar que las dos funciones trigonométricas no tienen puntos en común.

Para algunas aplicaciones es necesario obtener estos puntos de intersección entre gráficas, lo cual conlleva a resolver ecuaciones trigonométricas tal como se estudiará más adelante.

Scanned by CamScanner

1) Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1-cos(\theta)}{sen(\theta)}=\frac{sen(\theta)}{1+cos(\theta)},\ \forall\theta\in\mathbf{R}-\{n\pi,\ n\in\mathbf{Z}\}$$

2) Calcule el valor numérico de $a=sec^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1$.

$\cos^2 \frac{\pi}{8} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{1}{4}$

$\sec^2 \frac{1}{4} - 1$

$\frac{2}{1+\sec 4} = \frac{1}{1} = \frac{2-1}{1+\sec 4} = \frac{1}{1+\sec 4}$

$\sec 4$

Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

3) Sea ϕ la medida de un ángulo del II cuadrante tal que $sen(\phi) = \frac{1}{7}$.

a) Utilice identidades trigonométricas para calcular $cos(\phi)$ y $tan(\phi)$.

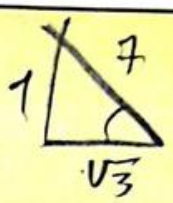
$7^2 - 1^2 = c^2$

$\sqrt{48} = c^2$

$\sqrt{16 \cdot 3}$

$4\sqrt{3}$

$\cos(\phi) = \frac{4\sqrt{3}}{7}$



b) Obtenga el valor numérico de $b = |sen(2\phi)\ (cos(2\phi))^{-1}|$.

$\frac{\sin(2\phi)}{\cos(2\phi)}$

$\frac{2\sin\phi\cos\phi}{1-\cos^2\phi}$

$\frac{2\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)}$

$\frac{2}{48-1} \cdot 1 = \frac{2}{47}$

$\left|\frac{2}{4\sqrt{3}}\right|$

$\frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 1}{4\sqrt{3}^2}$

$\frac{2}{(4\sqrt{3}-1)^2}$

$= \frac{2}{47}$ //

Scanned by CamScanner

5.6 Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una ecuación trigonométrica, transformarla en una equivalente y despejar su incógnita, empleando despeje directo o descomposición en factores.
- Dada una ecuación trigonométrica, transformarla en una equivalente y despejar su incógnita, empleando algún cambio de variable adecuado.
- Dada una inecuación trigonométrica, determinar analítica y gráficamente su solución.

En esta sección veremos que las ecuaciones o inecuaciones que involucran funciones trigonométricas pueden ser resueltas utilizando las identidades estudiadas en la sección anterior, las gráficas de estas funciones y sus respectivas inversas.

Ejemplo 5.54 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $\text{Re} = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $sen(x) = \frac{1}{2}$. Determine la suma de los elementos de $Ap(x)$.

Solución:

$$x = arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(x = \frac{\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{6}\right)$$

Comprobando:

$$p\left(\frac{\pi}{6}\right): \quad sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad p\left(\frac{\pi}{6}\right) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{5\pi}{6}\right): \quad sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad p\left(\frac{5\pi}{6}\right) \equiv 1$$

Por lo tanto:

$$Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

La suma de los elementos de $Ap(x)$ es π.

Ejemplo 5.55 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $\text{Re} = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $2cos^2(x) - cos(x) - 1 = 0$. Determine la suma de los elementos de $Ap(x)$.

Solución:

Sea $u = cos(x)$

Scanned by CamScanner

$$2u^2-u-1=0$$

$$\frac{(2u-2)(2u+1)}{2}=0$$

$$(u-1)(2u+1)=0$$

$$(u-1=0)\vee(2u+1=0)$$

$$(u=1)\vee\left(u=-\frac{1}{2}\right)$$

$$(cos(x)=1)\vee\left(cos(x)=-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left[x=arccos(1)\right]\vee\left[x=arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\left[(x=0)\vee(x=2\pi)\right]\vee\left[\left(x=\frac{2\pi}{3}\right)\vee\left(x=\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

Comprobando:

$$p(0):\ 2cos^2(0)-cos(0)-1 = 2(1)-1-1 = 0 \quad \therefore p(0)\equiv 1$$

$$p\left(\frac{2\pi}{3}\right):\ 2cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)-cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}-1 = 0 \quad \therefore p\left(\frac{2\pi}{3}\right)\equiv 1$$

$$p\left(\frac{4\pi}{3}\right):\ 2cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)-cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)-1 = 2\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}-1 = 0 \quad \therefore p\left(\frac{4\pi}{3}\right)\equiv 1$$

$$p(2\pi):\ 2cos^2(2\pi)-cos(2\pi)-1 = 2(1)-1-1 = 0 \quad \therefore p(2\pi)\equiv 1$$

Por lo tanto:

$$Ap(x)=\left\{0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},2\pi\right\}.$$

La suma de los elementos de $Ap(x)$ es 4π.

Ejemplo 5.56 Ecuaciones trigonométricas.

Sea el conjunto referencial $Re=[0,\pi)$ y el predicado de una variable:

$$p(x):\ 2sen^2(x)+sen^2(2x)=2$$

Tabule el conjunto de verdad $Ap(x)$.

Solución:

$$2sen^2(x)+(2sen(x)cos(x))^2=2$$

Scanned by CamScanner

$$2sen^2(x)+4sen^2(x)cos^2(x)=2$$

$$2sen^2(x)+4sen^2(x)\left(1-sen^2(x)\right)=2$$

$$2sen^2(x)+4sen^2(x)-4sen^4(x)=2$$

$$sen^2(x)+2sen^2(x)-2sen^4(x)=1$$

$$2sen^4(x)-3sen^2(x)+1=0$$

Se realiza el cambio de variable: $u=sen^2(x)$

Se tiene la ecuación cuadrática:

$$2u^2-3u+1=0$$

$$(u-1)(2u-1)=0$$

$$(u-1=0) \ \vee \ (2u-1=0)$$

$$(u=1) \ \vee \ \left(u=\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(sen^2(x)=1\right) \ \vee \ \left(sen^2(x)=\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(sen(x)=1\right)\vee\left(sen(x)=-1\right) \ \vee \ \left(sen(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vee\left(sen(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(x=arcsen(1)\right)\vee\left(x=arcsen(-1)\right)\vee\left(x=arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\vee\left(x=arcsen\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Considerando el conjunto referencial Re = $[0, \pi)$

$$\left(x\in\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right)\vee(x\in\varnothing) \ \vee \ \left(x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}\right)\vee(x\in\varnothing)$$

A continuación se verifica cada valor:

$$p\left(\frac{\pi}{4}\right): \ 2sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(1)^2=2 \ \therefore \ p\left(\frac{\pi}{4}\right)\equiv 1$$

$$p\left(\frac{\pi}{2}\right): \ 2sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+sen^2(\pi)=2(1)^2+(0)^2=2 \ \therefore \ p\left(\frac{\pi}{2}\right)\equiv 1$$

$$p\left(\frac{3\pi}{4}\right): \ 2sen^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)+sen^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(-1)^2=2 \ \therefore \ p\left(\frac{3\pi}{4}\right)\equiv 1$$

Scanned by CamScanner

Entonces:

$$Ap(x)=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right\}$$

Ejemplo 5.57 Ecuaciones trigonométricas.

Sea el conjunto referencial $\mathrm{Re}=[0,2\pi)$ y el predicado de una variable:

$$p(x):\quad sen(2x)+\sqrt{3}\,sen(x)=2sen^2(x)-\sqrt{3}\,cos(x)-2$$

Determine la suma de los elementos del conjunto de verdad $Ap(x)$.

Solución:

$$2sen(x)cos(x)+\sqrt{3}sen(x)=2\left(1-cos^2(x)\right)-\sqrt{3}\,cos(x)-2$$

$$2sen(x)cos(x)+\sqrt{3}sen(x)-2+2cos^2(x)+\sqrt{3}\,cos(x)+2=0$$

$$2cos(x)\left(sen(x)+cos(x)\right)+\sqrt{3}\left(sen(x)+cos(x)\right)=0$$

$$sen(x)+cos(x))\left(2cos(x)+\sqrt{3}\right)=0$$

$$\left(sen(x)+cos(x)=0\right)\ \vee\ \left(2cos(x)+\sqrt{3}=0\right)$$

$$\left(sen(x)=-cos(x)\right)\ \vee\ \left(cos(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(tan(x)=-1\right)\ \vee\ \left(x=arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\left(x=arc\,tan(-1)\right)\ \vee\ \left(x=arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$\left(x\in\left\{\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}\right)\ \vee\ \left(x\in\left\{\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right\}\right)$$

Scanned by CamScanner

A continuación se verifica cada valor:

$$p\left(\frac{3\pi}{4}\right):\ sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\,sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2sen^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\,cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-2$$

$$-1+\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)-\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2 \quad \therefore\ p\left(\frac{3\pi}{4}\right)\equiv 1$$

$$p\left(\frac{7\pi}{4}\right):\ sen\left(\frac{7\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\,sen\left(\frac{7\pi}{4}\right)=2sen^2\left(\frac{7\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\,cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)-2$$

$$-1+\sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)-\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2 \quad \therefore\ p\left(\frac{7\pi}{4}\right)\equiv 1$$

$$p\left(\frac{5\pi}{6}\right):\ sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\,sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\,sen^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\,cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)-2$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{4}\right)-\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2 \quad \therefore\ p\left(\frac{5\pi}{6}\right)\equiv 1$$

$$p\left(\frac{7\pi}{6}\right):\ sen\left(\frac{7\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\,sen\left(\frac{7\pi}{6}\right)=2\,sen^2\left(\frac{7\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\,cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)-2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{4}\right)-\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2 \quad \therefore\ p\left(\frac{7\pi}{6}\right)\equiv 1$$

Entonces:

$$Ap(x)=\left\{\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{7\pi}{4}\right\}$$

Dado que se solicita la suma de los elementos, la respuesta es:

$$\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}+\frac{7\pi}{4}=\frac{9\pi+10\pi+14\pi+21\pi}{12}=\frac{54\pi}{12}=\frac{9\pi}{2}$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.58 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $\text{Re} = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $tan(2x) + 2sen(x) = 0$, determine la suma de los elementos de $Ap(x)$.

Solución:

$$tan(2x) + 2sen(x) = 0$$

$$\frac{sen(2x)}{cos(2x)} + 2sen(x) = 0$$

$$\frac{2sen(x)cos(x)}{2cos^2(x) - 1} + 2sen(x) = 0$$

$$\frac{2sen(x)cos(x) + 2sen(x)\,(2cos^2(x) - 1)}{2cos^2(x) - 1} = 0$$

$$\frac{2sen(x)(cos(x) + 2cos^2(x) - 1)}{2cos^2(x) - 1} = 0$$

$$(2sen(x) = 0) \vee (2cos^2(x) + cos(x) - 1 = 0)$$

$$\left[x = arcsen(0)\right] \vee \left[x = arccos(-1) \vee x = arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\left[(x = 0) \vee (x = \pi) \vee (x = 2\pi)\right] \vee \left[(x = \pi) \vee \left(x = \frac{\pi}{3}\right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

Comprobando:

$$p(0) : tan(0) + 2\,sen(0) = 0 \quad \therefore\ p(0) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{\pi}{3}\right) : tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2\,sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad \therefore\ p\left(\frac{\pi}{3}\right) \equiv 1$$

$$p(\pi) : tan(2\pi) + 2\,sen(\pi) = 0 \quad \therefore\ p(\pi) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{5\pi}{3}\right) : tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) + 2\,sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \quad \therefore\ p\left(\frac{5\pi}{3}\right) \equiv 1$$

$$p(2\pi) : tan(4\pi) + 2\,sen(2\pi) = 0 \quad \therefore\ p(2\pi) \equiv 1$$

Por lo tanto $Ap(x) = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

La suma de los elementos de $Ap(x)$ es 5π.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.59 Ecuaciones trigonométricas.

Sea Re = $[-2\pi, 0]$ y $p(x)$: $sec\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$$\left[sec\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \equiv \left[cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) = cos(2x)\, cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+sen(2x)\, sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen(2x)$$

$$\left(sen\,(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\wedge x\in[-2\pi, 0]\right)\Rightarrow \begin{cases} 2x &= -2\pi+\frac{\pi}{3} \\ 2x &= -2\pi+\frac{\pi}{3}-2\pi \\ 2x &= -2\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \\ 2x &= -2\pi+\pi-\frac{\pi}{3}-2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x &= -\frac{5\pi}{3} \\ 2x &= -\frac{11\pi}{3} \\ 2x &= -\frac{4\pi}{3} \\ 2x &= -\frac{10\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= -\frac{5\pi}{6} \\ x &= -\frac{11\pi}{6} \\ x &= -\frac{2\pi}{3} \\ x &= -\frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

Comprobando:

$$p\left(-\frac{11\pi}{6}\right): sec\left(-\frac{11\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right) = sec\left(-\frac{25\pi}{6}\right) = sec\left(-\frac{\pi}{6}\right) = sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ p\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\equiv 1$$

$$p\left(-\frac{5\pi}{3}\right): sec\left(-\frac{10\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right) = sec\left(-\frac{23\pi}{6}\right) = sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ p\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\equiv 1$$

$$p\left(-\frac{5\pi}{6}\right): sec\left(-\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right) = sec\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = sec\left(-\frac{\pi}{6}\right) = sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ p\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\equiv 1$$

$$p\left(-\frac{2\pi}{3}\right): sec\left(-\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right) = sec\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ p\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\equiv 1$$

Por lo tanto $Ap(x)=\left\{-\frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}\right\}$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.60 Ecuaciones trigonométricas.

Sea $\text{Re} = [0, \pi]$ y $p(x)$: $sen(3x) + sen(x) = 0$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$sen(x + 2x) + sen(x) = 0$ Descomponiendo $3x$.

$sen(x)\,cos(2x) + cos(x)\,sen(2x) + sen(x) = 0$ Aplicando identidad $sen(x + y)$.

$sen(x)\,cos(2x) + 2sen(x)\,cos^2(x) + sen(x) = 0$ Aplicando identidad $sen(2x)$.

$sen(x)\,[cos(2x) + 2cos^2(x) + 1] = 0$ Descomponiendo en factores.

$[sen(x) = 0] \vee [4cos^2(x) = 0]$ Igualando a cero cada factor.

$[x = arcsen(0)] \vee [x = arccos(0)]$ Obteniendo las funciones inversas.

$[(x = 0) \vee (x = \pi)] \vee \left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ Encontrando los valores de x.

Comprobando:

$p(0)$: $sen(0) + sen(0) = 0 + 0 = 0$ $\therefore\ p(0) \equiv 1$

$p(\pi)$: $sen(3\pi) + sen(\pi) = 0 + 0 = 0$ $\therefore\ p(\pi) \equiv 1$

$p\left(\frac{\pi}{2}\right)$: $sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1 = 0$ $\therefore\ p\left(\frac{\pi}{2}\right) \equiv 1$

Por lo tanto $Ap(x) = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

Ejemplo 5.61 Ecuaciones trigonométricas.

Si $\text{Re} = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $2^{4\,sen(x)\,cos(x)} + 2^{sen(2x)} - 2 = 0$, determine el conjunto de verdad $Ap(x)$.

Solución:

$2^{4\,sen(x)\,cos(x)} + 2^{sen(2x)} - 2 = 0$

Scanned by CamScanner

Se agrupa para aplicar la identidad trigonométrica de ángulo doble:

$$2^{2[2\,sen(x)\,cos(x)]} + 2^{sen(2x)} - 2 = 0$$

$$2^{2\,sen(2x)} + 2^{sen(2x)} - 2 = 0$$

Se aplica una de las propiedades de los exponentes:

$$\left(2^{sen(2x)}\right)^2 + 2^{sen(2x)} - 2 = 0$$

Se hace un cambio de variable:

$$u = 2^{sen(2x)}$$

La expresión se transforma en:

$$u^2 + u - 2 = 0$$

$$(u+2)(u-1) = 0$$

$$(u+2=0) \vee (u-1=0)$$

$$(u=-2) \vee (u=1)$$

Se vuelve a la variable original:

$$\left(2^{sen(2x)} = -2\right) \vee \left(2^{sen(2x)} = 1\right)$$

$$(x \in \varnothing) \vee (sen(2x) = 0)$$

$$(x \in \varnothing) \vee (2x = arcsen\,(0))$$

$$(x \in \varnothing) \vee (2x \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\})$$

$$(x \in \varnothing) \vee \left(x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}\right)$$

Se verifican las soluciones:

$$p(0): 2^{4\,sen(0)\,cos(0)} + 2^{sen(0)} - 2 = 2^0 + 2^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\therefore p(0) \equiv 1$$

$$p\left(\frac{\pi}{2}\right): 2^{4\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\,cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 2^{sen(\pi)} - 2 = 2^0 + 2^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\therefore p\left(\frac{\pi}{2}\right) \equiv 1$$

Scanned by CamScanner

$p(\pi)$: $2^{4\,sen(\pi)\,cos(\pi)} + 2^{sen(2\pi)} - 2 = 2^0 + 2^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

$\therefore\ p(\pi) \equiv 1$

$p\left(\frac{3\pi}{2}\right)$: $2^{4\,sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\,cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)} + 2^{sen(3\pi)} - 2 = 2^0 + 2^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

$\therefore\ p\left(\frac{3\pi}{2}\right) \equiv 1$

$p(2\pi)$: $2^{4\,sen(2\pi)\,cos(2\pi)} + 2^{sen(4\pi)} - 2 = 2^0 + 2^0 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

$\therefore\ p(2\pi) \equiv 1$

Entonces:

$Ap(x) = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

Ejemplo 5.62 Ecuaciones trigonométricas.

Sea Re = $[0, 2\pi]$ y $p(x)$: $sen^2(2x) - sen\,(2x) - 2 = 0$, determine la suma de los elementos de $Ap(x)$.

Solución:

Sea $z = sen(2x)$

$z^2 - z - 2 = 0 \Rightarrow [(z-2)\,(z+1) = 0] \Rightarrow [(z-2=0) \vee (z+1=0)] \Rightarrow [(z=2) \vee (z=-1)]$

Descartamos $z = 2$, porque no es una solución trigonométrica posible.

Luego:

$sen(2x) = -1 \Rightarrow \left[\left(2x = \frac{3\pi}{2}\right) \vee \left(2x = \frac{7\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow \left[\left(x_1 = \frac{3\pi}{4}\right) \wedge \left(x_2 = \frac{7\pi}{4}\right)\right]$

$p\left(\frac{3\pi}{4}\right)$: $sen^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0\ \therefore\ p\left(\frac{3\pi}{4}\right) \equiv 1$

$p\left(\frac{7\pi}{4}\right)$: $sen^2\left(\frac{7\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{7\pi}{2}\right) - 2 = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0\ \therefore\ p\left(\frac{7\pi}{4}\right) \equiv 1$

Por lo tanto $Ap(x) = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

Finalmente, $x_1 + x_2 = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.63 Ecuaciones trigonométricas.

Sea Re = $[0, 2\pi]$ y $p(x)$: $sen^2(3x) - 2\,cos(2x) + cos^2(3x) = 0$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$[sen^2(3x) + cos^2(3x)] = 2\,cos(2x)$ Agrupando términos.

$cos(2x) = \frac{1}{2}$ Identidad pitagórica.

$2x = arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ Resolviendo la ecuación.

$\left(2x = \frac{\pi}{3}\right) \vee \left(2x = \frac{5\pi}{3}\right) \vee \left(2x = \frac{7\pi}{3}\right) \vee \left(2x = \frac{11\pi}{3}\right)$ Determinando los valores de x.

$\left(x = \frac{\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{7\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{11\pi}{6}\right)$

Comprobando, tenemos que:

$p\left(\frac{\pi}{6}\right): sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = 0$

$\therefore\ p\left(\frac{\pi}{6}\right) \equiv 1$

$p\left(\frac{5\pi}{6}\right): sen^2\left(\frac{5\pi}{2}\right) - 2\,cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + cos^2\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = 0$

$\therefore\ p\left(\frac{5\pi}{6}\right) \equiv 1$

$p\left(\frac{7\pi}{6}\right): sen^2\left(\frac{7\pi}{2}\right) - 2\,cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + cos^2\left(\frac{7\pi}{2}\right) = (-1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = 0$

$\therefore\ p\left(\frac{7\pi}{6}\right) \equiv 1$

$p\left(\frac{11\pi}{6}\right): sen^2\left(\frac{11\pi}{2}\right) - 2\,cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) + cos^2\left(\frac{11\pi}{2}\right) = (-1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = 0$

$\therefore\ p\left(\frac{11\pi}{6}\right) \equiv 1$

Por lo tanto $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Ejemplo 5.64 Ecuaciones trigonométricas.

Sea Re = $[-\pi, \pi]$ y $p(x)$: $3sen(x) + cos(2x) = 2$, determine $Ap(x)$.

Solución:

$3sen(x) + cos(2x) = 2$

$3sen(x) + 1 - 2sen^2(x) = 2$ Aplicando identidad de $cos(2x)$.

$2sen^2(x) - 3sen(x) + 1 = 0$ Obteniendo una ecuación equivalente.

Scanned by CamScanner

Sea $u = sen(x)$ Efectuando un cambio de variable.

$2u^2 - 3u + 1 = 0$ Transformando en una ecuación cuadrática.

$\frac{(2u-2)(2u-1)}{2} = 0$ Resolviendo la ecuación.

$(u = 1) \vee \left(u = \frac{1}{2}\right)$ Obteniendo los valores de u.

$[sen(x) = 1] \vee \left[sen(x) = \frac{1}{2}\right]$ Regresando a la variable original.

$[x = arcsen(1)] \vee \left[x = arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ Obteniendo los valores de x.

$\left(x = \frac{\pi}{2}\right) \vee \left[\left(x = \frac{\pi}{6}\right) \vee \left(x = \frac{5\pi}{6}\right)\right]$ Expresando las soluciones.

Comprobando, tenemos que:

$p\left(\frac{\pi}{2}\right): 3sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos(\pi) = 3(1) + (-1) = 2 \quad \therefore p\left(\frac{\pi}{2}\right) \equiv 1$

$p\left(\frac{\pi}{6}\right): 3sen\left(\frac{\pi}{6}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 2 \quad \therefore p\left(\frac{\pi}{6}\right) \equiv 1$

$p\left(\frac{5\pi}{6}\right): 3sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 2 \quad \therefore p\left(\frac{5\pi}{6}\right) \equiv 1$

Por lo tanto: $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

Ejemplo 5.65 Inecuaciones trigonométricas.

Sea el conjunto referencial Re = $[0, 2\pi]$ y el predicado de una variable:

$$p(x): \quad \mu\left(\sqrt{3} - 2cos(x)\right) = 0$$

Tabule el conjunto de verdad $Ap(x)$.

Solución:

Debe cumplirse que el argumento de la función escalón sea una cantidad negativa o igual a cero:

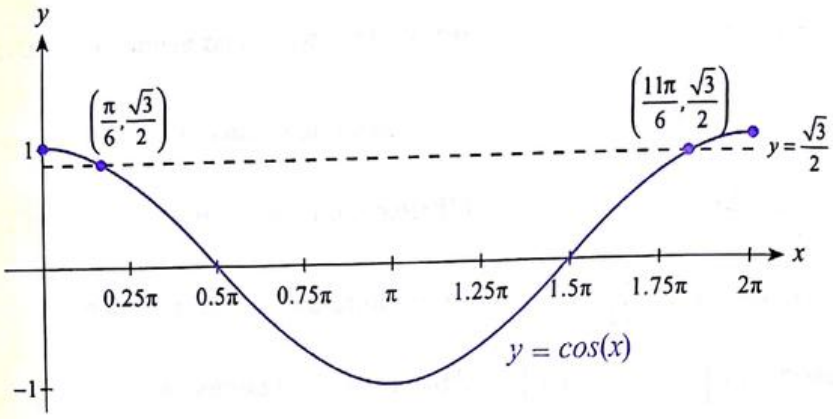
$$\sqrt{3} - 2cos(x) \leq 0$$

Scanned by CamScanner

Resolviendo la inecuación trigonométrica:

$$-2\cos(x) \leq -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Graficando la función:



Entonces:

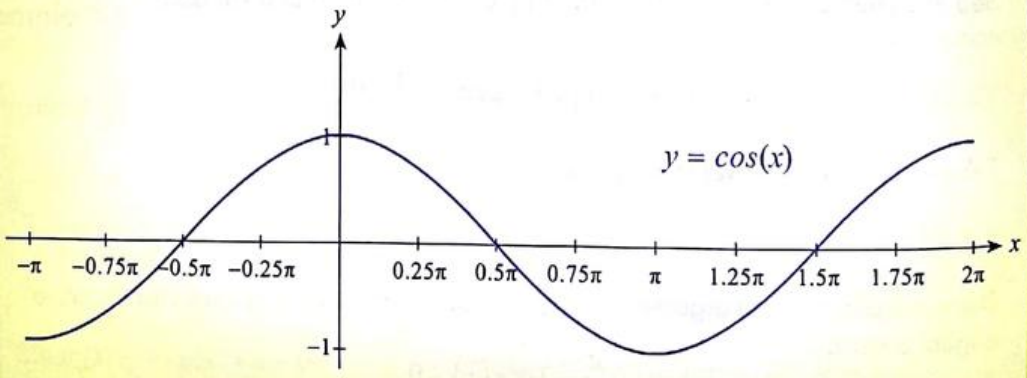
$$Ap(x) = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$$

Ejemplo 5.66 Inecuaciones trigonométricas.

Si Re = $[-\pi, 2\pi]$ y $p(x)$: $sgn\,(cos\,(2x)) \geq 0$, determine el conjunto de verdad $Ap(x)$.

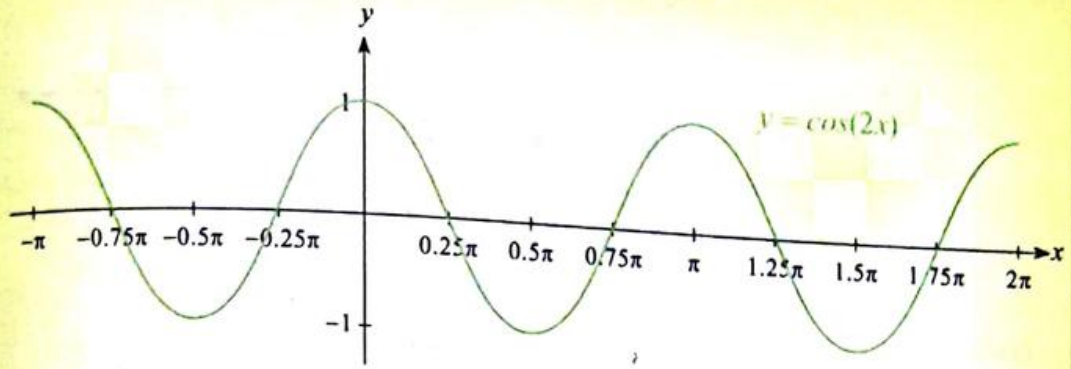
Solución:

Se grafica la función solicitada, aplicando las diferentes técnicas de graficación:
En primer lugar, se bosqueja la gráfica de la función coseno.

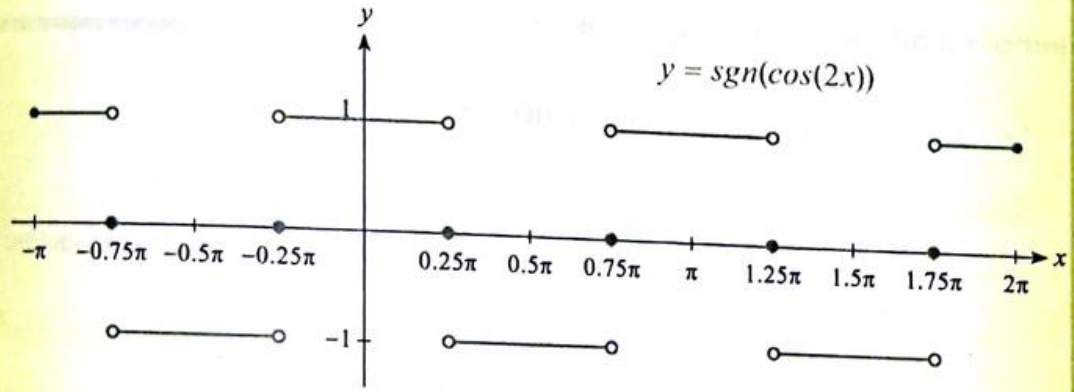


Scanned by CamScanner

El período fundamental se reduce a la mitad, ahora $T = \pi$



Se aplica la definición de la función signo:



Entonces:

$$Ap(x) = \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

Ejemplo 5.67 Inecuaciones trigonométricas.

Sea $\text{Re} = [0, 2\pi]$ y $p(x)$: $sgn\left(2sen\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) = 1$, determine $Ap(x)$.

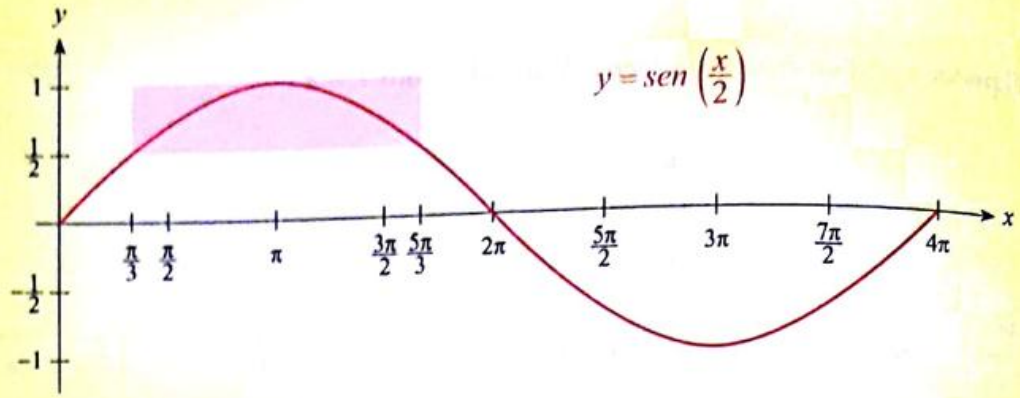
Solución:

Se debe cumplir lo siguiente:

$$2sen\left(\frac{x}{2}\right) - 1 > 0 \Rightarrow sen\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow \left(\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right)$$

Scanned by CamScanner

En la gráfica de la función, mostrada a continuación, se ha sombreado el intervalo para el cual $\left[sen\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{2}\right]$:



Entonces:

$$Ap(x) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

Ejemplo 5.68 Inecuaciones trigonométricas.

Sea $Rc = [-2\pi, 2\pi]$ y $p(x) : [\![sen(x)\ cos(x)]\!] = 0$, determine $Ap(x)$.

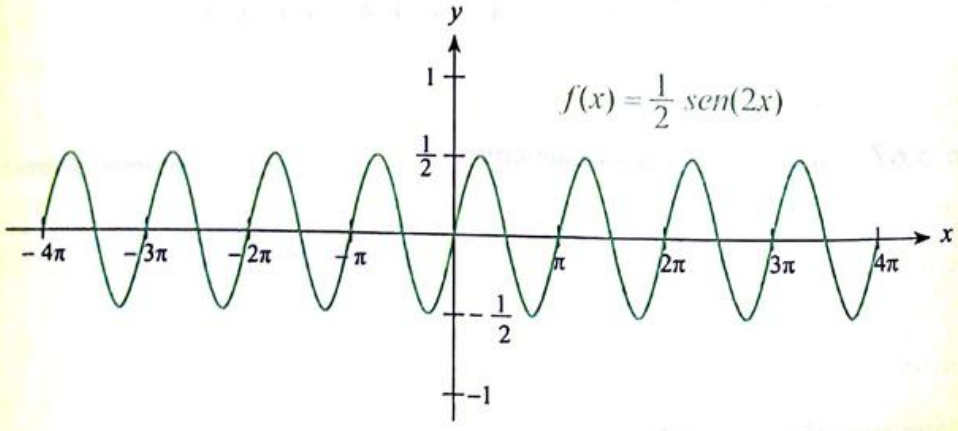
Solución:

Para que se cumpla $[\![sen(x)\ cos(x)]\!] = 0$, se debería resolver la siguiente inecuación:

$$0 \leq sen(x)\ cos(x) < 1$$

$$0 \leq \frac{1}{2}\ sen(2x) < 1$$

Si construimos la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}\ sen(2x)$, tenemos:



Podemos notar que para que $0 \leq f(x) < 1$, debe cumplirse que:

$$2x \in [-4\pi, -3\pi] \cup [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup \{4\pi\}$$

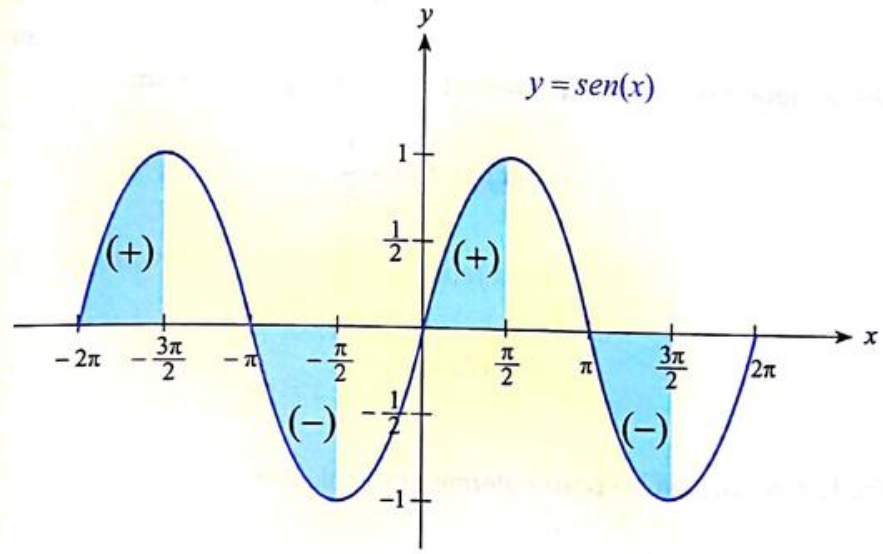
Scanned by CamScanner

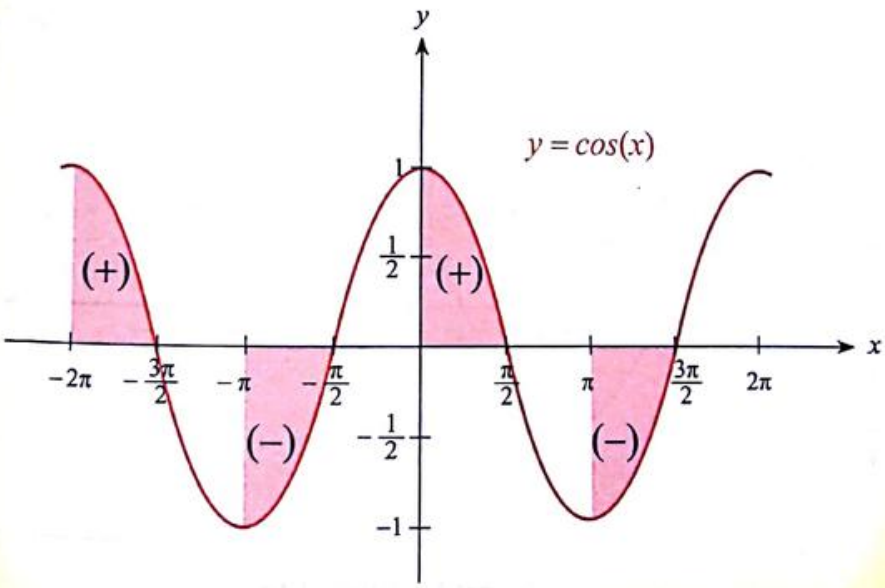
Por lo cual:

$$Ap(x) = \left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \{2\pi\}$$

Otra manera de resolver este mismo problema, sería graficando las funciones $sen(x)$ y $cos(x)$, para luego verificar que se cumple lo siguiente:

$$0 \leq f(x)\, g(x) < 1$$





Se puede observar que $Ap(x)$ efectivamente corresponde al conjunto previamente encontrado.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.69 Inecuaciones trigonométricas.

Sea f: $X \mapsto \mathbf{R}$ una función de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = ln\left(sen(x)cos(x) - \frac{1}{4}\right)$$

Especifique cuál debería ser el conjunto X que tenga la mayor cardinalidad posible y que cumpla la condición: $X \subseteq [0, 2\pi]$.

Solución:

Debe cumplirse que el argumento del logaritmo sea una cantidad positiva:

$$sen(x)cos(x) - \frac{1}{4} > 0$$

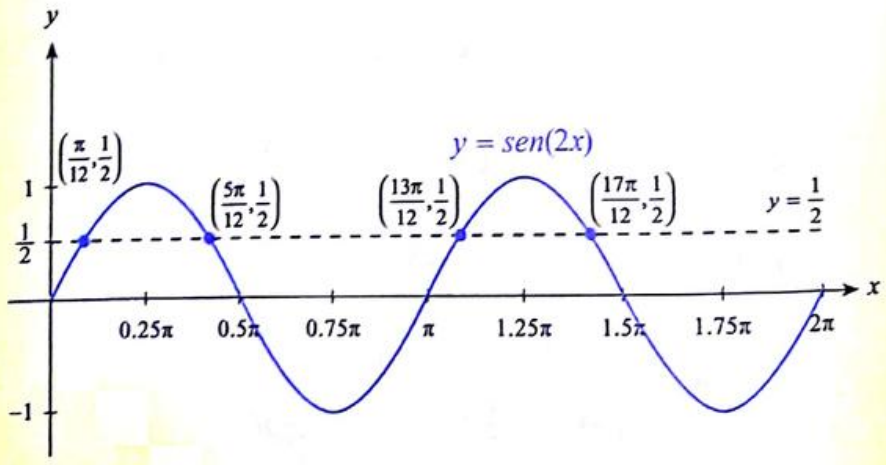
Por lo que se debe resolver la siguiente inecuación trigonométrica:

$$sen(x)cos(x) > \frac{1}{4}$$

$$2sen(x)cos(x) > \frac{1}{2}$$

$$sen(2x) > \frac{1}{2}$$

Se grafica la función $sen(2x)$ para determinar la solución:



Luego,

$$Ap(x) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right)$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 5.70 Inecuaciones trigonométricas.

Sea $f: X \mapsto \mathbb{R}$ una función de variable real cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+sen(x)-2cos^2(x)}}$$

Especifique cuál debería ser el conjunto X que tenga la mayor cardinalidad posible y que cumpla la condición: $X \subseteq [0, 2\pi]$.

Solución:

Debe cumplirse que el radicando sea una cantidad positiva:

$$1+sen(x)-2cos^2(x)>0$$

Por lo que se debe resolver la inecuación trigonométrica:

$$2cos^2(x)-sen(x)-1<0$$
$$2\left(1-sen^2(x)\right)-sen(x)-1<0$$
$$2-2sen^2(x)-sen(x)-1<0$$
$$2sen^2(x)+sen(x)-1>0$$

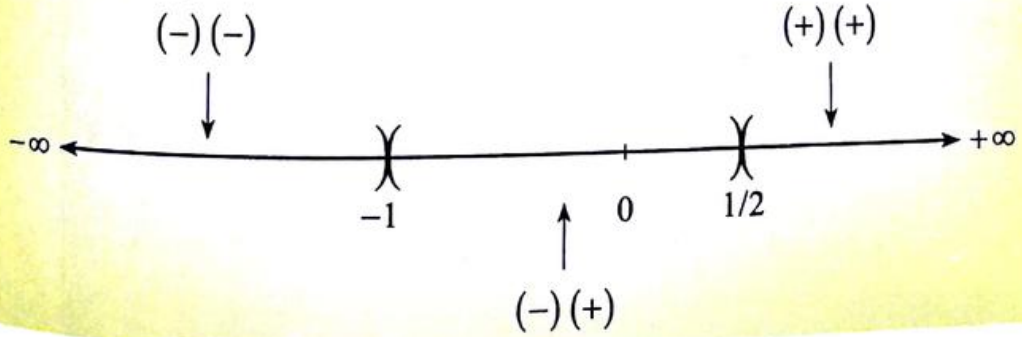
Se realiza el cambio de variable:

$$u = sen(x)$$

Ahora se debe resolver la inecuación cuadrática:

$$2u^2+u-1>0$$
$$(u+1)(2u-1)>0$$

Se analizan los puntos críticos:



Scanned by CamScanner

Por lo que:

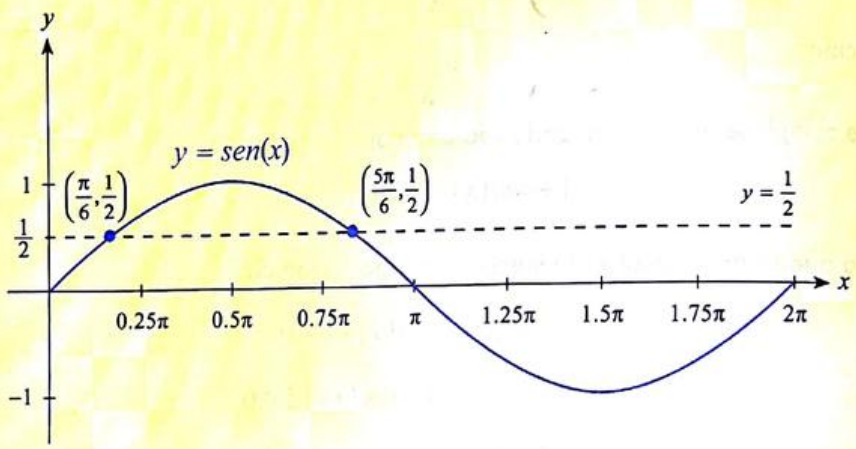
$$(u<-1)\vee\left(u>\frac{1}{2}\right)$$

Volviendo a la variable original:

$$(sen(x)<-1)\vee\left(sen(x)>\frac{1}{2}\right)$$

$$(x\in\varnothing)\vee\left(sen(x)>\frac{1}{2}\right)$$

Se grafica la función $sen(x)$:



Entonces:

$$Ap(x)=\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$$

Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

5.6 Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas

Autoevaluación

1) Sean las funciones trigonométricas $f(x) = \cos^2(2x)$, $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $h(x) = \tan(x)$. Si se define el conjunto referencial $Re = [0, \pi]$, determine el conjunto de verdad para los siguientes predicados:

a) $p(x): f\left(\frac{x}{2}\right) = (g(x))^2$

$\cos^2\left(\frac{2x}{2}\right) \operatorname{sen}(x)^2$ $\quad \cos^2(45) = \operatorname{Sen}^2(45)$

$\cos^2(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ $\quad \cos^2(2 \cdot 5)^2 = \operatorname{sen}^2(2 \cdot 5)$

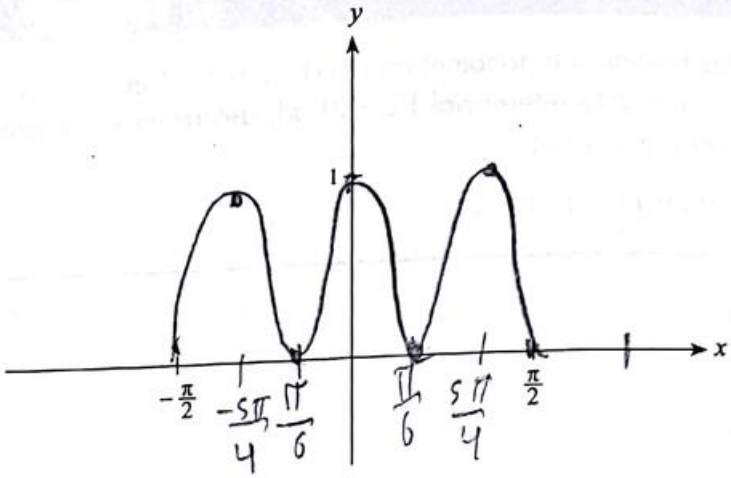
$Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

b) $q(x): h\left(\left[1 - g(x)\right]\left[1 + g(x)\right]\right) > 0$

Scanned by CamScanner

2) Sea $\text{Re} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y el predicado $p(x)$: $cos(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

a) Bosqueje las funciones trigonométricas especificadas en el predicado, en el mismo plano cartesiano, mostrando las soluciones que se espera obtener.



b) Determine analíticamente $Ap(x)$ y muestre que los elementos de este conjunto de verdad coinciden con los obtenidos en el literal anterior.

Scanned by CamScanner

Respuesta al desafío

En el bosquejo se ha representado la situación descrita, evidenciándose que cada vez que el camaleón parpadea, la localización de la libélula varía de manera tal que por un lado se incrementa en dos unidades la menor distancia a cada una de ellas; y por otra parte, aumenta en dos grados la medida del ángulo de visibilidad del camaleón, generándose la suma indicada.

Con el propósito de determinar el valor de la suma antes referida para demostrar la igualdad, realizaremos los siguientes pasos:

1) Asignamos a la suma un valor m:

$$m = 2sen(2°) + 4sen(4°) + \ldots + 178sen(178°) + 180sen(180°)$$

2) Multiplicamos por $sen\,(1°)$ y reemplazamos el valor de $sen(180°) = 0$:

$$msen(1°) = sen(1°)\left[2sen(2°) + 4sen(4°) + \ldots + 178sen(178°)\right]$$

$$msen(1°) = 2sen(2°)sen(1°) + 4sen(4°)sen(1°) + \ldots + 178sen(178°)sen(1°)$$

3) Utilizamos la identidad correspondiente de producto a suma:

$$msen(1°) = 2\left(\frac{cos(1°) - cos(3°)}{2}\right) + 4\left(\frac{cos(3°) - cos(5°)}{2}\right) + \ldots + 178\left(\frac{cos(177°) - cos(179°)}{2}\right)$$

4) Simplificamos cada uno de los sumandos:

$$msen(1°) = cos(1°) + cos(3°) + cos(5°) + cos(7°) + \ldots + cos(173°) + cos(175°) + cos(177°) - 89cos(179°)$$

5) Agrupamos términos de manera apropiada:

$$msen(1°) = \left(cos(1°) - 89cos(179°)\right) + \left(cos(3°) + cos(177°)\right) + \left(cos(5°) + cos(175°)\right) + \left(cos(7°) + cos(173°)\right) + \ldots$$

6) Utilizamos la identidad $cos(180° - x) = -cos(x)$:

$$msen(1°) = \left(cos(1°) + 89cos(1°)\right) + \left(cos(3°) - cos(3°)\right) + \left(cos(5°) - cos(5°)\right) + \left(cos(7°) - cos(7°)\right) + \ldots$$

$$msen(1°) = 90cos(1°)$$

$$m = 90cot(1°)$$

Finalmente, verificamos que el valor m cumple la identidad:

$$m = 2sen(2°) + 4sen(4°) + \ldots + 178sen(178°) + 180sen(180°) = 90cot(1°)$$

Scanned by CamScanner

Ejercicios Propuestos

5.1 Ángulos y sus medidas ● ● ● • •

1) Defina:

a) Ángulo.
b) Radián.
c) Ángulos coterminales.
d) Ángulos consecutivos.
e) Ángulos complementarios.
f) Ángulos suplementarios.
g) Ángulos adyacentes.

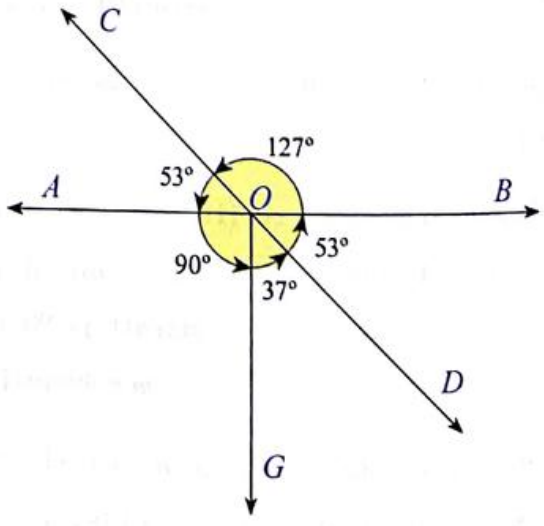
2) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas:

a) Un ángulo es la unión de dos semirrectas.
b) Un ángulo sólo puede ser designado por su vértice.
c) Dos ángulos son adyacentes si son consecutivos y son suplementarios.
d) Dos ángulos suplementarios son siempre agudos.
e) Dos ángulos opuestos por el vértice siempre son complementarios.

3) Determine un ángulo cuya medida esté entre 0° y 360° que sea coterminal con el ángulo que mide 6739°.

4) Clasifique los siguientes pares de ángulos, considerando la figura adjunta.

a) $\measuredangle BOC$ y $\measuredangle COA$
b) $\measuredangle COA$ y $\measuredangle GOD$
c) $\measuredangle GOD$ y $\measuredangle AOG$



Scanned by CamScanner

5) Las medidas de ocho ángulos son iguales y al sumarse se obtiene como resultado 180°. Calcule la medida de cada ángulo en radianes.

6) Determine la medida en grados sexagesimales del ángulo cuyo suplemento es 4 veces la medida de su complemento.

7) La medida de uno de dos ángulos suplementarios es 115°. Determine la medida del otro ángulo y la de su correspondiente ángulo complementario, en grados sexagesimales.

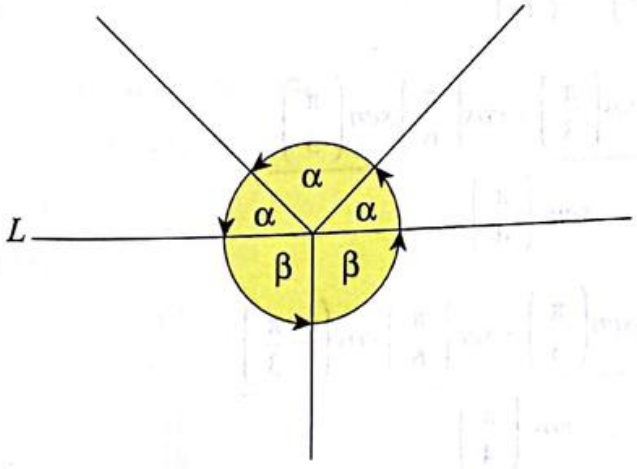
8) Convierta cada medida de ángulo dado, de grados sexagesimales a radianes:

a)	15°	f)	175°	k)	80°
b)	18°	g)	220°	l)	304°
c)	35°	h)	310°	m)	–265°
d)	65°	i)	–200°	n)	2000°
e)	100°	j)	450°	o)	–3500°

9) Convierta cada medida de ángulo dado, de radianes a grados sexagesimales:

a)	$\frac{\pi}{9}$	f)	$\frac{2\pi}{3}$	k)	$\frac{6\pi}{5}$
b)	$\frac{\pi}{10}$	g)	$\frac{\pi}{2}$	l)	$\frac{5\pi}{18}$
c)	$\frac{\pi}{5}$	h)	$\frac{\pi}{4}$	m)	$-\frac{9\pi}{5}$
d)	$\frac{\pi}{8}$	i)	$\frac{3\pi}{5}$	n)	$-\frac{6\pi}{7}$
e)	$\frac{7\pi}{8}$	j)	$\frac{4\pi}{5}$	o)	$-\frac{7\pi}{18}$

10) Dada la recta L y los ángulos cuyas medidas en grados sexagesimales son α y β, determine el valor de la razón $\frac{\alpha + 20°}{\beta - 10°}$.



Scanned by CamScanner

5.2 Funciones trigonométricas elementales

11) Defina cada una de las funciones trigonométricas a partir de la circunferencia de radio unitario.

12) Sin utilizar calculadora, determine el valor de:

a) $2\,sen(30°)\,cos(30°)$

b) $cos(300°) + sen(330°) + tan(-135°)$

c) $3\,cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) - tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

d) $cos\left(\frac{\pi}{3}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{3}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}\right)$

e) $sen\left(\frac{11\pi}{6}\right)cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

f) $\dfrac{cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$

g) $\dfrac{sec\left(\frac{\pi}{3}\right) + csc\left(\frac{\pi}{6}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{6}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

h) $\dfrac{tan\left(\frac{\pi}{6}\right) - tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 + tan\left(\frac{\pi}{3}\right)tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

i) $\dfrac{sen\left(\frac{\pi}{6}\right)cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{6}\right)sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}{sen^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

j) $\dfrac{tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{3}\right) - sec\left(\frac{\pi}{6}\right)cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Scanned by CamScanner

13) Determine los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de medida α definido por el punto P, el origen de coordenadas y el semieje X positivo.

a) $P(0, 1)$
b) $P(-2, 1)$
c) $P(6, -7)$
d) $P(-3, -2)$

14) En cada caso, determine los valores de las 5 restantes funciones trigonométricas sabiendo que:

a) $sen(\alpha) = -\frac{1}{2}$ y el ángulo de medida α pertenece al III cuadrante.

b) $cos(\alpha) = \frac{3}{4}$ y el ángulo de medida α pertenece al IV cuadrante.

c) $tan(\alpha) = 3$ y el ángulo de medida α pertenece al I cuadrante.

d) $cot(\alpha) = \frac{2}{3}$ y el ángulo de medida α pertenece al III cuadrante.

e) $sec(\alpha) = -4$ y el ángulo de medida α pertenece al II cuadrante.

f) $csc(\alpha) = 3$ y el ángulo de medida α pertenece al II cuadrante.

15) Verifique que se cumplen las siguientes relaciones trigonométricas:

a) $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$, si $\alpha = \frac{\pi}{4}$

b) $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)\, cos(\alpha)$, si $\alpha = \frac{\pi}{6}$

c) $cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2(\alpha)$, si $\alpha = \frac{\pi}{3}$

d) $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)\, cos(\beta) + cos(\alpha)\, sen(\beta)$, si $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ y $\beta = \frac{2\pi}{3}$

e) $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)\, cos(\beta) - sen(\alpha)\, sen(\beta)$, si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ y $\beta = -\frac{\pi}{3}$

16) Calcule el valor numérico en cada caso:

a) $\left|\frac{sec(\pi)}{cos(2\pi)}\right| + \left|cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right|$

b) $sgn\,(sec\,(3\pi) - sec\,(\pi))$

c) $\mu\left(cot\left(\frac{7\pi}{4}\right) - cot\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1\right)$

d) $\left[\!\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\!\right]$

Scanned by CamScanner

17) Sea la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 5x + 6$, evalúe:

a) $f\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

b) $f(cos(\pi))$

c) $f\left(2\,tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

d) $f\left(2\,cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

e) $f\left(sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

f) $f\left(2\,csc\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

18) El valor aproximado de $cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} + \cdots\right)$ es:

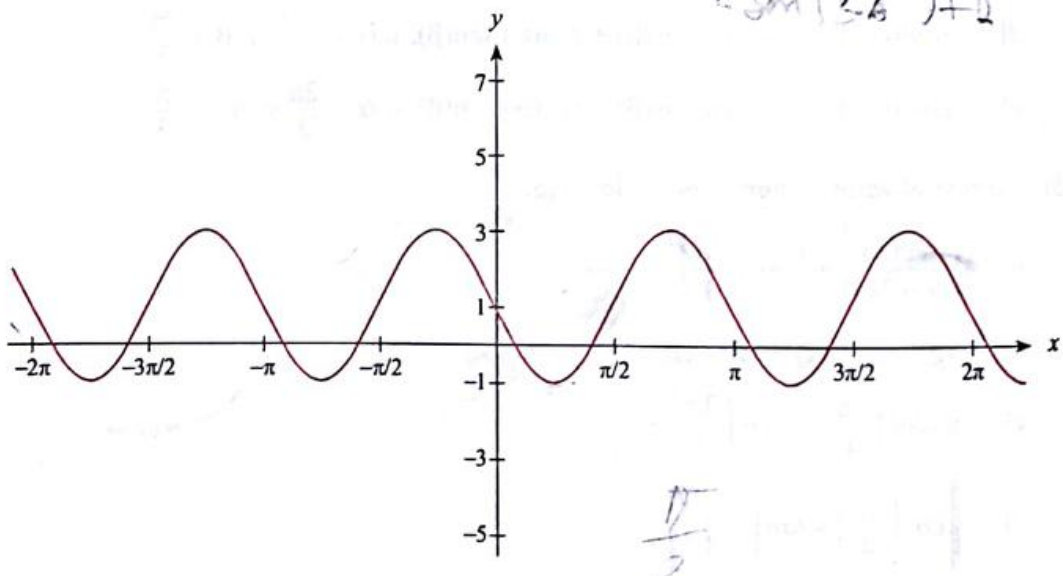
a) 0
b) 1/2
c) 2
d) 3
e) 4

19) Calcule el valor aproximado de: $\dfrac{e^{sen\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{24}+\cdots\right)}}{cos(1140°)}$.

20) Si se conoce que: $M = csc(1560°) - 2\,sen(-4620°)$ y $N = ln\left(e^{cos\left(2\pi\left(sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)}\right)$, determine el valor de: $\sqrt{15M^2 - 4N}$.

5.3 Gráficas de funciones trigonométricas

21) Dada la gráfica de la siguiente función de la forma $f(x) = A\,sen(Bx + C) + D$.



Scanned by CamScanner

Es cierto que:

a) $f(x) = 2\,sen\,(2x)$

b) $f(x) = 2\,sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

c) $f(x) = 2\,sen\,(2x + \pi) + 1$

d) $f(x) = 2\,sen\,(2x) + 1$

e) $f(x) = sen\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

22) Dada la función $f(x) = sen(x) + sen(|x|)$, entonces es VERDAD que:

a) f es par.
b) f es monótona en todo su dominio.
c) $\forall x \in (-\infty, 0)\,,\ f(x) = 0$
d) f es periódica.
e) f no es continua.

23) Respecto a la función f con regla de correspondencia $f(x) = \frac{\pi}{2}\left|\widetilde{cos}(\pi x + \pi) + 1\right|$, $\forall x \in [-3, 5]$, es FALSO que:

a) $f(x) \geq 0$ en todo su dominio.
b) Es acotada.
c) Es creciente en el intervalo $(2, 3)$.
d) Es decreciente en el intervalo $\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$.
e) Es una función continua.

24) Demuestre que:

a) Si $f(x)$ es una función periódica de período p, $\forall p \in \mathbb{R}^+$, entonces $f(x + np)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, también es una función periódica de período p.

b) Si $f(x)$ es una función periódica de período p, $\forall p \in \mathbb{R}^+$, entonces $f(ax)$, $a \neq 0$, es una función periódica de período p/a.

25) Sean las funciones de variable real f y g definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} sen(\pi x), & |x| \leq 1 \\ -2, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & (x > 0) \vee (x < -1) \\ x^2, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

De ser posible:

a) Determine la regla de correspondencia de la función $(g \circ f)$
b) Especifique el conjunto de llegada Y para que la función $(g \circ f)$ sea sobreyectiva.

26) Grafique las siguientes funciones en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, considerando las restricciones necesarias y verifique aquellas resaltadas con el apoyo de un software graficador:

a) $f(x) = \mu(sen(3x))$

b) $g(x) = 1 - 2\,sen\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

c) $h(x) = \pi\, cos(2x)$

d) $i(x) = sgn\left(cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) + 1$

e) $j(x) = -\frac{1}{2}\, sen\left(\left|3x - \frac{\pi}{2}\right|\right)$

f) $k(x) = e^{\left|cos\left(|x| - \frac{\pi}{6}\right)\right|}$

g) $l(x) = \left[\!\left[\frac{1}{4}cos(x) - 1\right]\!\right]$

h) $m(x) = 3\, tan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}$

i) $n(x) = cot(x - \pi) + 4$

j) $\tilde{n}(x) = 2\, sec\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$

k) $o(x) = sec(|x - \pi|)$

l) $p(x) = e^{\,ln(sen(|x|))}$

m) $q(x) = log_{\frac{1}{2}}\left(\left|cos(x)\right|\right)$

27) Sean $f(x) = sen\left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right|$ y $g(x) = sgn\left(cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ dos funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces es verdad que:

a) f es impar.
b) $rg\, g = [-1, 1]$
c) g es constante en el intervalo $(\pi, 2\pi)$.
d) f es inyectiva.
e) $rg\, g = \{-1, 1\}$

Scanned by CamScanner

28) (Utilizando un software graficador) El movimiento de un pistón en un motor puede ser modelado por la siguiente ecuación:

$$X(\theta) = l + a - a\cos(\theta) - \sqrt{l^2 - a^2 sen^2(\theta)}$$

Donde:

PMS: Punto muerto superior.

PMI: Punto muerto inferior.

X: Distancia medida desde el **PMS**.

l: Longitud de la biela.

a: Radio de la manivela.

θ: Medida del ángulo del cigüeñal.

s: Carrera del pistón.

Esquema del pistón

Determine:

a) Cuando $l = a = 1$, la gráfica de la función y sus características como puntos máximos, mínimos, monotonías, período de la función, ceros de la función.

b) Si los ceros encontrados son distribuidos uniformemente y qué relación tienen con el esquema proporcionado.

c) Se tiene la función $g(\theta) = a\left[\left(1 - \cos(\theta)\right) + \frac{a}{2l} sen^2(\theta)\right]$, la cual se conoce como función de aproximación de $X(\theta)$. Grafique en el mismo plano $X(\theta)$ y $g(\theta)$. Verifique si las imágenes de g se aproximan a las de X, bajo los mismos parámetros del literal a).

d) Utilizando los parámetros de la tabla adjunta, grafique en un mismo plano las funciones X y g para cada caso, luego grafique en un mismo plano las funciones de X para todos los casos, de igual forma para g, comente los resultados; y, a la vez complete la siguiente tabla.

l (cm)	a (cm)	$\frac{l}{a}$
70	$\frac{70}{3}$	
17.2	4.3	
1	$\frac{1}{3}$	

Scanned by CamScanner

29) (Utilizando un software graficador) Un saltador de cuerda elástica (bungee), se deja caer desde un elevado puente hasta el río y luego rebota una y otra vez; t segundos después de su salto, su altura H (en metros) sobre el río está dada por:

$$H(t) = 100 + 75e^{-\frac{t}{\alpha}} cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

a) Determine la altura en que se encuentra el saltador en los tiempos indicados en la tabla, considerando también los respectivos valores del coeficiente de amortiguamiento α.

t	α
2	5
6	8
8	12
10	20

b) Grafique las funciones para los distintos valores de α, tomando en consideración que $dom\ H = [0, 2\pi]$. ¿Qué pasa cuando $t \to +\infty$ o $t \to -\infty$?

30) Considere la función $h(x) = Asen(Bx) + D$. Si se conoce que esta función presenta las siguientes características:

I) El período fundamental de la función tiene un valor que es igual a la cardinalidad del conjunto de verdad del predicado $p(x)$: $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$, considerando el conjunto referencial $\mathrm{Re} = \mathbb{R}$.

II) El máximo valor de la función h es igual al mínimo valor alcanzado por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$.

III) Uno de los ceros de la función f es igual al intercepto con el eje X de la asíntota oblicua de la función $i(x) = \dfrac{x^5 - x^4 + x}{x^4 + 1}$.

IV) El valor mínimo de la función $m(x) = -e^{-|x|} + \dfrac{1}{2}$ es una raíz de f.

V) f interseca a $g(x) = \dfrac{56}{9} log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)$ cuando $x = 3$.

VI) Si el rango de la función h es el intervalo $[y_1, y_2]$, entonces $y_1 + y_2 = -6$.

Determine:

a) Las reglas de correspondencia de f y h.
b) El rango de las funciones f y h.

Finalmente, grafique f y h en un mismo plano.

Scanned by CamScanner

5 | Trigonometría

5.4 Funciones trigonométricas inversas ● ● ● ● ●

31) Defina las siguientes funciones con su dominio y rango, indicando además sus características principales como asíntotas, raíces y monotonía:

a) $f(x) = sen^{-1}(x)$
b) $g(x) = cos^{-1}(x)$
c) $h(x) = tan^{-1}(x)$
d) $i(x) = cot^{-1}(x)$
e) $j(x) = sec^{-1}(x)$
f) $k(x) = csc^{-1}(x)$

32) Sea $f(x) = arcsen(4x - 3)$ una función de variable real en la que $rg\ f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ entonces $dom\ f$ es igual a:

a) $[-1,1]$

b) $\left[\frac{1}{2},1\right]$

c) $\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$

d) $\left(\frac{1}{2},1\right)$

e) $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

33) Dada la función $f: \mathbb{R} \mapsto \left(1-\frac{\pi}{2},1\right]$ definida por $f(x) = \left|1 - arctan(|x|)\right|$.

Identifique la proposición falsa:

a) f es acotada.
b) f es par.
c) f es creciente en el intervalo $[4, +\infty)$.
d) f es inyectiva.
e) f tiene dos intersecciones con el eje X.

34) Al considerar los ángulos en el primer cuadrante, determine el valor numérico de la expresión trigonométrica $sen\left[arcsen\left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right) + arctan\left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)\right]$.

Scanned by CamScanner

35) Dada la función $f: [-2, 2] \mapsto [0, \pi]$ definida por $f(x) = arccos\left(\frac{x}{2}\right)$. Identifique la proposición VERDADERA:

a) $f^{-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

b) $f^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

c) $f^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

d) $f^{-1}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

e) $f^{-1}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

36) Se conoce que:

$$a = arcsen\,(1)\,,\ a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$b = arccot\,(1)\,,\ b \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

¿Cuál es el valor de $cos(a - b)$?

37) Si $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ y $\theta = arccos(3x)$, determine los valores de:

a) $sen\,(\theta)$
b) $tan\,(\theta)$
c) $cot\,(\theta)$
d) $sec\,(\theta)$
e) $csc\,(\theta)$

38) Sea θ la medida de un ángulo del primer cuadrante, tal que $\theta = arctan(x)$. Obtenga una expresión en términos de x para $t = cos^2(\theta) - sen^2(\theta)$:

a) $1 + x^2$

b) $1 - x^2$

c) $\frac{1 + x^2}{1 - x^2}$

d) $\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

e) $\sqrt{1 + x^2}$

Scanned by CamScanner

39) Sea la función f: X $\mapsto$ Y definida por $f(x) = 2\ arccos\left(\frac{x}{2}+1\right)$:

a) Especifique los conjuntos X, Y para que f sea biyectiva.
b) Bosqueje la gráfica de la función f.
c) De ser posible, determine la regla de correspondencia de la función inversa f^{-1} y grafíquela en el mismo plano cartesiano junto con la función f.

40) Sea la función f^{-1}: X $\mapsto \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cuya regla de correspondencia es:

$$f^{-1}(x) = arcsen(3x+5)$$

a) Especifique el conjunto X.
b) De ser posible, determine una regla de correspondencia para la función f.
c) De ser posible, bosqueje la gráfica de f y f^{-1} en un mismo plano cartesiano.

41) Sea la función de variable real f cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = \begin{cases} -e\cos(\pi), & x < -2 \\ arctan\left(\frac{x}{2}\right), & |x| \leq 2 \\ -\pi\cos(0), & x > 2 \end{cases}$$

Bosqueje la gráfica de la función $g(x) = [\![f(x)]\!]$ y especifique el conjunto $rg\ g$.

5.5 Identidades trigonométricas

42) Considerando las restricciones del caso, identifique si las siguientes expresiones son identidades trigonométricas o no:

a) $sen^2(3x) + cos^2(3x) = 3$

b) $sen^2(2x) - cos^2(2x) = 1$

c) $cos^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$

d) $sen(x+y) = sen(x) + sen(y)$

e) $sen(x+y)sen(x-y) = cos^2(y) - cos^2(x)$

f) $\frac{1}{2}[sen(x-y) + sen(x+y)] = cos(x)sen(y)$

Scanned by CamScanner

g) $tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{sen(x)}{1+cos(x)}$

h) $cos(2x)=sen^2(x)-cos^2(x)$

i) $sen\left(\frac{2x}{3}\right)=2sen\left(\frac{x}{3}\right)cos\left(\frac{x}{3}\right)$

j) $sen^2(x)=1-cos^2(x)$

k) $cos(2x)=1-2sen^2(x)$

l) $cos(x)=cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$

m) $\left[sec^2(x)-1\right]\left[cos(2x)+sen^2(x)\right]=1-cos^2(x)$

n) $sec(x)-tan(x)=\frac{cos(x)}{1+sen(x)}$

o) $arcsen(x+y)=arcsen(x)+arcsen(y)$

43) Considerando las restricciones del caso, demuestre las siguientes identidades trigonométricas:

a) $cos(2\alpha)=\frac{csc^2(\alpha)-2}{csc^2(\alpha)}$

b) $cos^2\left(\frac{x}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(1+cos\left(\frac{2x}{5}\right)\right)$

c) $\frac{sen(x)cos(x)}{cos(2x)}-\frac{tan(x)}{1-tan^2(x)}=0$

d) $\frac{cot(x)}{\left[sen(x)+cos(x)\right]^2-1}=\frac{1}{2}csc^2(x)$

e) $\frac{sen(\alpha)+sen(2\alpha)}{1+cos(\alpha)+cos(2\alpha)}=tan(\alpha)$

f) $\frac{cos(2\alpha)}{1-sen(2\alpha)}=\frac{1+tan(\alpha)}{1-tan(\alpha)}$

g) $\frac{cos(\alpha+\beta)}{cos(\alpha-\beta)}=\frac{1-tan(\alpha)tan(\beta)}{1+tan(\alpha)tan(\beta)}$

h) $\frac{1+cos(2x)}{sen(2x)-cos(x)}=\frac{2cos(x)}{2sen(x)-1}$

i) $\frac{1-sen(\theta)}{sec(\theta)}=\frac{cos^3(\theta)}{1+sen(\theta)}$

Scanned by CamScanner

j) $\dfrac{tan^2(x)}{sec(x)+1}=\dfrac{1-cos(x)}{cos(x)}$

k) $\dfrac{3cos^2(z)+5sen(z)-5}{cos^2(z)}=\dfrac{3sen(z)-2}{1+sen(z)}$

l) $\dfrac{2tan(x)}{1-tan^2(x)}+\dfrac{1}{2cos^2(x)-1}=\dfrac{cos(x)+sen(x)}{cos(x)-sen(x)}$

m) $\dfrac{cos^2(\theta)}{cot\left(\dfrac{\theta}{2}\right)-tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}=\dfrac{1}{4}sen(2\theta)$

n) $\dfrac{tan^2(2\theta)-tan^2(\theta)}{1-tan^2(2\theta)\,tan^2(\theta)}=tan(3\theta)\,tan(\theta)$

o) $cos^2(\beta)-sen^2(\alpha)=cos(\alpha-\beta)cos(\alpha+\beta)$

p) $sen^4(x)+4cos^2(x)=\left(1+cos^2(x)\right)^2$

q) $\left(\sqrt{sen^4(x)+4cos^2(x)}-cos(2x)\right)^2=cos^4(x)+4sen^2(x)$

(44) Con la aplicación de identidades trigonométricas y considerando las restricciones del caso, simplifique cada expresión:

a) $\dfrac{2-tan(\alpha)}{2csc(\alpha)-sec(\alpha)}$

b) $tan^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$

c) $1-\dfrac{cos^2(x)-sen^2(x)}{sec(2x)}$

d) $\left[\dfrac{\left(sen(x)+cos(x)\right)^2-1}{sen(x)}\right]sec(x)$

e) $\dfrac{\dfrac{1}{cos(x)}+tan(x)}{\dfrac{1}{1-sen(x)}}$

f) $\dfrac{sen^4(x)-cos^4(x)}{sen(x)-cos(x)}-cos(x)$

Scanned by CamScanner

g) $\dfrac{-2\cot(2x)}{\cos^3(x)\csc(x)-\operatorname{sen}^3(x)\sec(x)}$

h) $\dfrac{\operatorname{sen}(3x)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(6x)}{\cos(3x)\tan(3x)}$

i) $\dfrac{\tan(2x)(1-\operatorname{sen}(x))}{\frac{1+\sec(2x)}{1+\operatorname{sen}(x)}}-\operatorname{sen}(7x)\cos(5x)+\dfrac{1}{2\csc(12x)}$

45) Considerando las restricciones del caso, identifique en cada literal la expresión por la cual debe ser reemplazada Δ para que la igualdad sea en una identidad trigonométrica:

a) $\dfrac{\Delta}{1-\operatorname{sen}^2(x)}=\sec(x)$

b) $\Delta\csc(x)=\operatorname{sen}(2x)$

c) $\operatorname{sen}(2x)=\dfrac{\Delta\operatorname{sen}(x)}{\sec(x)}$

d) $\cos(2x)=\Delta-\dfrac{1}{\csc^2(x)}+\dfrac{1}{\sec^2(x)}$

e) $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2(x)-\Delta$

f) $\dfrac{\tan(x)-\operatorname{sen}(x)}{\csc(x)\operatorname{sen}^4(x)}=\dfrac{\Delta}{1+\cos(x)}$

g) $\csc^2\left(\dfrac{3x}{2}\right)=\dfrac{\Delta(1-\cos(3x))}{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

h) $\cos(x)\left(\dfrac{\tan(x)+1}{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}\right)=\Delta$

i) $\dfrac{1+\cos(x)}{\csc(x)}=\dfrac{\operatorname{sen}(x)+\tan(x)}{2\Delta\sec(x)}$

j) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)-\cos(x)}{1-\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}^2(x)-\cos^2(x)}=\Delta$

k) $\sec(x)-\dfrac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}=\Delta$

l) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(x)\sec(x)}-\Delta\cos(x)=\dfrac{1}{\sec(x)}$

Scanned by CamScanner

m) $\dfrac{tan(x)-sen(x)}{cos(x)-sec(x)+\Delta}=cot(x)$

n) $\dfrac{sen(\alpha)+sen(3\alpha)+sen(5\alpha)+\cdots+sen\left((2n-1)\alpha\right)}{cos(\alpha)+cos(3\alpha)+cos(5\alpha)+\cdots+cos\left((2n-1)\alpha\right)}=\Delta\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$

46) Sin usar calculadora, determine el valor de:

a) $sen(-225°)$
b) $cos(225°)$
c) $tan(15°)$
d) $cot(285°)$
e) $sec(-75°)$
f) $csc(345°)$

47) Al considerar los ángulos en el primer cuadrante, calcule el valor numérico de cada expresión trigonométrica:

a) $sen\left[arccos\left(\frac{1}{2}\right)+arccos\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

b) $cos\left[arcsen\left(\frac{1}{3}\right)+arcsen\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

c) $tan\left[arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)-arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

d) $cot\left[2\,arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

48) Demuestre que:

a) $tan(55°)-tan(35°)=2\,tan(20°)$
b) $\forall m,n\in\mathbb{R}\ [\ (\ cos(m+n)=0\ )\Rightarrow(\ sen(m+2n)=sen(m)\ )]$

49) Simplifique las siguientes expresiones:

a) $8\,cos(10°)\,cos(20°)\,cos(40°)$

b) $cos\left(\frac{\pi}{65}\right)cos\left(\frac{2\pi}{65}\right)cos\left(\frac{4\pi}{65}\right)cos\left(\frac{8\pi}{65}\right)cos\left(\frac{16\pi}{65}\right)cos\left(\frac{32\pi}{65}\right)$

Scanned by CamScanner

50) Si $u = tan\left(\frac{z}{2}\right)$, demuestre que:

a) $sen(z) = \frac{2u}{1+u^2}$

b) $cos(z) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

51) Considerando que en el I cuadrante $tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$, escriba las siguientes expresiones en términos de t:

a) $\frac{sen(x)+cos(x)}{tan(x)-cos(x)}$

b) $\frac{cot(x)+cos(x)}{tan(x)-sen(x)}$

52) Se tiene la siguiente función de variable real h en la cual x_1, x_2, x_3 son constantes, siendo $x_1 > x_2$:

$$h(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)sen(2x) + x_3(cos^2(x) - sen^2(x))$$

Demuestre que:

a) Si $x_3 = 0$, el valor máximo de h ocurre cuando $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

b) El conjunto de raíces de h está dado por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / tan(2x) = \frac{2x_3}{x_2 - x_1} \right\}$$

5.6 Ecuaciones e inecuaciones trigonométricas

53) Para cada referencial, determine el conjunto de verdad del predicado especificado y verifique su respuesta con un software graficador:

a) $\text{Re} = [0, \pi]$, $p(x)$: $1 = sen^2(x)$

b) $\text{Re} = [0, \pi]$, $p(x)$: $4cos(3x) = 2$

c) $\text{Re} = (0, 2\pi)$, $p(x)$: $sen(x) = cos(x)$

d) $\text{Re} = [0, \pi]$, $p(x)$: $2\,cos^2(x) - sen(2x) = 0$

e) $\text{Re} = [0, 4\pi]$, $p(x)$: $cos^2(x) + sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$

f) $\text{Re} = [0, \pi]$, $p(x)$: $tan(2x) - 2sen(x) = 0$

g) $\text{Re} = [0, \pi]$, $p(x)$: $4sen(x)\,cos(x) = \sqrt{2}$

h) $\text{Re} = [\pi, 2\pi]$, $p(x)$: $sen(2x) = 1 + cos(2x)$

Scanned by CamScanner

i) $\text{Re} = [0, 4\pi)$, $p(x)$: $1 - \sqrt{2}\cos(x) = 0$

j) $\text{Re} = [0, 2\pi]$, $p(x)$: $2\cos^2(x) = 1 - sen(x)$

k) $\text{Re} = [-\pi, \pi]$, $p(x)$: $2sen(2x) - 2sen(x) + 2\cos(x) - 1 = 0$

l) $\text{Re} = [0, 2\pi]$, $p(x)$: $2sen^2(x) = 1 - \cos(x)$

m) $\text{Re} = [0, 2\pi]$, $p(x)$: $sen(2x)\cos(x) = 6sen^3(x)$

n) $\text{Re} = [0, 1]$, $p(\beta)$: $3 - 3sen(2\pi\beta) = 2\cos^2(2\pi\beta)$

54) Para cada referencial, determine el conjunto de verdad del predicado especificado y verifique su respuesta con la ayuda de un software graficador:

a) $\text{Re} = [0, 2\pi]$, $p(x)$: $sen(x) > \frac{1}{2}$

b) $\text{Re} = [0, 2\pi]$, $p(x)$: $\cos(x) > \frac{1}{2}$

c) $\text{Re} = [0, 2\pi]$, $p(x)$: $\cos^2(x) - sen^2(x) < -\frac{1}{2}$

d) $\text{Re} = [0, 1]$, $p(\theta)$: $|sen(\pi\theta)\cos(\pi\theta)| \leq \frac{1}{4}$

e) $\text{Re} = [0, \pi]$, $p(x)$: $sen(2x) - sen^2(x) > \cos(2x) - \cos^2(x)$

f) $\text{Re} = [0, 2\pi]$, $p(x)$: $2\cos\left(\frac{2x}{3}\right) < 1$

g) $\text{Re} = [-\pi, \pi]$, $p(\theta)$: $\mu(sen(2\theta) - 1) < 0$

h) $\text{Re} = [0, 2\pi]$, $p(\alpha)$: $sgn(sen(|2\alpha|)) = 0$

i) $\text{Re} = [-\pi, \pi]$, $p(x)$: $sgn\left(sen\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geq 1$

j) $\text{Re} = [0, 2\pi]$, $p(x)$: $\mu\left(\sqrt{3} - 2\cos(x)\right) = 0$

55) Considere el conjunto referencial $\text{Re} = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ y los predicados $p(x)$: $sen(2x) > 0$, $q(x)$: $\cos(x) < 0$. Determine el conjunto de verdad: $A(p(x) \rightarrow q(x))$.

56) Sea el conjunto referencial $\text{Re} = [0, 2\pi]$ y los predicados $p(x)$: $\left[\!\left[1 - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\!\right] = 1$, $q(x)$: $sgn(sen(2x)) = 0$. Determine el conjunto de verdad: $A(p(x) \rightarrow q(x))$.

Scanned by CamScanner

57) Considere las funciones de variable real $f: X_1 \mapsto \mathbb{R}$ y $g: X_2 \mapsto \mathbb{R}$, cuyas reglas de correspondencia son:

$$f(x)=ln\left(sen\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{4}\right) \text{ y } g(x)=\frac{1}{\sqrt{cos^4(x)-cos^2(x)+sen^2(x)}}$$

Si Re = $[0, 2\pi]$, determine el conjunto de verdad de cada uno de los siguientes predicados:

a) $p(x)$: $f(x)$ es un número real.

b) $q(x)$: $g(x)$ es un número real.

58) Cuando una persona está en reposo, la presión arterial medida en milímetros de mercurio, en cualquier segundo, puede ser aproximada por la siguiente regla de correspondencia:

$$P(t)=-20cos\left(\frac{5\pi}{3}t\right)+100, \quad \forall t \geq 0$$

a) Determine la amplitud y el período fundamental de la función P.

b) Especifique la máxima lectura de la presión arterial que puede ser registrada para una persona.

c) Utilice un software graficador de funciones y bosqueje la gráfica con dos períodos fundamentales para P.

d) Determine los valores de t, en el primer período, para los cuales la función alcanza el valor de 100 *mm Hg*.

59) Sea Re = $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y el siguiente predicado:

$$p(x): \left[cos(x)\right]^{n+2} \leq \left[cos(x)\right]^{n+1} \leq \left[cos(x)\right]^{n}$$

a) Demuestre analíticamente que $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subseteq Ap(x)$.

b) Con un software graficador, construya las gráficas de las tres funciones involucradas, cuando n es 1, 2, 5 y 20.

c) Tomando en cuenta las gráficas construidas en el literal anterior, verifique que $Ap(x)$ es el conjunto de todos los intervalos de la forma:

$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$$

60) Demuestre que:

$$a\,sen^2(x)+\frac{b}{sen^2(x)} \geq 2\sqrt{ab}, \quad \text{si } a>0, b>0, \forall x \in \mathbb{R}-\{(n\pi), n \in \mathbb{Z}\}$$

Scanned by CamScanner

El proceso recursivo

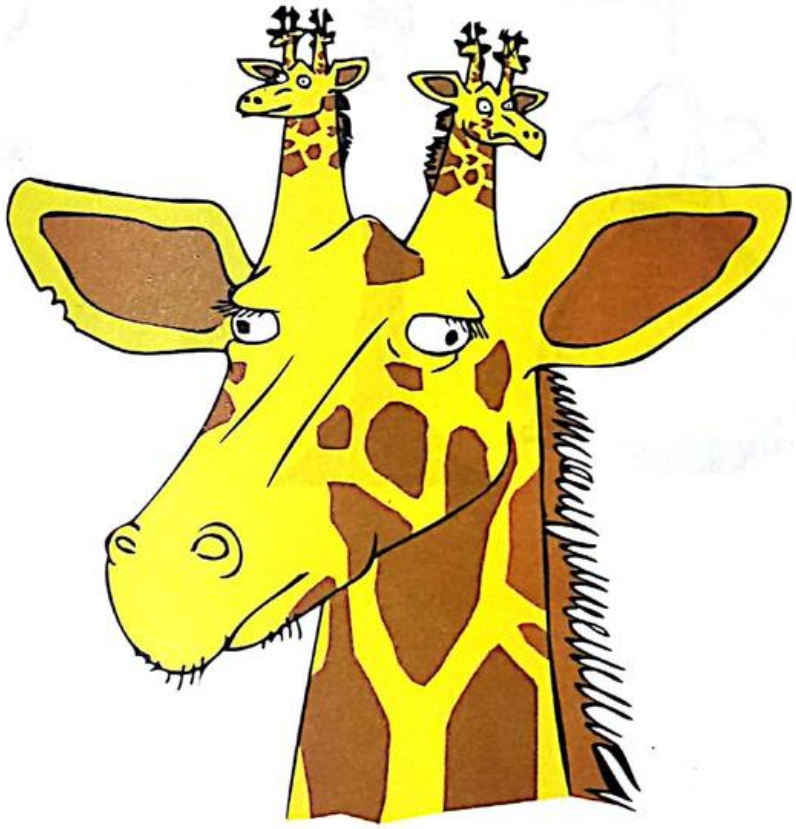
Dada la expresión:

$$x_{n+1}=\frac{1+x_n}{1-x_n},\forall n\in \mathbf{N}_0$$

Si $x_0=2017$, determine el valor de x_{2017}.

Sugerencia.-

Considere $x_n=tan(\alpha_n),\ \alpha_n\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$



¿Se imagina usted cómo luciría esta simpática jirafa con una morfología recursiva en sus ossicones (pequeños cuernos)?

Scanned by CamScanner

La balanza de expresiones

$\forall a, b, x \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ y $0 < x < \frac{\pi}{2}$, demuestre que:

$$\left(1+\frac{a}{sen(x)}\right)\left(1+\frac{b}{cos(x)}\right) \geq \left(1+\sqrt{2ab}\right)^2$$

Scanned by CamScanner

6 | Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones

Desafío

Los gráficos por computadoras

Cuando se utilizan aplicaciones informáticas que permiten elaborar figuras, una de las acciones que regularmente se realizan es la rotación de tales figuras. Esto se lo puede lograr con un adecuado uso de las matrices y sus operaciones.

Supongamos que:

a) Usted tiene un punto en el plano $P(x, y)$ expresado como una matriz Q de orden 2×1. Determine una matriz T de orden 2×2, que al ser multiplicada por Q, permita rotar en sentido antihorario el punto P una medida angular β. Dicha matriz T es conocida como matriz de rotación.

b) Usted tiene una matriz de puntos A (matriz de orden 2×4, donde 4 es el número de puntos, la primera fila contiene las abscisas de cada punto y la segunda fila contiene las ordenadas de cada punto). Obtenga la figura original y la figura rotada con la medida angular especificada en el plano cartesiano.

$$Q=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\beta=\frac{\pi}{4}$$

Si no puede resolver este desafío, busque la solución en la página correspondiente del presente capítulo.

pág. 673

Scanned by CamScanner

Introducción

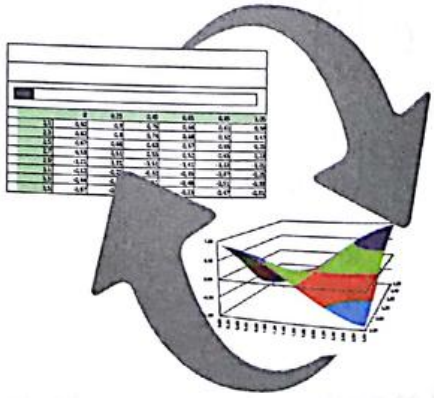
Es posible que para divertirnos, hayamos tratado de resolver cuadrados mágicos o hayamos jugado Sudoku, los cuales apelan mucho a la creatividad mental del ser humano. Así como también es posible que hayamos utilizado una hoja electrónica para realizar cálculos o haber manejado una aplicación informática con acceso a una base de datos. Éstos son apenas unos pocos ejemplos en los cuales están presentes las matrices.

La definición de matriz aparece por primera vez en el año 1 848, introducida por J. J. Sylvester. Sin embargo, desde hace más de dos mil años los matemáticos chinos habían descubierto ya un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y, por lo tanto, empleaban tablas con números.

En 1 858, Arthur Cayley introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, la misma que fue descrita en su publicación *"Memorias sobre la teoría de matrices"*. En esta publicación, Cayley daba la definición de: matriz, suma entre matrices, multiplicación de un número real por una matriz, multiplicación entre matrices e inversa de una matriz. Él afirmaba que obtuvo la noción de matriz a través de la idea del determinante, considerándola como una forma conveniente para expresar transformaciones geométricas.

Posteriormente, en el año 1 878 Frobenius presentó aportaciones importantes que han contribuido al desarrollo del Álgebra Matricial; y, Heisenberg, en el año 1 925 utilizó esta teoría para desarrollar la mecánica cuántica.

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que surgen de problemas reales de producción en las industrias; en la resolución de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales para la explicación de fenómenos físicos, pero estos conceptos se analizarán en cursos superiores de cálculo. Además de su utilidad para el estudio de sistemas de ecuaciones, las matrices aparecen de forma natural en los cursos de informática, geometría, estadística, economía, física o logística. Tenemos entonces la gran oportunidad, en este capítulo, de comprender un tema interesante que sin duda será de mucha utilidad.



Scanned by CamScanner

6 | Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones

6.1 Definición y Clases

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una matriz, identificar su dimensión y los elementos que la conforman, aplicando la notación apropiada.
- Representar, en arreglos matriciales, datos relacionados con problemas de la vida cotidiana.
- Dadas dos matrices, establecer las condiciones para su igualdad.
- Dada una matriz, reconocer si es: fila, columna, rectangular, cuadrada, triangular superior, triangular inferior, nula, diagonal, escalar, identidad, escalonada por filas, escalonada reducida por filas.
- Identificar la diagonal principal y secundaria de una matriz cuadrada.
- Calcular la traza de una matriz cuadrada.

Definición 6.1 (Matriz)

Una matriz real A es un arreglo rectangular de números reales, en donde cada elemento a_{ij} que pertenece a la matriz A tiene dos subíndices. El subíndice i representa la *fila* (disposición horizontal), y el subíndice j representa la *columna* (disposición vertical), en las cuales se encuentra el elemento.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir, por ejemplo, que el elemento a_{21} pertenece a la segunda fila, primera columna.

Si la matriz A tiene m filas y n columnas, se dice que es de **dimensión** o **orden** $m \times n$ y se denota como: $A_{m\times n}$. Se usará $\forall i\ \forall j$ para denotar $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$; siendo i, j, m, n números naturales.

Las matrices se denotan con letras mayúsculas: $A, B, C...$ y los elementos de las mismas con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar que ocupan: a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ...

Se puede utilizar el paréntesis curvo o recto para colocar en su parte interior cada uno de sus elementos.

Scanned by CamScanner

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para fines prácticos, se suele utilizar la notación $A = (a_{ij})$ en la representación de una matriz A.

Ejemplo 6.1 Identificación de filas y columnas.

En la matriz $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

La fila 1 es (1 2).

La fila 2 es (3 4).

La fila 3 es (5 6).

La columna 1 es $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y la columna 2 es $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

El tema de matrices está presente en la vida cotidiana, ya que se pueden representar diversas situaciones con el uso de una matriz, una de las cuales se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.2 Arreglo de datos en una matriz.

En el área de producción de una empresa, la hora de ingreso de los empleados, en días laborables, durante una semana de trabajo, se registra automáticamente en un sistema de control de asistencia, tal como se presenta en la siguiente tabla:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Jefe	08:00	08:15	08:05	08:10	08:02
Asistente	07:50	08:00	07:55	08:12	08:00
Técnico Principal	07:55	07:58	07:50	08:00	07:48
Técnico Auxiliar	08:07	08:12	08:05	08:00	08:01
Secretaria	07:52	08:00	08:05	08:10	08:03
Conserje	07:45	07:48	07:53	07:58	07:50
Mensajero	08:05	08:10	08:15	08:06	08:12

Scanned by CamScanner

Al momento de evaluar la puntualidad semanal de los empleados, se obtiene un reporte del sistema que organiza los datos de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 08:00 & 08:15 & 08:05 & 08:10 & 08:02 \\ 07:50 & 08:00 & 07:55 & 08:12 & 08:00 \\ 07:55 & 07:58 & 07:50 & 08:00 & 07:48 \\ 08:07 & 08:12 & 08:05 & 08:00 & 08:01 \\ 07:52 & 08:00 & 08:05 & 08:10 & 08:03 \\ 07:45 & 07:48 & 07:53 & 07:58 & 07:50 \\ 08:05 & 08:10 & 08:15 & 08:06 & 08:12 \end{bmatrix}$$

La matriz construida consta de siete filas (empleados) y cinco columnas (días laborables) y a partir de la misma se puede evidenciar fácilmente que el Jefe y el Mensajero son quienes en la semana de análisis han ingresado más tarde los días martes y miércoles, respectivamente.

Así mismo, con una simple inspección visual, se puede concluir que quien registró su entrada más temprano en la semana fue el Conserje, la misma que según el sistema, fue el día lunes a las siete horas con cuarenta y cinco minutos.

Ejemplo 6.3 Construcción de una matriz.

Construya una matriz $A_{3x3} = \left(a_{ij}\right)$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - ij + j^2; & i \neq j \\ -1 \quad ; & i = j \end{cases}$.

Solución:

Dado que se trata de una matriz de tres filas y tres columnas, serán necesarios nueve elementos para su construcción.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Considerando las condiciones dadas para la matriz requerida, sus elementos serían:

- Cuando $i=j$:

$$a_{ii}=-1 \qquad a_{11}=a_{22}=a_{33}=-1$$

- Cuando $i\neq j$:

$$a_{ij}=i^2-ij+j^2$$

$$a_{12}=1-2+4=3$$
$$a_{13}=1-3+9=7$$
$$a_{21}=4-2+1=3$$
$$a_{23}=4-6+9=7$$
$$a_{31}=9-3+1=7$$
$$a_{32}=9-6+4=7$$

Luego, la matriz A quedaría conformada como:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 7\\ 3 & -1 & 7\\ 7 & 7 & -1\end{pmatrix}$$

Definición 6.2 (Igualdad entre matrices)

Dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{p\times q}$ son iguales, si y sólo si:

- $(m=p)\wedge(n=q)$, es decir, son del mismo orden, y
- $\forall i\,\forall j\,(a_{ij}=b_{ij})$, es decir, cada uno de los elementos correspondientes de las matrices son iguales.

Ejemplo 6.4 Igualdad entre matrices.

Determine los valores de x e y para que el siguiente par de matrices sean iguales:

$$A=\begin{pmatrix}x+sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 1\\ ln\left(e^2\right) & [\![e-\pi]\!]\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}3 & \mu(0.5)\\ 2 & 1-y\end{pmatrix}$$

Solución:

Se puede observar que ambas matrices tienen el mismo orden y debe cumplirse la igualdad de valores entre cada par de elementos en la misma posición.

Scanned by CamScanner

$a_{11} = b_{11}$ $\quad a_{12} = b_{12}$ $\quad a_{21} = b_{21}$ $\quad a_{22} = b_{22}$

$x + sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3$ $\quad 1 = \mu(0.5)$ $\quad ln(e^2) = 2$ $\quad [\![e - \pi]\!] = 1 - y$

$x - 1 = 3$ $\quad 1 = 1$ $\quad 2 = 2$ $\quad -1 = 1 - y$

$x = 4$ $\quad y = 2$

$\therefore x = 4$ e $y = 2$

6.1.1 Clases de matrices

Para poder trabajar con matrices y sus diferentes problemas de aplicación, es conveniente clasificarlas de acuerdo a ciertas características distintivas que poseen, las cuales serán descritas a continuación:

Matriz fila

Es una matriz que tiene una sola fila, es decir, su orden es $1 \times n$. Por ejemplo:

$$A_{1\times4} = (-2 \quad 5 \quad 7 \quad 1)$$

$$B_{1\times6} = (0 \quad 1.2 \quad 9 \quad -3 \quad 4 \quad 10)$$

Matriz columna

Es una matriz que tiene una sola columna, es decir, su orden es $m \times 1$. Por ejemplo:

$$A_{3\times1} = \begin{pmatrix} \pi \\ e \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$B_{4\times1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Matriz nula

Es una matriz en la que todos sus elementos son iguales a cero. También se denomina matriz cero y se denota por $0_{m\times n}$. Observe que existe una matriz cero por cada dimensión $m\times n$. Por ejemplo:

$$0_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad 0_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad 0_{4\times 3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada

Es una matriz que tiene igual número de filas que de columnas, es decir, $m = n$. Por ejemplo:

$$A_{4\times 4}=\begin{pmatrix}1&log_2(3)&3&\sqrt{7}\\5&2&sen\left(\frac{\pi}{5}\right)&10\\-20&e^2&3&0\\-\frac{3}{4}&0.\overline{3}&-11&4\end{pmatrix}$$

En las matrices cuadradas tenemos los siguientes conceptos:

Diagonal principal: La constituyen los elementos a_{ij} que cumplen con la condición $i = j$, es decir, a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn}. Para la matriz del ejemplo dado, los elementos 1, 2, 3 y 4 constituyen la diagonal principal.

Traza: Es la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por $tr(A)$.

$$tr\,(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}+\cdots+a_{nn}$$

Con el propósito de abreviar este tipo de sumas con muchos términos, es usual en matemáticas el empleo de la sumatoria o notación sigma (Σ), la cual permite por ejemplo, expresar la traza de una matriz como:

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

Esto último se lee como: "sumatoria de elementos de la forma a_{ii} de la matriz, donde i toma valores desde 1 hasta n".

Para la matriz del ejemplo dado, $tr\,(A) = 10$.

Diagonal secundaria: La constituyen los elementos a_{ij} de la matriz que cumplen con la condición $i + j = n + 1$. Para la matriz del ejemplo dado, los elementos $\sqrt{7}$, $sen\left(\frac{\pi}{5}\right)$, e^2, $-\frac{3}{4}$ constituyen la diagonal secundaria.

Scanned by CamScanner

Matriz triangular superior

Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos bajo la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i > j$. Por ejemplo:

$$A_{4\times4} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Es una matriz cuadrada que tiene todos los elementos sobre la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i < j$. Por ejemplo:

$$A_{4\times4} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 6 & -7 & 0 \\ 8 & -3 & 20 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos sobre y bajo la diagonal principal iguales a cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Por ejemplo:

$$A_{4\times4} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos sobre y bajo la diagonal principal iguales a cero, y los elementos de la diagonal principal iguales entre sí. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $a_{ii} = k$ con $k \in \mathbb{R}$. La matriz escalar es un caso particular de matriz diagonal. Por ejemplo:

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Con base en lo anterior, el conjunto de las matrices escalares está contenido en el conjunto de las matrices diagonales.

Scanned by CamScanner

Matriz identidad

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos iguales a cero, excepto los de la diagonal principal que son iguales a 1 y se denota por $I_{n\times n}$. Es importante destacar que existe una matriz identidad por cada tamaño $n\times n$ y este tipo de matriz es un caso particular de matriz escalar. Por ejemplo:

$$I_{2\times 2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad I_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad I_{4\times 4}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Siendo así, el conjunto de las matrices identidad está contenido en el conjunto de las matrices escalares.

Matriz escalonada reducida por filas

Es una matriz que satisface las siguientes condiciones:

1) Todas las filas que tienen ceros, en caso de existir, se localizan en la parte inferior.
2) El primer elemento, distinto de cero por filas (desde la izquierda), es 1.
3) Si dos filas consecutivas no constan exclusivamente de ceros, entonces el primer 1 de la fila inferior está a la derecha del primer 1 de la fila superior.
4) Cualquier columna que contiene el primer 1 de una fila tendrá ceros en las restantes posiciones.

Observe los siguientes ejemplos:

$$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad B_{4\times 5}=\begin{bmatrix}1&0&0&3&8\\0&1&0&4&-2\\0&0&1&-7&5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad C_{3\times 4}=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Si la matriz sólo cumple las tres primeras condiciones, se conoce como **escalonada por filas**, tal como se muestra en los siguientes ejemplos:

$$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1&4&-9\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad B_{4\times 3}=\begin{bmatrix}1&-5&6\\0&1&\sqrt{3}\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

6 | Matrices y Sistemas de Ecuaciones e Inecuaciones

6.1 Definición y Clases

Autoevaluación

1) Coloque en cada casilla, un ✓ si se trata de una matriz o una **X** si no lo es.

a) [X] $(1, 0, 3)$ b) [✓] $(1\ 0\ 3)$ c) [✓] $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) [X] $\begin{pmatrix} 4.12 \\ 1.13 \end{pmatrix}$ e) [X] $\frac{6}{5}$

2) Especifique en los recuadros el orden de cada matriz mostrada a continuación:

a) [3x7] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) [5x3] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) [5x1] $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) [4x4] $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ -7 & -3 & 3 & 7 \\ -4 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

3) Sea la matriz $A_{4\times4}=(a_{ij})$, tal que $a_{ij}=\mu(|i-j|)$. Obtenga una regla de correspondencia para a_{ij} y escriba la matriz A.

4) Considere la matriz T de orden 5×5:

$$T=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

a) ¿La matriz es escalonada por filas o triangular?

La Matriz es triangular superior, no es escalonada, en filas x q no cumple sus condiciones

b) ¿Cuáles son los elementos de su diagonal principal?

{3, -6, 10, 1, 2}

c) ¿Cuáles son los elementos de su diagonal secundaria?

{5, 1, 10, 0, 0}

d) ¿Cuál es el valor de x, si $x = tr(T) + t_{21} + t_{45}$?

$Tr(T) = 10$ Si $X = 10 + 0 + 0$

$X = 10$

5) Construya una matriz M que cumpla las siguientes condiciones:

- $M = (m_{ij})$ es diagonal.
- M es de orden 3x3 o de orden 2x2.
- $tr(M) = 0$
- $m_{22} \geq 0$
- $m_{11} = \pi \wedge m_{11} \cdot m_{22} \leq 0$

$$M \begin{Bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{Bmatrix} \qquad M \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}$$

- M es de orden 3x3
- $Tr(M) = 0 + \pi - \pi = 0$
- $m_{22} \geq 0 \quad = 0 \geq 0$
- $m_{11} = \pi$
- $m_{11} \cdot m_{22} \leq 0$

$\pi \cdot 0 \leq 0$

$0 \leq 0$ ✓

Scanned by CamScanner

6.2 Operaciones con matrices

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dado un conjunto de matrices, realizar de ser posible, operaciones de suma, multiplicación por un número real y producto entre ellas.
- Dada una matriz, obtener su transpuesta.
- Dada una matriz cuadrada, obtener de ser posible, su inversa empleando el método de Gauss–Jordan.
- Demostrar propiedades de las operaciones entre matrices.
- Dada una matriz, obtener su norma de Frobenius.
- Dada una ecuación matricial, emplear operaciones y propiedades matriciales para despejar de ser posible, la matriz incógnita.

6.2.1 Suma entre matrices

Definición 6.3 (Suma entre matrices)

Dadas dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$ del mismo orden, se define la suma entre matrices como una nueva matriz $C_{m\times n}$ del mismo orden, $C = A + B$, tal que:

$$\forall i\ \forall j (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$$

Es decir, cada elemento de la matriz C es obtenido sumando cada elemento correspondiente de las matrices A y B.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de matrices de orden $m\times n$, la suma entre matrices cumple con las siguientes propiedades:

$\forall A, B \in \mathcal{M}(A + B \in \mathcal{M})$	Cerradura
$\forall A, B \in \mathcal{M}(A + B = B + A)$	Conmutativa
$\forall A, B, C \in \mathcal{M}[A + (B + C) = (A + B) + C]$	Asociativa
$\exists 0 \in \mathcal{M}\ \forall A \in \mathcal{M}(A + 0 = 0 + A = A)$	Neutro Aditivo
$\forall A \in \mathcal{M}\ \exists \widehat{A} \in \mathcal{M}(A + \widehat{A} = \widehat{A} + A = 0)$	Inverso Aditivo

Cuadro 6.1: Propiedades de la suma entre matrices.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.5 Demostración de propiedades de la suma entre matrices.

Demuestre la propiedad conmutativa de la suma entre matrices.

$$\forall A, B \in \mathcal{M}\,(A + B = B + A)$$

Solución:

Utilizaremos el método de demostración directa.

Sean $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$ matrices, tales que:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

De acuerdo a la definición de la suma entre matrices, tenemos que:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

De donde:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Utilizando la propiedad conmutativa de la suma entre números reales:

$$A + B = \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \cdots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \cdots & b_{2n} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \cdots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix}$$

Aplicando una vez más la definición de la suma entre matrices, tenemos que:

$$A + B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Con lo cual queda demostrado que:

$$A + B = B + A$$

Scanned by CamScanner

6.2.2 Multiplicación de una matriz por un número real

Definición 6.4 (Multiplicación de una matriz por un número real)

Dado un número $\lambda \in \mathbb{R}$ y una matriz $A_{m\times n}$, se define la multiplicación de una matriz por un número real como una nueva matriz $B_{m\times n}$, $B=\lambda A$, tal que: $\forall i \forall j (b_{ij}=\lambda a_{ij})$.

Es decir, cada elemento de la matriz B es obtenido multiplicando el número real λ por cada elemento de la matriz A.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \lambda a_{ij} & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de matrices de orden $m\times n$, la multiplicación de una matriz por un número real cumple con las siguientes propiedades:

$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall A\in\mathcal{M}\,[\lambda A\in\mathcal{M}]$	Cerradura
$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall A\in\mathcal{M}\,[\lambda A=A\lambda]$	Conmutativa
$\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \forall A,B\in\mathcal{M}\,[\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B]$	Distributivas
$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\ \forall A\in\mathcal{M}[(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A]$	
$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\ \forall A\in\mathcal{M}[\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A]$	Asociativa
$\exists 1\in\mathbb{R}\ \forall A\in\mathcal{M}[1A=A]$	Elemento Neutro

Cuadro 6.2: Propiedades del producto de una matriz por un número real.

Ejemplo 6.6 Demostración de propiedades del producto de una matriz por un número real.

Demuestre que para dos matrices A y B de orden $m\times n$, se cumple la propiedad distributiva:

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

Solución:

Utilizaremos el método de demostración directa.

Consideremos dos matrices $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$, tales que:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Luego aplicamos la definición de la suma entre matrices:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Con base en la definición de la multiplicación de una matriz por un número real, se tiene que:

$$\lambda(A+B)=\begin{pmatrix} \lambda(a_{11}+b_{11}) & \lambda(a_{12}+b_{12}) & \cdots & \lambda(a_{1n}+b_{1n}) \\ \lambda(a_{21}+b_{21}) & \lambda(a_{22}+b_{22}) & \cdots & \lambda(a_{2n}+b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda(a_{m1}+b_{m1}) & \lambda(a_{m2}+b_{m2}) & \cdots & \lambda(a_{mn}+b_{mn}) \end{pmatrix}$$

Efectuando los productos indicados, tenemos que:

$$\lambda(A+B)=\begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \lambda a_{12}+\lambda b_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}+\lambda b_{1n} \\ \lambda a_{21}+\lambda b_{21} & \lambda a_{22}+\lambda b_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}+\lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1}+\lambda b_{m1} & \lambda a_{m2}+\lambda b_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}+\lambda b_{mn} \end{pmatrix}$$

Aplicando una vez más la definición de la suma entre matrices:

$$\lambda(A+B)=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} & \cdots & \lambda b_{1n} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} & \cdots & \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda b_{m1} & \lambda b_{m2} & \cdots & \lambda b_{mn} \end{pmatrix}$$

Utilizando nuevamente la definición de la multiplicación de una matriz por un número real, tenemos:

$$\lambda(A+B)=\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se demuestra que:

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$$

Ejemplo 6.7 Operaciones entre matrices.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

Determine:

a) $4A$ b) $\frac{1}{3}B$

c) $A+\frac{1}{3}B$ d) $C-2A$

Solución:

a) $4A = 4\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$4A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 20 \\ -8 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{3}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$

c) $A+\frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$

$A+\frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{4}{3} & 5 \\ -\frac{14}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

d) $C-2A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$C-2A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$C-2A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -8 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

6.2.3 Multiplicación entre matrices

Definición 6.5 (Multiplicación entre matrices)

Dadas dos matrices A_{mxn} y B_{nxp}, se define la multiplicación entre matrices como una nueva matriz C_{mxp}, $C = AB$, tal que:

$$\forall i \, \forall j (c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}).$$

Es decir, cada elemento de la matriz producto C es obtenido sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por el correspondiente elemento de la columna j de la matriz B.

La multiplicación matricial se puede expresar, utilizando notación sigma, de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

De aquí que, es necesario que el número de columnas de la matriz localizada a la izquierda del producto sea igual al número de filas de la matriz ubicada a la derecha.

La multiplicación entre matrices, siempre que dimensionalmente se pueda hacer, cumple con las siguientes propiedades:

$\forall A, B, C \; [A(BC) = (AB)C]$	Asociativa
$\exists I \, \forall A_{mxn} \; [A\, I_{nxn} = I_{mxm}\, A = A]$	
$\forall A, B, C \; [A(B + C) = AB + AC]$	Distributivas
$\forall A, B, C \; [(A + B)\, C = AC + BC]$	

Cuadro 6.3: Propiedades de la multiplicación matricial.

Considere que:

- La multiplicación entre matrices no siempre es conmutativa.
- Puede darse el caso que $AB = 0$, aunque A y B no sean matrices nulas.
- La potencia A^n para matrices cuadradas, representa la multiplicación n veces de la misma matriz A.

Para utilizar la propiedad distributiva se requiere que la matriz común esté multiplicando a las demás por la misma ubicación (izquierda o derecha). Así, dada $AB + CA$, no es posible expresarla como $A(B + C)$ o como $(B + C)A$.

Ejemplo 6.8 Multiplicación entre matrices.

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} sen\left(\frac{\pi}{2}\right) & sec\left(\frac{\pi}{3}\right) & cos\,(2\pi) \\ csc\left(-\frac{\pi}{6}\right) & sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) & -tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} log(100) & ln(e) & 1 & 1 \\ log_2\left(\frac{1}{4}\right) & -2 & 3 & 2ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \\ log_3(9) & -3 & 4 & log_2(8) \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Determine la matriz AB.

Solución:

A partir de las matrices dadas, reemplazamos los valores de las funciones correspondientes; y, aplicamos la definición de multiplicación entre matrices:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2-4+2 & 1-4-3 & 1+6+4 & 1-2+3 \\ -4+2-2 & -2+2+3 & -2-3-4 & -2+1-3 \end{pmatrix}$$

Con lo cual se tiene:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 11 & 2 \\ -4 & 3 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.9 Consideraciones de la multiplicación entre matrices.

Demuestre que la proposición: "Si $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$", es falsa.

Solución:

Como la proposición es falsa, vamos a utilizar la demostración por contraejemplo, para lo cual consideraremos dos matrices, A y B no nulas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de las matrices A y B, procedemos a aplicar la definición del producto entre ellas, así:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo cual se demuestra que $AB = 0$, a pesar de que ni A, ni B, son nulas.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.10 Aplicación de multiplicación de matrices.

Susana gana \$5 por hora como institutriz, \$6 la hora como secretaria y \$1.50 la hora como niñera. El número de horas que trabajó en cada tipo de actividad en un período de 4 semanas está dado por la siguiente tabla:

	Semanas			
Actividades	I	II	III	IV
Institutriz	15	10	16	12
Secretaria	6	4	2	3
Niñera	2	7	0	4

Determine cuánto gana Susana cada semana, por las actividades que realiza.

Solución:

Podemos representar matricialmente los datos del número de horas trabajadas por actividad y por semana, así:

$$H = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 16 & 12 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Podemos construir una matriz fila con los datos de ingresos de Susana, así:
$I = (5 \quad 6 \quad 1.5)$

Si queremos obtener la ganancia de Susana por semana, tenemos que realizar el producto IH, obteniendo así la matriz G:

$$G = IH$$

$$G = (5 \quad 6 \quad 1.5)\begin{pmatrix} 15 & 10 & 16 & 12 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G = (114 \quad 84.5 \quad 92 \quad 84)$$

Del análisis de esta matriz, podemos concluir que Susana ganó, realizando las 3 actividades: \$114 durante la primera semana, \$84.50 durante la segunda semana, \$92 durante la tercera semana y \$84 durante la cuarta semana.

Ejemplo 6.11 Operaciones entre matrices.

Sea la función $f(x) = x^2 - 2x$, cuya variable independiente x es una matriz.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, determine $f(A)$.

Solución:

Para evaluar $f(A)$ debemos reemplazar la matriz A en la función, así:

$$f(A) = A^2 - 2A$$

Scanned by CamScanner

Luego resolvemos las operaciones indicadas:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Reemplazando este resultado en $f(A)$, tenemos:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$f(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

6.2.4 Transposición de una matriz

Definición 6.6 (Transposición de una matriz)

Dada una matriz A de orden $m \times n$, para obtener la matriz transpuesta, la cual se denota por A^T, se deben intercambiar los elementos de las filas por las columnas. Es decir, la nueva matriz A^T es de orden $n \times m$.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$, la transposición cumple con las siguientes propiedades:

$\forall A \in \mathcal{M}[(A^T)^T = A]$	Doble transposición
$\forall A, B \in \mathcal{M}[(A+B)^T = A^T + B^T$	Transposición de la suma
$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall A \in \mathcal{M}[(\lambda A)^T = \lambda A^T]$	Transposición de la multiplicación por un número real
$\forall A, B \in \mathcal{M}[(AB)^T = B^T A^T]$	Transposición de la multiplicación entre matrices

Cuadro 6.4: Propiedades de la transposición de matrices.

Respecto a la última propiedad, debe aclararse, es aplicable siempre que dimensionalmente se pueda realizar la multiplicación.

Ejemplo 6.12 Propiedades de la transposición de matrices.

Considere el conjunto $\mathcal{M}$ de matrices cuadradas de orden $n \times n$. Demuestre que:

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}\ [(A^T B C)^T = C^T B^T A]$$

Solución:

$(A^T(BC))^T$	Propiedad asociativa de la multiplicación matricial.
$(BC)^T (A^T)^T$	Transposición de la multiplicación matricial.
$(BC)^T A$	Doble transposición de matrices.
$(C^T B^T) A$	Transposición de la multiplicación matricial.
$C^T B^T A$	Propiedad asociativa de la multiplicación matricial.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.13 Operaciones entre matrices.

Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, determine:

a) AB

b) A^2

c) B^TA

Solución:

a) $AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -3 & 8 & 3 \\ -9 & 15 & 5 \end{pmatrix}$$

c) $B^TA=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$B^TA=\begin{pmatrix} -16 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6.14 Aplicación de matrices.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de las matrices de dimensión 2×2. Se define en $\mathcal{M}$ la operación binaria $*$, tal que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & y \\ z & d \end{pmatrix}$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $*$ es una operación conmutativa.

b) $\forall A \in \mathcal{M}\,(A * A^T = A^T)$

Solución:

a) Para que $*$ sea una operación conmutativa, debe cumplirse que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Pero si aplicamos la definición dada, notaremos que la igualdad entre matrices no se cumple:

$$\begin{pmatrix} a & y \\ z & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x & b \\ c & w \end{pmatrix}$$

∴ Esta proposición es falsa.

b) $A * A^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^T$

∴ Esta proposición es verdadera.

Ejemplo 6.15 Operaciones entre matrices.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, determine la matriz C a partir de la siguiente ecuación:

$$B^T - 2C = \frac{1}{2}A$$

Solución:

$$2C = B^T - \frac{1}{2}A$$ Manipulando la ecuación matricial.

$$C = \frac{1}{4}(2B^T - A)$$ Despejando la matriz C.

$$C = \frac{1}{4}\left(2\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$ Reemplazando las matrices A y B.

$$C = \frac{1}{4}\left(2\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$ Transponiendo la matriz indicada.

$$C = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$$ Multiplicando B^T por el número real 2.

$$C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -12 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$ Efectuando la suma matricial indicada.

$$C = \begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{4} \\ 2 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$ Obteniendo la matriz C.

Scanned by CamScanner

Norma de una matriz

La norma de una matriz es un concepto de mucha utilidad en cursos superiores de matemáticas. En este sentido es importante anotar que existe más de una forma de definirla según su aplicabilidad, una de ellas es la norma de Frobenius que se presenta a continuación.

La norma de Frobenius, denominada también euclidiana, para una matriz $A_{m\times n}$, se denota por $\|A\|_F$ y está definida como:

$$\|A\|_F = \sqrt{tr\left(A\,A^T\right)} = \sqrt{\left(a_{11}\right)^2+\left(a_{12}\right)^2+\ldots+\left(a_{ij}\right)^2+\ldots+\left(a_{m\,n-1}\right)^2+\left(a_{mn}\right)^2}$$

Visto de otra forma, si S representa la suma de los cuadrados de todos los elementos de la matriz, entonces:

$$\|A\|_F = \sqrt{S}$$

Ejemplo 6.16 Norma de una matriz.

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, su norma de Frobenius es:

$$\|A\|_F = \sqrt{tr\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right]} = \sqrt{tr\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}} = \sqrt{30}$$

6.2.5 Inversa de una matriz

Definición 6.7 (Inversa de una matriz)

Dada una matriz cuadrada A, su inversa, la cual se denota por A^{-1}, es una matriz que cumple con:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Una matriz cuadrada que posee inversa se dice que es **regular**, caso contrario, se dice que es **singular**. Adicionalmente, la matriz inversa, en caso de existir, es única.

Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de matrices cuadradas de orden $n\times n$ inversibles, la inversa de una matriz cumple con las siguientes propiedades:

$\forall A\in\mathcal{I}\left[(A^{-1})^{-1}=A\right]$	Doble inversa
$\forall A\in\mathcal{I}\left[(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T\right]$	Inversa de la transposición
$\forall\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}\,\forall A\in\mathcal{I}\left[(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}\right]$	Inversa de la multiplicación por un número real
$\forall A,B\in\mathcal{I}\left[(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\right]$	Inversa de la multiplicación entre matrices

Cuadro 6.5: Propiedades de la inversa de una matriz.

Esta última propiedad, es aplicable siempre que dimensionalmente se pueda realizar la multiplicación.

Scanned by CamScanner

Para obtener la inversa de una matriz, se puede utilizar el método de Gauss–Jordan o el de la matriz de cofactores transpuesta.

El objetivo del método de Gauss–Jordan es transformar la matriz A por medio de operaciones algebraicas entre renglones en la matriz identidad I equivalente; y, simultáneamente la identidad I en la inversa de A. Para tal efecto, las operaciones que están permitidas son:

- Multiplicar una fila por una constante k diferente de cero.
- Intercambiar dos filas.
- Sumar un múltiplo de una fila a otra.

Luego estudiaremos el método de la matriz de cofactores transpuesta.

Ejemplo 6.17 Inversa de una matriz cuadrada.

Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden $n \times n$ inversibles, demuestre que:

$$\forall A \in \mathcal{I} \ [(A^{-1})^{-1} = A]$$

Solución:

$(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = I$	Definición de inversa de una matriz.
$(A)(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = (A)\,I$	Multiplicación en ambos miembros de la ecuación por A.
$[(A)(A^{-1})](A^{-1})^{-1} = (A)\,I$	Propiedad asociativa de la multiplicación matricial.
$[I](A^{-1})^{-1} = (A)\,I$	Definición de inversa de una matriz.
$(A^{-1})^{-1} = A$	Propiedad de la multiplicación matricial.

Ejemplo 6.18 Inversa de una matriz cuadrada.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, determine A^{-1}.

Solución:

Por la definición dada, podemos expresar:

$$A\,A^{-1} = I$$

Considerando $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ y planteando la ecuación matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Multiplicando e igualando los elementos correspondientes, resulta:

$$\begin{cases} 2x - 4z = 1 \\ 2y - 4w = 0 \\ 5x + 6z = 0 \\ 5y + 6w = 1 \end{cases}$$

Este sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas puede plantearse como 2 sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, como se verá en la sección 6.5.

$$\begin{cases} 2x - 4z = 1 \\ 5x + 6z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y - 4w = 0 \\ 5y + 6w = 1 \end{cases}$$

Observe que la matriz de coeficientes en ambos sistemas es la misma y los términos independientes son los elementos de la matriz identidad.

Podemos expresar los sistemas como una matriz aumentada, tal como se verá más adelante; y, resolverlos mediante el método de Gauss–Jordan, tomando la matriz A y la identidad I para realizar las transformaciones pertinentes.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\left(\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(-1)+f_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{16}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\left(\frac{5}{16}\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{32} & \frac{1}{16} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2(2)+f_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{32} & \frac{1}{16} \end{array}\right)$$

Scanned by CamScanner

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{32} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Comprobando:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{32} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

El lector puede verificar que los elementos de A^{-1} son x, y, z, w, respectivamente.

Ejemplo 6.19 Inversa de una matriz cuadrada.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, determine su inversa, empleando el método de Gauss–Jordan.

Solución:

Tomamos la matriz A y la identidad I para realizar las transformaciones pertinentes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3\left(-\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{5}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(-1)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{3} & -1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2(-1)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{26}{3} & -1 & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Scanned by CamScanner

$$\xrightarrow{f_3\left(-\frac{3}{26}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3(-4)+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{26} & \frac{14}{26} & -\frac{4}{26} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2(2)+f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & \frac{2}{26} & \frac{28}{26} & -\frac{8}{26} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{26} & \frac{14}{26} & -\frac{4}{26} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3(-3)+f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{26} & \frac{19}{26} & -\frac{11}{26} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{26} & \frac{14}{26} & -\frac{4}{26} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{26} & \frac{19}{26} & -\frac{11}{26} \\ -\frac{12}{26} & \frac{14}{26} & -\frac{4}{26} \\ \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{pmatrix}$$

Comprobando:

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{26} & \frac{19}{26} & -\frac{11}{26} \\ -\frac{12}{26} & \frac{14}{26} & -\frac{4}{26} \\ \frac{3}{26} & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{pmatrix}$$

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3\times 3}$$

Scanned by CamScanner

Autoevaluación

1) Conociendo que $\mathcal{I}$ es el conjunto de las matrices cuadradas de orden $n \times n$ inversibles, escriba en cada paso de la siguiente demostración, el nombre de la definición o propiedad utilizada:

$\forall A \in \mathcal{I}\,[(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T]$	
$A A^{-1} = I$	
$(A A^{-1})^T = I^T$	
$(A^{-1})^T (A)^T = I$	
$(A^{-1})^T (A^T)(A^T)^{-1} = I (A^T)^{-1}$	
$(A^{-1})^T I = I (A^T)^{-1}$	
$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$	

2) Determine si las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen con la igualdad $A = C^{-1}BC$. Para su desarrollo no necesita obtener la inversa C^{-1}.

$A = C^{-1}BC$

Por lo tanto si cumple

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

3) Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

a) Si A es una matriz cuadrada, entonces $(A^T)^2 = (A^2)^T$

$A^T = A = A^{-1}$

$(A^T)^2 = A^T$

$A^2 = A^T$

$A^T = A^T = I$

cumple

$A = 3 \times 3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\forall\, a, b, c \in \mathbf{R} \wedge n \in \mathbf{N}$, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ entonces $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ b^n & c^n \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{pmatrix} \neq$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$

no cumple

4) Si $z \in \mathbf{R}$; y, las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ cumplen con la igualdad $AX = zX$, determine el valor de z.

Scanned by CamScanner

6.3 Matrices Relevantes

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una matriz, reconocer por simple inspección o utilizando operaciones, si es idempotente, periódica, involutiva, nilpotente, simétrica, antisimétrica u ortogonal.
- Dada una matriz relevante, demostrar propiedades relacionadas.

Existen **matrices cuadradas** que por sus características especiales son utilizadas en muchas aplicaciones matemáticas, algunas de las cuales se presentan a continuación.

Matriz idempotente

A es una matriz que cumple con la condición $A^2 = A$.

Ejemplo 6.20 Matriz idempotente.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ es idempotente ya que se cumple:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix} = A$$

Matriz periódica

A es una matriz periódica de período p si $A^p = A$ $(p \in \mathbb{N} \wedge p > 1)$.

Ejemplo 6.21 Matriz periódica.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es periódica con período $p = 4$ ya que se cumple:

Scanned by CamScanner

$$A^4=\begin{pmatrix}4&-3&-3\\5&-4&-4\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3&-3\\5&-4&-4\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3&-3\\5&-4&-4\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3&-3\\5&-4&-4\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}4&-3&0\\4&-3&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-3&0\\4&-3&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}4&-3&-3\\5&-4&-4\\-1&1&0\end{pmatrix}=A$$

Matriz involutiva

A es una matriz involutiva si $A^2=I$.

Ejemplo 6.22 Matriz involutiva.

La matriz $A=\begin{pmatrix}7&-8\\6&-7\end{pmatrix}$ es involutiva ya que se cumple:

$$A^2=\begin{pmatrix}7&-8\\6&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&-8\\6&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

Matriz nilpotente

A es una matriz nilpotente de índice p si $A^p=0$ $(p\in\mathbf{N}\wedge p>1)$

Ejemplo 6.23 Matriz nilpotente.

La matriz $A=\begin{pmatrix}1&5&-2\\1&2&-1\\3&6&-3\end{pmatrix}$ es nilpotente de índice $p=3$ ya que se cumple:

$$A^3=\begin{pmatrix}1&5&-2\\1&2&-1\\3&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5&-2\\1&2&-1\\3&6&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5&-2\\1&2&-1\\3&6&-3\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0&3&-1\\0&3&-1\\0&9&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5&-2\\1&2&-1\\3&6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Matriz simétrica

A es una matriz simétrica, si y sólo si $A^T = A$. Esto se puede representar simbólicamente por $\forall i\ \forall j(a_{ij} = a_{ji})$.

Ejemplo 6.24 Matriz simétrica.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} & -10 \\ \sqrt{3} & -5 & \frac{2}{5} \\ -10 & \frac{2}{5} & 7 \end{pmatrix}$ es simétrica ya que:

$$a_{21} = a_{12} \ \wedge\ a_{31} = a_{13} \ \wedge\ a_{32} = a_{23}$$

Cuando se realiza la transpuesta de matrices simétricas, los elementos de la diagonal principal quedan en la misma posición.

Matriz antisimétrica

A es una matriz antisimétrica, si y sólo si $A^T = -A$. Esto se puede representar simbólicamente por $\forall i\ \forall j(a_{ij} = -a_{ji})$, que implica además que $a_{ii} = 0$.

Ejemplo 6.25 Matriz antisimétrica.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -10 & 0 \\ -6 & 0 & \sqrt[3]{4} & -e^2 \\ 10 & -\sqrt[3]{4} & 0 & 0.5 \\ 0 & e^2 & -0.5 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica ya que se cumple:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 10 & 0 \\ 6 & 0 & -\sqrt[3]{4} & e^2 \\ -10 & \sqrt[3]{4} & 0 & -0.5 \\ 0 & -e^2 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 6 & -10 & 0 \\ -6 & 0 & \sqrt[3]{4} & -e^2 \\ 10 & -\sqrt[3]{4} & 0 & 0.5 \\ 0 & e^2 & -0.5 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.26 Matriz antisimétrica.

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de las matrices cuadradas, demuestre que $\forall A \in \mathcal{M}, (A - A^T)^T$ es antisimétrica, esto es $(A - A^T)^T = -(A - A^T)$.

Solución:

$$\begin{aligned} (A - A^T)^T &= A^T - (A^T)^T && \text{Transposición de la suma.} \\ (A - A^T)^T &= A^T - A && \text{Doble transposición de matrices.} \\ (A - A^T)^T &= -(A - A^T) && \text{Factor común } -1. \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrado que $(A - A^T)^T$ es antisimétrica.

Matriz ortogonal

A es una matriz ortogonal, si y sólo si A es inversible y $A^{-1} = A^T$.

Ejemplo 6.27 Matriz ortogonal.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, verifique que es ortogonal.

Solución:

En este caso se puede comprobar que el producto de la matriz A por su transpuesta, que es la misma inversa, es la matriz Identidad.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ A es ortogonal.

Scanned by CamScanner

1) Sea A una matriz idempotente, obtenga la matriz R si $R = A^2 - A^3 + A^4$.

$A - A \cdot A^2 + A$

$A - A + A = A$

$A - A + A$

2) Demuestre que si una matriz A es de orden 2x3, se cumple que AA^T es una matriz simétrica.

No siempre esto no se cumple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 34 & 17 \end{pmatrix}$

no es simetrica

3) ¿Puede una matriz ser idempotente e involutiva al mismo tiempo? Explique.

Scanned by CamScanner

4) Suponga que existe la matriz $A_{2\times3}$ tal que $B = AA^T$ es idempotente. Si $B^4 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ entonces calcule el valor $t = b_{21} - b_{12}$.

5) Considere la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$:

a) Construya la matriz A con valores a, b, c diferentes de cero tales que $ac = 1 + b^2$.

$ac = 1 + b^2$

$3 + 2 \cdot 1 + 2^2$

$5 = 1 + 4$

$5 = 5$ ℝ

b) Dadas estas condiciones, compruebe que $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$A^{-1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$-2A^{-1}$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$-2A$ F1

F2 − 2

c) Compruebe que, para la matriz construida, se cumple la siguiente igualdad matricial:

$$\frac{1}{tr(A)}\left(A + A^{-1}\right) = I$$

¡Atención!, una comprobación no es una demostración. Si desea, sírvase demostrar que esta expresión se cumple para cualquier matriz A construida.

$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = I$

no cumple

1

Scanned by CamScanner

6.4 Determinantes

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dada una matriz cuadrada de orden 1x1 o 2x2, obtener su determinante mediante cálculo directo.
- Dada una matriz cuadrada, definir el menor y el cofactor de cada uno de sus elementos.
- Dada una matriz cuadrada de orden 3x3, calcular su determinante en forma directa mediante cofactores.
- Aplicar el teorema para cálculo de determinantes, en el caso de matrices diagonales o triangulares.
- Dada una matriz cuadrada de orden 4x4 o superior, calcular su determinante empleando propiedades.
- Dadas dos matrices relacionadas entre sí, una con determinante conocido y otra no, calcular el determinante desconocido empleando propiedades.
- Dada una ecuación con determinantes, despejar la incógnita empleando reglas de cálculo de determinantes.
- Dada una matriz con una incógnita, determinar condiciones para que no sea inversible.
- Dada una matriz cuadrada, determinar su inversa en caso de ser posible, empleando el método de la matriz adjunta.
- Aplicar las propiedades de los determinantes para la matriz transpuesta, inversa y producto.

El cálculo de determinantes tiene una gran relevancia dentro de la teoría de matrices ya que son de mucha utilidad al resolver sistemas de ecuaciones lineales, analizar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores; y, calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas en el plano y el espacio, entre otras aplicaciones.

El determinante de una matriz cuadrada A_{nxn}, el cual se denota por $det\,(A)$ o $|\,A\,|$, es un número real que constituye una aplicación del concepto de funciones.

Esto es:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{det}{\curvearrowright} & \\ M_{n\times n} & & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & det\,(A) \end{array}$$

Scanned by CamScanner

El determinante puede ser obtenido de la siguiente manera:

$$det\,(a_{11}) = a_{11}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A^{11} - a_{12}A^{12} + a_{13}A^{13}$$

En esta última expresión, a los determinantes A^{11}, A^{12} y A^{13} se los denomina **cofactores**, los cuales se obtienen eliminando los elementos de la fila y la columna que los superíndices señalan. El signo que se asocia a cada cofactor se obtiene elevando el valor -1 a una potencia cuyo valor es la suma de los respectivos superíndices, esto es: $(-1)^{i+j}$.

En general, el determinante de una matriz de orden $n \times n$ es la suma de los productos entre los elementos de una de sus filas (o una de sus columnas) por sus correspondientes cofactores.

La fila o la columna se elige arbitrariamente, y dado el procedimiento anterior, se prefiere aquella fila o columna donde exista la mayor cantidad de ceros posibles, ya que esto ahorra el cálculo del cofactor para ese elemento.

Así, si se requiere el valor del determinante de una matriz de orden 4×4, debe expresarse en función de determinantes de submatrices de orden 3×3 utilizando los respectivos cofactores, y así sucesivamente por cada nuevo incremento en el orden de la matriz.

A partir de este método, se puede deducir el siguiente teorema:

Teorema 6.1

Si A es una matriz triangular o diagonal, entonces $det\,(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

También podemos utilizar el siguiente teorema en el caso del cálculo de determinantes para matrices ortogonales.

Teorema 6.2

Si A es una matriz ortogonal, entonces $det\,(A) = 1$.

Tal como se dijo anteriormente y luego de estudiar el concepto de determinante, nos proponemos ahora obtener la inversa de una matriz por el método de los cofactores, considerando el siguiente teorema.

Teorema 6.3

A es inversible, si y sólo si $det\,(A) \neq 0$.

Scanned by CamScanner

Suponiendo que $det(A) \neq 0$, su inversa A^{-1} es igual a la matriz adjunta, $(\hat{A})^T$, multiplicada por el factor $\frac{1}{det(A)}$, esto es:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} (\hat{A})^T$$

La matriz adjunta $(\hat{A})^T$ es el resultado de transponer la matriz de cofactores $\hat{A}$.

Ejemplo 6.28 Inversa de una matriz cuadrada.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, determine la matriz A^{-1}.

Solución:

Determinamos cada cofactor:

$$A^{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad A^{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \qquad A^{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A^{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A^{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A^{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A^{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A^{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \qquad A^{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

La matriz de cofactores, con los respectivos signos asociados, es:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cofactores transpuesta es:

$$(\hat{A})^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -9 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

El valor del determinante de A es:

$$det\,(A) = 1(4+1) - 1\,(6+3) + 1\,(3-6)$$

$$det\,(A) = 5 - 9 - 3$$

$$det\,(A) = -7$$

La matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -9 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Comprobando:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{3\times 3}$$

Ejemplo 6.29 Determinante de una matriz.

Calcule el determinante de las siguientes matrices utilizando el teorema 6.1.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Ya que la matriz A es una matriz triangular superior, su determinante se calcularía como:

$$det\,(A) = (1)\,(2)\,(6) = 12$$

Este valor coincide con el que resulta si se calculara el $det\,(A)$ utilizando el procedimiento descrito anteriormente, así:

$$det\,(A) = (1)(12) - 3\,(0) + 5\,(0)$$

$$det\,(A) = 12$$

Scanned by CamScanner

b) Por ser B una matriz diagonal, su determinante se podría calcular así:

$$det\,(B) = (3)(4)(5)(-2)$$
$$det\,(B) = -120$$

Este valor coincide con el que resulta al calcular el $det(B)$ utilizando el procedimiento descrito al inicio de esta sección; así:

$$det\,(B) = 3\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$det\,(B) = (3)(4)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$det\,(B) = (3)(4)(-10)$$

$$det\,(B) = -120$$

Ejemplo 6.30 Cálculo de determinantes.

Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1)(-5) = 10$$

Por lo tanto, el valor del determinante requerido es 10.

Scanned by CamScanner

El cálculo de los determinantes por el método de cofactores es muy laborioso para matrices de orden 4x4 o superior, por lo que se hace necesario emplear las propiedades de los determinantes, las cuales se describen a continuación.

1.	Si se intercambian dos de sus filas (o dos de sus columnas), el determinante cambia de signo.
2.	Si dos filas (o dos columnas) son iguales, entonces el determinante es igual a cero.
3.	Si se multiplican todos los elementos de una fila (o de una columna) por un número real k, el determinante se multiplica por dicho número real.
4.	Si dos de sus filas (o dos de sus columnas) son proporcionales, entonces el determinante es igual a cero.
5.	Si todos los elementos de una fila (o de una columna) son iguales a cero, entonces el determinante es igual a cero.
6.	Si los elementos de una fila (o de una columna) se multiplican por un número real k y se suman algebraicamente a los elementos correspondientes de otra fila (o columna), el determinante no se altera.

Respecto de las operaciones matriciales que se han descrito; y, siendo A y B matrices cuadradas de orden $n \times n$, se cumple que:

$det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$	Determinante del producto de un número real por una matriz
$det(AB) = det(A)\, det(B)$	Determinante del producto de matrices
$det(A^T) = det(A)$	Determinante de la matriz transpuesta
$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$	Determinante de la inversa de una matriz

Cuadro 6.6: Propiedades de los determinantes.

Para la aplicación de la última propiedad es necesario que adicionalmente la matriz sea inversible.

Ejemplo 6.31 Propiedades de los determinantes.

Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa. Justifique su respuesta.
"Si A y B son matrices cuadradas, entonces $det(A + B) = det(A) + det(B)$".

Solución:

Con base en las propiedades de los determinantes, es posible identificar al menos un par de matrices cuadradas para las cuales no se cumple el enunciado, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calculan sus determinantes:

$$det(A) = 4 \qquad det(B) = 1$$

Scanned by CamScanner

Se obtiene el resultado de la suma de matrices:

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Se calcula su determinante:

$$det\,(A+B)=9$$

A y B son matrices cuadradas, pero $det\,(A+B)\neq det\,(A)+det\,(B)$.

En la proposición dada se tiene la condicional como operador lógico. A partir del contraejemplo proporcionado, el antecedente es verdadero y el consecuente es falso; con lo cual, la condicional de proposiciones es falsa.

$\therefore$ La proposición es falsa.

Ejemplo 6.32 Ecuaciones con determinantes.

Sea el conjunto referencial $\mathrm{Re}=\mathbb{R}$ y el predicado con la siguiente ecuación de determinantes, obtenga el conjunto de verdad $\mathrm{A}p(x)$:

$$p(x):\begin{vmatrix}2 & x\\ x & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x+1 & 1\\ x-3 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=0$$

Solución:

Se aplica el cálculo de determinantes:

$$(2-x^2)+[2\,(x+1)-(x-3)]+(-3+2)=0$$

$$2-x^2+2x+2-x+3-1=0$$

Se plantea la siguiente ecuación cuadrática:

$$-x^2+x+6=0$$

$$x^2-x-6=0$$

$$(x-3)\,(x+2)=0$$

$$(x-3=0)\ \vee (x+2=0)$$

$$(x=3)\ \vee\ (x=-2)$$

Se comprueban las soluciones:

$$p(3):\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-7+8-1=0\quad\therefore p(3)\equiv 1$$

Scanned by CamScanner

$$p(-2): \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -2+3-1=0 \quad \therefore p(-2) \equiv 1$$

Por lo tanto:

$$Ap(x) = \{-2, 3\}$$

Ejemplo 6.33 Ecuaciones con determinantes.

Sea el conjunto referencial Re=$\mathbb{R}$ y los predicados que incluyen ecuaciones con determinantes, obtenga los conjuntos de verdad $Ap(x)$ y $Aq(x)$:

a) $p(x): \begin{vmatrix} -3 & x+2 \\ -4 & x+5 \end{vmatrix} = 9-3x$

b) $q(x): \begin{vmatrix} x & ln\,(1) & sen\,(\pi) \\ 5 & x-3 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2$

Solución:

a) Se aplica el cálculo del determinante, se genera una ecuación lineal; y, se la resuelve:

$$-3(x+5)+4(x+2)=9-3x$$
$$-3x-15+4x+8=9-3x$$
$$4x=16$$
$$x=4$$

Se verifica la solución:

$$p(4): \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = 9-3(4)$$

$$p(4): -27-(-24)=-3$$

$$\therefore p(4) \equiv 1$$

Se concluye que:

$$Ap(x) = \{4\}$$

b) Se evalúan las funciones indicadas, se calcula el determinante, se genera una ecuación cuadrática; y, se la resuelve:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 5 & x-3 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = x(x-3)(1) = x^2-3x$$

Scanned by CamScanner

$$x^2 - 3x = -2$$
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-1)(x-2) = 0$$
$$(x-1=0) \vee (x-2=0)$$
$$(x=1) \vee (x=2)$$

Se verifican las soluciones:

$$q(1): \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-2)(1) = -2 \qquad \therefore q(1) \equiv 1$$

$$q(2): \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (2)(-1)(1) = -2 \qquad \therefore q(2) \equiv 1$$

Se concluye que:

$$Aq(x) = \{1, 2\}$$

Ejemplo 6.34 Ecuaciones con determinantes.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y el predicado $p(\lambda)$: $det\,(A - \lambda I) = 0$, determine $Ap(\lambda)$.

Solución:

Construimos la matriz $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Luego, calculamos el determinante:

$$det\,(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 4$$
$$= 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4$$
$$det\,(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Scanned by CamScanner

Igualando a cero este determinante, tenemos:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$
$$(\lambda - 3 = 0) \vee (\lambda + 1 = 0)$$

Luego:

$$(\lambda = 3) \vee (\lambda = -1)$$

Comprobando:

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces, $Ap(\lambda) = \{-1, 3\}$.

Ejemplo 6.35 Propiedades de los determinantes.

Dado el valor del siguiente determinante $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \lambda & \mu & \psi \\ \varepsilon & \eta & \omega \end{vmatrix} = 5$, calcule el valor de:

$$\begin{vmatrix} 4\beta & \alpha & \delta + 4\beta \\ 8\mu & 2\lambda & 2\psi + 8\mu \\ -4\eta & -\varepsilon & -\omega - 4\eta \end{vmatrix}$$

Solución:

Paso 1: Se intercambian las columnas 1 y 2.

$$\begin{vmatrix} \beta & \alpha & \delta \\ \mu & \lambda & \psi \\ \eta & \varepsilon & \omega \end{vmatrix} = -5$$

Paso 2: Se multiplica la fila 3 por el factor (-1).

$$\begin{vmatrix} \beta & \alpha & \delta \\ \mu & \lambda & \psi \\ -\eta & -\varepsilon & -\omega \end{vmatrix} = -(-5) = 5$$

Scanned by CamScanner

Paso 3: Se multiplica la columna 1 por el factor (4).

$$\begin{vmatrix} 4\beta & \alpha & \delta \\ 4\mu & \lambda & \psi \\ -4\eta & -\varepsilon & -\omega \end{vmatrix} = 5(4) = 20$$

Paso 4: Se multiplica la fila 2 por el factor (2).

$$\begin{vmatrix} 4\beta & \alpha & \delta \\ 8\mu & 2\lambda & 2\psi \\ -4\eta & -\varepsilon & -\omega \end{vmatrix} = 20(2) = 40$$

Paso 5: Se suman las columnas 1 y 3.

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 4\beta & \alpha & \delta+4\beta \\ 8\mu & 2\lambda & 2\psi+8\mu \\ -4\eta & -\varepsilon & -\omega-4\eta \end{vmatrix} = 40$$

Ejemplo 6.36 Propiedades de los determinantes.

Demuestre que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

Solución:

Paso 1: Restamos la columna 1 menos la 2 y luego restamos la columna 3 de la 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

Paso 2: Aplicamos el cálculo de un determinante para una matriz 3x3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1 \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Paso 3: Aplicamos el cálculo de un determinante para una matriz 2×2.

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b^2-c^2)-(b-c)(a^2-b^2)$$

Paso 4: Descomponemos la diferencia de cuadrados perfectos.

$$(a-b)(b^2-c^2)-(b-c)(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(b+c)-(b-c)(a-b)(a+b)$$

Paso 5: Obtenemos factores comunes.

$$(a-b)(b-c)(b+c)-(b-c)(a-b)(a+b)=(a-b)(b-c)[(b+c)-(a+b)]$$

Paso 6: Simplificamos y demostramos lo requerido.

$$(a-b)(b-c)[(b+c)-(a+b)]=(a-b)(b-c)(b+c-a-b)$$

$$(a-b)(b-c)(b+c-a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

Ejemplo 6.37 Inversa de una matriz cuadrada.

Dada la matriz real A, tal que $A=\begin{pmatrix} \sqrt{x+3} & 1 \\ 3 & \sqrt{x-5} \end{pmatrix}$, determine los valores reales de x, tales que la matriz A sea regular.

Solución:

Para que A sea regular, su determinante tiene que ser diferente de cero.

$$det\,(A)=\begin{vmatrix} \sqrt{x+3} & 1 \\ 3 & \sqrt{x-5} \end{vmatrix} = (\sqrt{x+3})(\sqrt{x-5})-3$$

$$det\,(A)=\sqrt{x^2-2x-15}-3$$

Pero, $det\,(A)\neq 0$, luego:

$$\sqrt{x^2-2x-15}-3\neq 0 \quad \equiv \quad \sqrt{x^2-2x-15}\neq 3$$

$$x^2-2x-15\neq 9 \quad \equiv \quad x^2-2x-24\neq 0$$

$$(x-6)(x+4)\neq 0 \quad \equiv \quad (x-6\neq 0)\wedge(x+4\neq 0)$$

$$(x\neq 6)\wedge(x\neq -4)$$

Scanned by CamScanner

También hay que considerar las restricciones para las expresiones con radicales:

$$(x+3\geq 0)\wedge(x-5\geq 0) \quad \equiv \quad (x\geq -3)\wedge(x\geq 5)$$

Por lo tanto, para que A sea regular, los valores requeridos son: $(x\geq 5)\wedge(x\neq 6)$.

Ejemplo 6.38 Inversa de una matriz cuadrada.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 0 & -\frac{1}{2} \\ k & k & \frac{1}{2} \\ (8k)^{-1} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{R}, \neg(k=0)$, determine el valor de k para que la matriz A sea singular.

Solución:

Para que la matriz A sea singular, necesitamos que $det\,(A)=0$, de aquí que empezaremos calculando este determinante, así:

$$det\,(A)=k\left(k-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}k-\frac{k}{8k}\right)=k^2-\frac{1}{4}k-\frac{1}{4}k+\frac{1}{16}$$

$$det\,(A)=k^2-\frac{1}{2}k+\frac{1}{16}$$

Igualando a cero este valor, tenemos:

$$k^2-\frac{1}{2}k+\frac{1}{16}=0$$

De donde se obtiene:

$$\left(k-\frac{1}{4}\right)^2=0$$

Luego:

$$k=\frac{1}{4}$$

El lector puede verificar que el determinante de la matriz A es igual a 0 para este valor de k.

Scanned by CamScanner

1) Considere las matrices A y B:

$$A=\begin{pmatrix} 302 & -9 & -791 & 356 \\ 918 & -3 & -2169 & 1080 \\ -108 & 9 & 249 & -108 \\ -452 & 0 & 1100 & -542 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

y la matriz inversible C tal que $A=C^{-1}BC$, determine el valor de t, si $t=det\left(\frac{1}{6}A\right)$.

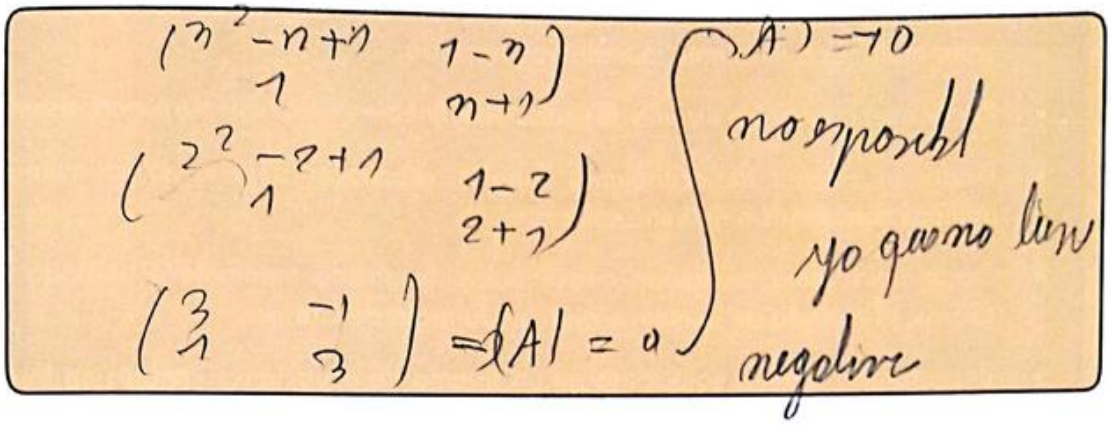
2) Califique la siguiente proposición como verdadera o falsa:

"Para toda matriz cuadrada A se cumple que $det(A^n)=[det(A)]^n$, $n\in\mathbf{N}^*$.

Luego, demuéstrela si es verdadera o proponga un contraejemplo si es falsa.

Scanned by CamScanner

3) Considere que $n \in \mathbb{N}$, si se define la matriz $A = \begin{pmatrix} n^2-n+1 & 1-n \\ 1 & n+1 \end{pmatrix}$, determine de ser posible el valor de n tal que $det\,(A) = -10$.



4) Dadas dos matrices A y B de orden 3×3, tales que A es una matriz involutiva y B es una matriz escalar con $det\,(B) = a^3$, siendo $a \in \mathbb{R}$, determine el valor de z si se conoce que:

$$z = \frac{det\left(B\right) + det\left(A^2\right)}{\sqrt[3]{det\left(B^T + A^2\right)}}$$

Scanned by CamScanner

6.5 Sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L.)

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dado un sistema de ecuaciones lineales, identificar las incógnitas, coeficientes de las incógnitas y coeficientes independientes, empleando la notación adecuada.
- Dado un sistema de ecuaciones lineales, representarlo mediante operaciones entre matrices o mediante la matriz aumentada.
- Reconocer cuando un sistema de ecuaciones lineales es consistente o inconsistente.
- Dado un sistema de ecuaciones lineales, reconocer si tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.
- Dado un sistema de ecuaciones lineales, resolverlo mediante el método de Gauss, el método de la matriz inversa o la regla de Cramer.
- Expresar las infinitas soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en forma paramétrica.
- Dado un sistema de ecuaciones lineales con parámetros desconocidos, establecer condiciones sobre ellos de acuerdo al tipo de solución requerido.
- Dado un problema de la vida cotidiana asociado a un sistema de ecuaciones lineales, plantearlo, resolverlo e interpretar su solución.

Una recta en el plano real puede representarse algebraicamente por una ecuación de la forma:

$$a_1 x + a_2 y = b;\ a_1,\ a_2,\ b \in \mathbb{R}$$

Una ecuación de esta forma se denomina **ecuación lineal** en las variables x, y.

En general, la ecuación:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b \quad (*)$$

es una ecuación lineal en las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Una solución para la ecuación lineal $(*)$ es una colección ordenada de n números reales $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, tales que al sustituirlos en la ecuación: $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$, obtenemos una proposición verdadera. Por ejemplo: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 1$ es una solución de la ecuación lineal $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$, porque $2 - 4(1) + 7(1) = 5$ es una proposición verdadera.

Si se combinan varias ecuaciones de este tipo, relacionadas a una misma situación, la solución que se obtiene deberá satisfacer a todas las ecuaciones, en cuyo caso se requiere determinarla con la ayuda de un método efectivo.

Es así que surge la necesidad de estudiar los sistemas de ecuaciones lineales y sus diferentes métodos de solución.

Scanned by CamScanner

Definición 6.8 (Sistemas de Ecuaciones Lineales)

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es un conjunto de ecuaciones lineales que son verificadas simultáneamente, y puede escribirse de la forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (**)$$

Los elementos a_{ij} se denominan **coeficientes** del sistema. Las **incógnitas** del sistema son las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Los valores $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son considerados **términos independientes.**

La i–ésima ecuación del sistema es :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Se puede abreviar el nombre sistema de ecuaciones lineales por S.E.L. y podemos representarlo por medio de una ecuación matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

A es la matriz de coeficientes, X es la matriz columna de incógnitas y B es la matriz columna de los términos independientes.

Representación de un sistema de ecuaciones lineales en forma de matriz aumentada

Las **matrices aumentadas** nos sirven para representar los S.E.L. en una forma abreviada. Estas matrices están formadas por la matriz de los coeficientes y la de los términos independientes del sistema, tal como se muestra a continuación.

Scanned by CamScanner

Considere el S.E.L:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - w = 6 \\ -2x + y - 2z + 2w = -1 \end{cases}$$

Su matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Definición 6.9 (Solución de un S.E.L)

Una solución del sistema de ecuaciones lineales (••) es una sucesión ordenada de números reales $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$, que tienen la propiedad que cada ecuación se convierte en una proposición verdadera al reemplazar $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$ en el S.E.L

Definición 6.10 (S.E.L. Homogéneos)

Si en el S.E.L se cumple que $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, se lo denomina S.E.L. homogéneo. Un sistema homogéneo se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Todos los S.E.L. homogéneos tienen al menos una solución: $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$, la cual se denomina **solución trivial**. Una solución diferente a la trivial se denomina **no trivial**.

Se dice que dos S.E.L. son equivalentes, si y sólo si tienen las mismas soluciones.

Un S.E.L. que tenga solamente dos ecuaciones y dos incógnitas x, y, geométricamente representa un par de rectas en el plano real. Puesto que un punto $P(x, y)$ pertenece a la recta, si y sólo si los números x, y satisfacen su ecuación, las soluciones del sistema corresponderán a los puntos de intersección de las rectas, en el caso que existieran, tal como se muestra a continuación.

$$\begin{cases} x - y = 1 \quad \text{(I)} \\ x + y = 1 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Algebraicamente puede resolverse así:

Sumando (I) y (II):

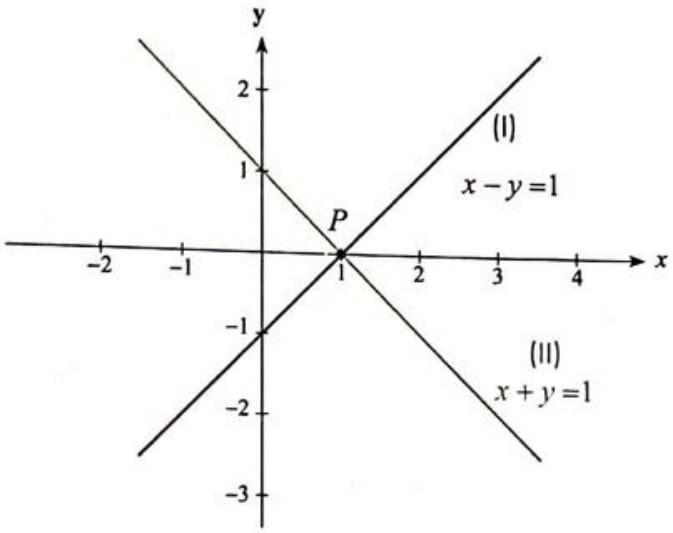
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Reemplazando el valor obtenido en la ecuación (I):

$$1 - y = 1$$
$$y = 0$$

Con lo cual, se concluye que $P(1, 0)$ es la solución del S.E.L.

Gráficamente, ambas ecuaciones representan dos funciones lineales.



Puede observarse en la figura que el punto de intersección de ambas rectas es $P(1, 0)$, el cual coincide con el resultado del análisis algebraico.

Es importante anotar que todo S.E.L. puede definirse como un predicado de varias variables, con sus respectivos conjuntos referenciales; y, la solución como su conjunto de verdad. Así en el caso anterior, el S.E.L. quedaría definido por:

$$p(x, y): \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ siendo } \mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbb{R}$$

A partir del cual, $Ap(x, y) = \{(1, 0)\}$.

Scanned by CamScanner

Métodos de Gauss y de Gauss–Jordan

En general, existen dos métodos para resolver un S.E.L.:

- Si reducimos la matriz aumentada a la forma escalonada, resolvemos para la última incógnita y aplicamos sustitución regresiva para resolver las otras incógnitas, estamos aplicando el método de eliminación de Gauss.

- Si reducimos la matriz aumentada del sistema a la forma escalonada reducida, estamos aplicando el método de Gauss–Jordan.

Al resolver un S.E.L. puede ocurrir que éste tenga al menos una solución o que la solución no exista. De aquí que es importante reconocer un S.E.L. de acuerdo al tipo de solución que posee. Esto se define a continuación.

Definición 6.11 (S.E.L. Consistentes e Inconsistentes)

Un S.E.L. que tiene solución se dice que es consistente, si y sólo si:

- Tiene solución única, o
- Tiene infinitas soluciones

Si el S.E.L. no tiene solución se dice que es inconsistente.

Para poder identificar el tipo de solución del S.E.L. aplicando el método de Gauss, se debe analizar regresivamente las últimas filas de la matriz aumentada, una vez reducida. En este análisis puede ocurrir que:

- Si la última ecuación tiene la forma $x_n = k$, $\forall k \in \mathbb{R}$, el S.E.L. tiene solución única.
- Si la última ecuación tiene la forma $0x_n = k$, donde k es un número real diferente de cero, el S.E.L. no tiene solución ya que la proposición dada es siempre falsa.
- Si la última ecuación tiene la forma $0x_n = 0$, el S.E.L. tiene infinitas soluciones y x_n es una variable libre, ya que esta última expresión es siempre una proposición verdadera para cualquier x_n real. Esto es válido, siempre y cuando no se presente alguna inconsistencia con las ecuaciones previas y el número de incógnitas sea mayor al número de ecuaciones.

Ejemplo 6.39 S.E.L consistente con solución única.

Sean $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathrm{Re}_z = \mathbb{R}$, obtenga el conjunto de verdad del predicado:

$$p(x,y,z): \begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1(-2)+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ -3 & 2 & -2 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(3)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & -4 & 7 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2\left(\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2(4)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

De la última fila de la matriz escalonada se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} (0)x+(0)y+(1)z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Por sustitución regresiva, en la segunda fila:

$$\begin{aligned} (1)y+(-1)z &= -2 \\ y-z &= -2 \\ y &= z-2 \\ y &= 1-2 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Y en la primera fila:

$$\begin{aligned} (1)x+(-2)y+3z &= 7 \\ x-2y+3z &= 7 \\ x &= 2y-3z+7 \\ x &= 2(-1)-3(1)+7 \\ x &= -2-3+7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Comprobando para cada ecuación del S.E.L. original:

$$\begin{aligned} (2)-2(-1)+3(1) &= 2+2+3 = 7 \\ 2(2)+(-1)+(1) &= 4-1+1 = 4 \\ -3(2)+2(-1)-2(1) &= -6-2-2 = -10 \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

El conjunto de verdad del predicado $p(x, y, z)$ es:

$Ap(x, y, z) = \{(x, y, z) / (x = 2) \wedge (y = -1) \wedge (z = 1)\}$

$Ap(x, y, z) = \{(2, -1, 1)\}$

Ejemplo 6.40 S.E.L. consistente con infinitas soluciones.

Sean $Re_x = Re_y = Re_z = \mathbb{R}$, resuelva:

$$p(x, y, z): \begin{cases} -x + y + z = -1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & -1 \\ -1 & 2 & -3 & | & -4 \\ 3 & -2 & -7 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ -1 & 2 & -3 & | & -4 \\ 3 & -2 & -7 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4 & | & -3 \\ 3 & -2 & -7 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1(-3) + f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4 & | & -3 \\ 0 & 1 & -4 & | & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2(-1) + f_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -4 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

De la última fila de la matriz escalonada se obtiene la siguiente ecuación:

$(0)x + (0)y + (0)z = 0$

$z = t \; ; \; t \in \mathbb{R}$ (t es una variable libre)

Por sustitución regresiva:

$$\begin{aligned} y - 4z &= -3 \\ y - 4t &= -3 \\ y &= -3 + 4t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y - z &= 1 \\ x &= 1 + y + z \\ x &= 5t - 2 \end{aligned}$$

El conjunto de verdad del predicado $p(x, y, z)$, es:

$Ap(x, y, z) = \{(x, y, z)/(x = 5t - 2) \wedge (y = 4t - 3) \wedge (z = t), \forall t \in \mathbb{R}\}$

$Ap(x, y, z) = \{(5t - 2, 4t - 3, t)/\forall t \in \mathbb{R}\}$

Ejemplo 6.41 S.E.L. consistente con infinitas soluciones.

Sean $Re_x = Re_y = Re_z = Re_w = \mathbb{R}$, resuelva:

$$p(x, y, z, w): \begin{cases} 2x + 6y - 4z + 2w = 4 \\ x - z + w = 5 \\ -3x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Solución:

Note que en este ejemplo, la cantidad de incógnitas (4) es mayor que la cantidad de ecuaciones (3).

La matriz aumentada es de dimensión 3x5 y llevándola a su forma escalonada tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 2 & | & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 5 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 5 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1(-1)+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & | & 3 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1(3)+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 11 & -8 & 3 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & | & -1 \\ 0 & 11 & -8 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2(-11)+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 3 & | & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3\left(-\frac{3}{13}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{13} & | & -\frac{45}{13} \end{pmatrix}$$

De la última fila de la matriz escalonada se obtiene la siguiente ecuación:

$$(1)\ z-\left(\frac{9}{13}\right)w=-\left(\frac{45}{13}\right)$$

Si hacemos:

$w = t;\ t \in \mathbb{R}$ (t es una variable libre)

Reemplazando en la última ecuación, tenemos:

$$z=\frac{9}{13}w-\frac{45}{13}$$

$$z=\frac{9}{13}t-\frac{45}{13}$$

Por sustitución regresiva:

$$(1)\ y-\left(\frac{1}{3}\right)z=-1$$

$$y=\frac{1}{3}z-1=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{13}t-\frac{45}{13}\right)-1$$

Scanned by CamScanner

$$y = \frac{3}{13}t - \frac{15}{13} - 1$$

$$y = \frac{3}{13}t - \frac{28}{13}$$

$$x + 3y - 2z + w = 2$$

$$x = -3y + 2z - w + 2$$

$$x = -3\left(\frac{3}{13}t - \frac{28}{13}\right) + 2\left(\frac{9}{13}t - \frac{45}{13}\right) - t + 2$$

$$x = -\frac{9}{13}t + \frac{84}{13} + \frac{18}{13}t - \frac{90}{13} - t + 2$$

$$x = -\frac{4}{13}t + \frac{20}{13}$$

El conjunto de verdad del predicado $p(x, y, z, w)$, es:

$$Ap(x, y, z, w) = \left\{(x, y, z, w) / \left(x = -\frac{4}{13}t + \frac{20}{13}\right) \wedge \left(y = \frac{3}{13}t - \frac{28}{13}\right) \wedge \left(z = \frac{9}{13}t - \frac{45}{13}\right) \wedge (w = t), \forall t \in \mathbb{R}\right\}$$

$$Ap(x, y, z, w) = \left\{\left(-\frac{4}{13}t + \frac{20}{13}, \frac{3}{13}t - \frac{28}{13}, \frac{9}{13}t - \frac{45}{13}, t\right) / \forall t \in \mathbb{R}\right\}$$

Ejemplo 6.42 S.E.L. inconsistente.

Sean $Re_x = Re_y = Re_z = \mathbb{R}$, resuelva:

$$p(x, y, z): \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1(-2)+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1(-3)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_2\left(\frac{1}{5}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2(-5)+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Scanned by CamScanner

De la última fila de la matriz escalonada se obtiene la siguiente ecuación:

$$(0)x + (0)y + (0)z = -3$$

La cual constituye una proposición falsa para cualquier valor de x, y, z real.

Por lo tanto:

$$Ap(x, y, z) = \varnothing$$

Ejemplo 6.43 S.E.L. inconsistente.

Sean $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathrm{Re}_z = \mathbb{R}$, resuelva:

$$p(x, y, z): \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 4x - 2y + 2z = 3 \\ -2x + y - z = -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 1 \\ 4 & -2 & 2 & | & 3 \\ -2 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 4 & -2 & 2 & | & 3 \\ -2 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1(-4)+f_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ -2 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1(2)+f_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos notar que las filas 2 y 3 de la matriz tienen situaciones contradictorias.

$$(0z = 0) \wedge (0z = 1)$$

No existen valores de z que satisfagan ambas ecuaciones lineales, por lo tanto:

$$Ap(x, y, z) = \varnothing$$

Ejemplo 6.44 Sistemas de ecuaciones lineales.

Justificando su respuesta, determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

"Si un sistema de ecuaciones lineales tiene la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas, entonces es posible determinar una solución".

Scanned by CamScanner

Solución:

Con base en lo estudiado previamente, es posible estructurar el siguiente contraejemplo para un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:

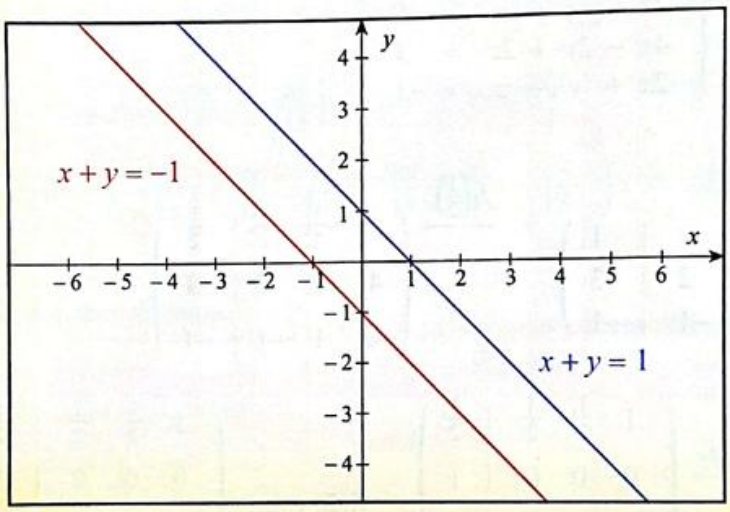
$$\begin{aligned} x+y&=1\\ x+y&=-1 \end{aligned}$$

Desde el punto de vista algebraico, se multiplica la segunda ecuación por el número real (-1) y se la suma a la primera ecuación, llegando a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} x+y&=1\\ x+y&=-1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad 0=2$$

Lo cual como se sabe, no es posible.

Desde el punto de vista gráfico, se trata de dos rectas paralelas:



Siendo así, no es posible determinar una solución para el S.E.L.

$\therefore$ La proposición es falsa.

Ejemplo 6.45 Condiciones para un sistema de ecuaciones lineales.

Determine, de ser posible, los valores de a y b para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 4\\ -x_1 - 3x_2 + ax_3 = 2b \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

a) Sea inconsistente.
b) Tenga solución única.
c) Tenga infinitas soluciones.

Solución:

Realizando la reducción correspondiente, se tiene:

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & a & 2b \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 7 & -5 & -5 \\ 0 & 7 & -5 & -5 \\ 0 & -7 & 2a+1 & 4b+1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 7 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2a-4 & 4b-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Para que el sistema sea inconsistente: $a=2 \wedge b \neq 1$
b) Para que tenga solución única: $a \neq 2 \wedge b \in \mathbb{R}$
c) Para que tenga infinitas soluciones: $a=2 \wedge b=1$

Así como se ha utilizado el método de Gauss en varios ejemplos de este capítulo, también podemos utilizar el método de Gauss–Jordan para determinar de manera directa las soluciones, sin aplicar sustitución regresiva.

Otra forma de resolver un S.E.L., es empleando la representación matricial, de la siguiente manera:

$AX = B$	Representación matricial del S.E.L.
$A^{-1}AX = A^{-1}B$	Multiplicación por izquierda de la inversa A^{-1}
$IX = A^{-1}B$	Propiedad de la inversa
$X = A^{-1}B$	Solución del S.E.L.

Scanned by CamScanner

Esta última expresión nos sugiere que la matriz de las incógnitas X del S.E.L. puede ser determinada multiplicando la inversa de la matriz de los coeficientes A por la matriz de los términos independientes B. En este caso, si $det(A) \neq 0$ el sistema tiene solución única.

Por el contrario, si la matriz A no es inversible $(det\ (A) = 0)$, se puede concluir que el S.E.L. es inconsistente o tiene infinitas soluciones.

Adicional a estos dos métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, existe la regla de Cramer que se aplica cuando la matriz A es inversible, tal como se explica a continuación.

Regla de Cramer

Para un S.E.L. de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya forma es:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

sus soluciones están dadas por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

siempre que: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Para un S.E.L. de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya forma es:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

sus soluciones están dadas por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

siempre que el determinante de la matriz de coeficientes que está presente en cada denominador sea diferente de cero.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.46 Aplicación de la regla de Cramèr.

Sean $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathrm{Re}_z = \mathbb{R}$, resuelva:

$$p(x,y,z): \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

Solución:

La matriz aumentada del sistema sería:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & -7 \\ -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -7 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3(12-2)-2(21-4)-1(-14+16)}{1(12-2)-2(-6+2)-1(4-8)} = -\frac{66}{22} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1(21-4)+3(-6+2)-1(8-14)}{22} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -7 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1(-16+14)-2(8-14)-3(4-8)}{22} = \frac{22}{22} = 1$$

$$Ap(x,y,z) = \left\{\left(-3, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}$$

Scanned by CamScanner

En general, para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

con la regla de Cramer, la incógnita x_j puede obtenerse así:

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Note que el arreglo del numerador es igual al del denominador, excepto por la columna j, cuyos coeficientes son reemplazados por los términos independientes del sistema.

En algunos problemas prácticos se hace necesario plantear el S.E.L. y luego resolverlo, tal como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.47 Planteo de un sistema de ecuaciones lineales.

Dada la matriz A, determine los valores reales de a, b y c para que esta matriz sea simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a+b+c & 2a+3b-c \\ 4 & -2 & 4a+b+2c \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Para que la matriz A sea simétrica se debe cumplir que:

$$(a_{12} = a_{21}) \wedge (a_{13} = a_{31}) \wedge (a_{23} = a_{32})$$

Se plantea el siguiente S.E.L.:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 2a + 3b - c = 1 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

La matriz aumentada del S.E.L. es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-4f_1+f_3]{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{3f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right)$$

$$-11c = -33 \qquad b - 3c = -7 \qquad a + b + c = 4$$
$$c = 3 \qquad b = 3c - 7 \qquad a = 4 - b - c$$
$$b = 3(3) - 7 \qquad a = 4 - 2 - 3$$
$$b = 2 \qquad a = -1$$

Con los valores determinados, se comprueba que la matriz A es simétrica:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 3 & -1+2+3 & 2(-1)+3(2)-3 \\ 4 & -2 & 4(-1)+(2)+2(3) \\ 1 & 4 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Ejemplo 6.48 Problema de planteo de un sistema de ecuaciones.

Dos buses llevan 100 pasajeros en total. Si del bus con más pasajeros se trasladan los 2/7 de ellos al otro bus, ambos tendrían el mismo número de pasajeros. Con el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales, determine la cantidad de pasajeros de cada bus.

Solución:

Sean las variables:

x: Número de pasajeros en el bus de mayor cantidad de pasajeros (bus 1).
y: Número de pasajeros en el bus de menor cantidad de pasajeros (bus 2).

Scanned by CamScanner

Se cumple que:

$$x + y = 100$$

Y también que:

$$x - \frac{2}{7}x = y + \frac{2}{7}x$$

$$x - \frac{4}{7}x = y$$

$$\frac{3}{7}x = y$$

$$3x = 7y$$

$$3x - 7y = 0$$

El S.E.L. sería:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 3x - 7y = 0 \end{cases}$$

Por simplicidad se reemplaza $y = \frac{3}{7}x$ en la primera ecuación.

$$x + \frac{3}{7}x = 100$$

$$\frac{10}{7}x = 100$$

$$x = 70$$

$$y = 100 - x$$

$$y = 100 - 70$$

$$y = 30$$

Por lo que, inicialmente el bus 1 tenía 70 pasajeros; y, el bus 2, 30 pasajeros.

Ejemplo 6.49 Problema de planteo de un sistema de ecuaciones.

Sea la función cuadrática $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + 2$. Si se conoce que $f(1) = 3$ y $f(2) = 8$, determine de ser posible, los valores reales de a y b para la regla de correspondencia de f.

Solución:

Se evalúa f en $x = 1$ y $x = 2$:

$$f(1) = a + b + 2 = 3$$
$$f(2) = 4a + 2b + 2 = 8$$

Se obtiene el siguiente S.E.L.:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Se aplica el método de sustitución para resolver el S.E.L.:

$$a = 1 - b$$
$$4(1-b) + 2b = 6 \rightarrow 4 - 4b + 2b = 6 \rightarrow b = -1 \rightarrow a = 2$$

Por lo tanto, con los valores de a y b obtenidos, la regla de correspondencia f es:

$$f(x) = 2x^2 - x + 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 6.50 Problema de planteo de un sistema de ecuaciones.

Sully tiene blusas, faldas y shorts. Sin contar las blusas, tiene 24 prendas de vestir; sin contar las faldas, tiene 36 prendas de vestir; y, sin contar los shorts, tiene 28 prendas de vestir. Determine el número de blusas, el número de faldas y el número de shorts que tiene Sully.

Solución:

Sean las variables:

b: cantidad de blusas.
f: cantidad de faldas.
s : cantidad de shorts.

Se plantea el siguiente S.E.L. :

$$\begin{cases} f + s = 24 \\ b + s = 36 \\ b + f = 28 \end{cases}$$

La matriz aumentada del sistema, considerando la terna (b, f, s), es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 24 \\ 1 & 0 & 1 & 36 \\ 1 & 1 & 0 & 28 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \\ 1 & 0 & 1 & 36 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 28 \\ 0 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 32 \end{array}\right)$$

$$2s = 32 \qquad f + s = 24 \qquad b + f = 28$$
$$s = 16 \qquad f = 24 - 16 \qquad b = 28 - 8$$
$$f = 8 \qquad b = 20$$

$\therefore$ Sully tiene 20 blusas, 8 faldas y 16 shorts.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.51 Problema de planteo de un sistema de ecuaciones.

El gerente de una empresa acaba de regresar de su viaje por Europa. El contador de la empresa le ha pedido un informe de su viaje y el gerente dice no recordar con exactitud los días de permanencia en cada país, enviando la siguiente tabla con el costo diario (en dólares) de: hospedaje, comida y movilización en cada país en la que se incluyen además los gastos totales de cada rubro.

	España	Alemania	Francia	Total
Hospedaje	30	20	20	340
Comida	20	30	20	320
Movilización	10	10	10	140

Con los datos entregados por el gerente, determine los días que él estuvo en cada país.

Solución:

Se definen las variables:

x: cantidad de días de permanencia en España.
y: cantidad de días de permanencia en Alemania.
z: cantidad de días de permanencia en Francia.

Por tanto, las ecuaciones que representan los costos de hospedaje, alimentación y movilización respectivamente son:

$$\begin{cases} 30x + 20y + 20z = 340 \\ 20x + 30y + 20z = 320 \\ 10x + 10y + 10z = 140 \end{cases}$$

Para efectos de reducir cálculos, se multiplica por $\frac{1}{10}$, ambos miembros de las 3 ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 34 \\ 2x + 3y + 2z = 32 \\ x + y + z = 14 \end{cases}$$

La matriz aumentada del S.E.L es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 34 \\ 2 & 3 & 2 & 32 \\ 1 & 1 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & 2 & 32 \\ 3 & 2 & 2 & 34 \end{array}\right) \xrightarrow[-3f_1+f_3]{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

Scanned by CamScanner

Por lo tanto:

$y = 4$

$-y - z = -8$
$z = -y + 8$
$z = -4 + 8$
$z = 4$

$x + y + z = 14$
$x = 14 - y - z$
$x = 14 - 4 - 4$
$x = 6$

En consecuencia, el gerente estuvo:

- 6 días en España
- 4 días en Alemania, y
- 4 días en Francia.

A partir del estudio de sistemas de ecuaciones lineales podemos a manera de conclusión, referirnos a importantes consideraciones válidas para su resolución, tal como se resume en el teorema siguiente:

Teorema 6.4

Sea A una matriz de orden $n \times n$, entonces las cuatro afirmaciones siguientes son equivalentes, es decir, cada una de ellas implica las otras tres (de manera que si se cumple una, todas se cumplen, y si una es falsa, todas son falsas).

a) A es inversible.

b) La única solución al sistema homogéneo $AX = 0$ es la solución trivial ($X = 0$).

c) A es equivalente por renglones a la matriz identidad $I_{n \times n}$, lo cual significa que la forma escalonada reducida por renglones de A es $I_{n \times n}$.

d) $det\,(A) \neq 0$.

Scanned by CamScanner

1) Represente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial:

a) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3y+2x=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a-b+c=2 \\ 3-a=9c \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+2x_2=4 \\ x_1+x_3+2x_2=2 \\ x_1=x_2 \end{cases}$

2) Considere $Re_x = Re_y = Re_z = \mathbb{R}$ y el S.E.L. del literal c) del ejercicio anterior.

a) Obtenga la solución del sistema utilizando el método de Gauss.

b) Obtenga la solución del sistema utilizando otro método.

Scanned by CamScanner

3) Una empresa produce tres clases de artículos: x_1, x_2 y x_3 en sus fábricas A, B y C. Los costos de producción por unidad (en dólares) vienen dados por la matriz:

	x_1	x_2	x_3
Fábrica A	0.50	0.10	0.20
Fábrica B	0.40	0.20	0.40
Fábrica C	0.60	0.30	0.30

Si los costos totales de producción diaria son: \$75 para la fábrica A, \$90 para la fábrica B; y, \$120 para la fábrica C, calcule el número de unidades que se producen en cada fábrica.

Scanned by CamScanner

6.6 Sistemas de ecuaciones no lineales (S.E.N.L.)

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Resolver un sistema de ecuaciones no lineales empleando métodos de eliminación o sustitución.
- Inspeccionar gráficamente las soluciones de un sistema de ecuaciones no lineales con dos incógnitas.
- Resolver un sistema de ecuaciones no lineales empleando cambios de variable adecuados para su linealización.

No existe un método específico para resolver un S.E.N.L. Sin embargo, considere lo siguiente:

- Si el sistema consta de dos ecuaciones con dos incógnitas, se pueden construir las gráficas de las ecuaciones en el plano cartesiano. Al hacer tal graficación, podemos tener una idea de la cantidad de soluciones del sistema y su ubicación en el plano. Tal como se dijo en la sección anterior, la solución a este tipo de sistemas estará conformada por aquellos puntos comunes a ambas gráficas.
- Al resolver analíticamente este tipo de sistemas, es necesario verificar la presencia de soluciones extrañas en el desarrollo algebraico.

Ejemplo 6.52 Sistema de ecuaciones no lineales.

Sean $\text{Re}_x = \text{Re}_y = \mathbf{R}$, resuelva:

$$p(x,y): \begin{cases} xy = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Solución:

Consideramos dos métodos de resolución: algebraico y gráfico.

a) Método algebraico:

$y = 2x + 1$ (I)

$xy = 1$ (II)

Reemplazando (I) en (II):

$x(2x + 1) = 1$

$2x^2 + x - 1 = 0$

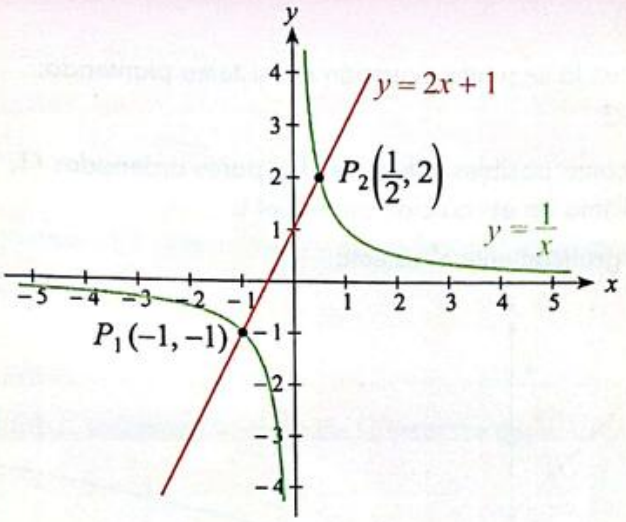
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \quad \therefore \quad x_1 = -1 \Leftrightarrow y_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y_2 = 2$$

Scanned by CamScanner

b) Método gráfico:



Comprobando:

$$p(-1,-1):\begin{cases}(-1)(-1)=1\\ -1=2(-1)+1\end{cases}$$

$$\therefore p(-1,-1)\equiv 1$$

$$p\left(\frac{1}{2},2\right):\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)(2)=1\\ 2=2\left(\frac{1}{2}\right)+1\end{cases}$$

$$\therefore p\left(\frac{1}{2},2\right)\equiv 1$$

Por lo tanto, $Ap(x,y)=\left\{(-1,-1),\left(\frac{1}{2},2\right)\right\}$

Ejemplo 6.53 Sistema de ecuaciones no lineales.

Sean $Re_x = Re_y = \mathbf{R}$, resuelva:

$$p(x,y):\begin{cases} y &= \sqrt{x}\\ y &= 2-x\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Solución:

Igualando ambas ecuaciones:

$\sqrt{x} = 2 - x$

$x = 4 - 4x + x^2$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

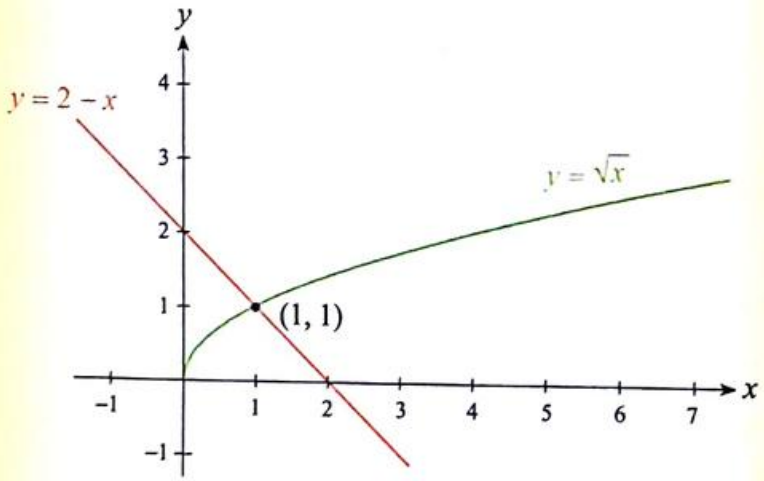
$(x = 1) \vee (x = 4)$

Reemplazando en la segunda ecuación del sistema planteado:

$y = 1 \quad \vee \quad y = -2$

Obteniéndose como posibles soluciones los pares ordenados (1, 1) y (4, –2); sin embargo éste último no es solución del S.E.N.L.

Representando gráficamente el sistema:



Comprobando:

$p(1,1): \begin{cases} 1 = \sqrt{1} \\ 1 = 2 - 1 \end{cases}$

$\therefore p(1,1) \equiv 1$

Por lo tanto, $Ap(x, y) = \{(1, 1)\}$.

Ejemplo 6.54 Sistema de ecuaciones no lineales.

Sean $Re_x = Re_y = \mathbb{R}^+$ y $p(x, y): \begin{cases} log\,(3x+5) - log\,(y) = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$, determine $Ap(x, y)$.

Solución:

De la primera ecuación y aplicando la definición de logaritmo de un cociente, tenemos:

$log\,(3x + 5) - log\,(y) = 1$

Scanned by CamScanner

$$log\left(\frac{3x+5}{y}\right)=1$$

Luego, cambiando la expresión logarítmica a su exponencial equivalente:

$$10=\left(\frac{3x+5}{y}\right)$$
$$3x+5=10y$$
$$3x-10y=-5$$

Finalmente construimos un sistema de ecuaciones lineales equivalente:

$$\begin{cases} 3x-10y=-5 \\ 3x-2y=3 \end{cases}$$

Si resolvemos el S.E.L. utilizando la regla de Cramer, se tiene:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{10+30}{-6+30}=\frac{40}{24}=\frac{5}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -10 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{9+15}{-6+30}=\frac{24}{24}=1$$

Comprobando:

$$p\left(\frac{5}{3},1\right):\begin{cases} log\left[3\left(\frac{5}{3}\right)+5\right]-log\,(1)=1 \\ 3\left(\frac{5}{3}\right)-2\,(1)=3 \end{cases}$$

$$p\left(\frac{5}{3},1\right):\begin{cases} log\,(10)-log\,(1)=1 \\ 5-2=3 \end{cases}$$

$$\therefore p\left(\frac{5}{3},1\right)\equiv 1$$

Por lo tanto, $Ap(x,y)=\left\{\left(\frac{5}{3},1\right)\right\}$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.55 Aplicación de sistema de ecuaciones no lineales.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -5 & -b \end{pmatrix}$ en la cual $a, b \in \mathbb{R}$ y el predicado $p(a, b)$: A es una matriz involutiva, determine $Ap(a, b)$:

Solución:

Si A es una matriz involutiva, debe cumplirse que $A^2 = I_{2\times 2}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -5 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ -5 & -b \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2-15 & 3a-3b \\ -5a+5b & -15+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde, aplicando la igualdad entre matrices, se construye el siguiente S.E.N.L.:

$$\begin{cases} a^2-15 = 1 \\ b^2-15 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 4 \\ b = \pm 4 \end{cases}$$

Por otra parte, se cumple también que:

$$\begin{cases} 3a - 3b = 0 \\ -5a + 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3b \\ 5a = 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = b \\ a = b \end{matrix}$$

Por lo tanto, los pares ordenados que satisfacen el predicado son:

$$(4, 4) \wedge (-4, -4)$$

Comprobando:

$$p(4, 4): \quad A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore p(4, 4) \equiv 1$

$$p(-4, -4): \quad A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore p(-4, -4) \equiv 1$

Con lo cual, se concluye que $Ap(a, b) = \{(4, 4), (-4, -4)\}$.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.56 Sistema de ecuaciones no lineales.

Sean $\text{Re}_x = \text{Re}_y = \mathbb{R}^+$ y $p(x, y)$: $\begin{cases} log^2(x+y) - 2\,log(x+y) + 1 = 0 \\ e^{2(x-2y)} - 2\,e^{x-2y} + 1 = 0 \end{cases}$, determine el conjunto de verdad $Ap(x, y)$.

Solución:

De la primera ecuación y aplicando el producto notable, tenemos:

$$log^2(x+y) - 2\,log(x+y) + 1 = 0$$
$$(log(x+y) - 1)^2 = 0$$
$$log(x+y) - 1 = 0$$
$$log(x+y) = 1$$

Luego, cambiando la expresión logarítmica a su exponencial equivalente:

$$x + y = 10^1$$
$$x + y = 10$$

De la segunda ecuación y aplicando el producto notable, tenemos:

$$e^{2(x-2y)} - 2\,e^{x-2y} + 1 = 0$$
$$(e^{x-2y} - 1)^2 = 0$$
$$e^{x-2y} - 1 = 0$$
$$e^{x-2y} = 1$$

Luego, cambiando la expresión exponencial a su logarítmica equivalente:

$$x - 2y = ln(1)$$
$$x - 2y = 0$$

Finalmente, construimos un sistema con las dos ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Si resolvemos el S.E.L. utilizando la regla de Cramer, se tiene:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}10 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-20}{-2-1}=\frac{-20}{-3}=\frac{20}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 10\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{-10}{-2-1}=\frac{-10}{-3}=\frac{10}{3}$$

Comprobando:

$$p\left(\frac{20}{3},\frac{10}{3}\right):\begin{cases}log^2\left(\frac{20}{3}+\frac{10}{3}\right)-2\,log\left(\frac{20}{3}+\frac{10}{3}\right)+1=0\\ e^{2\left(\frac{20}{3}-2\left(\frac{10}{3}\right)\right)}-2\,e^{\left(\frac{20}{3}-2\left(\frac{10}{3}\right)\right)}+1=0\end{cases}$$

$$p\left(\frac{20}{3},\frac{10}{3}\right):\begin{cases}log^2(10)-2\,log(10)+1=0\\ e^{2(0)}-2\,e^{0}+1=0\end{cases}$$

$$p\left(\frac{20}{3},\frac{10}{3}\right):\begin{cases}1-2+1=0\\ 1-2+1=0\end{cases}$$

$$\therefore\ p\left(\frac{20}{3},\frac{10}{3}\right)\equiv 1$$

Entonces:

$$Ap(x,y)=\left\{\left(\frac{20}{3},\frac{10}{3}\right)\right\}$$

Scanned by CamScanner

6.6 Sistemas de ecuaciones no lineales (S.E.N.L.)

Autoevaluación

1) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, determine el valor $t = a^2 + b^2$, si se cumple que:

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 4ab = \sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

Sugerencia: Utilice el producto notable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2) Sean $\text{Re}_x = \text{Re}_y = \mathbb{R}$, determine gráficamente el conjunto de verdad del predicado de dos variables.

$$p(x,y): \begin{cases} \pi\, y = arctan\,(x-1) \\ 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

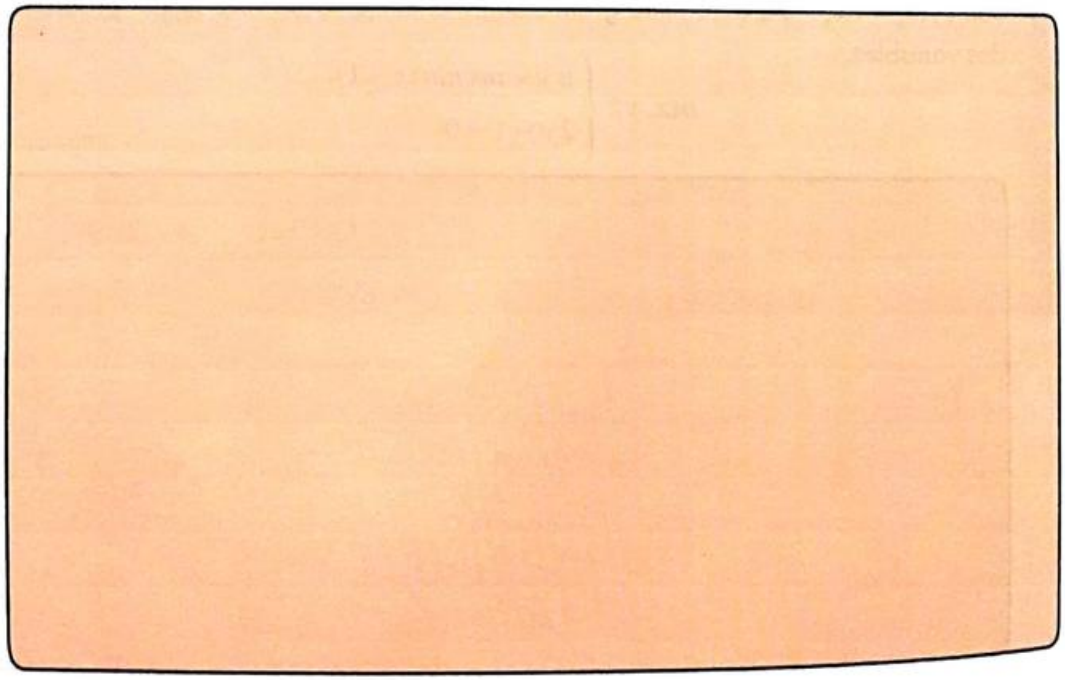
Scanned by CamScanner

3) Sean $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbb{R}$, determine analíticamente el conjunto de verdad del siguiente predicado de dos variables:

$$q(x,y): \begin{cases} x\left(x^2 + \dfrac{y^3}{x}\right) = -3xy(x+y) \\ x^3 - 2y^3 = 24 \end{cases}$$

4) Sean $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbb{R}^+$, obtenga la solución en forma analítica del siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 20 = 2^{2x-y} \\ ln(ex) - ln(y) = 1 \end{cases}$$



Scanned by CamScanner

6.7 Sistema de inecuaciones lineales (S.I.L.)

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dado un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas, resolverlo gráficamente empleando las reglas de sombreado y de frontera.
- Identificar la solución no vacía de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas, como una región acotada o no acotada.
- Plantear y resolver gráficamente problemas de programación lineal con dos variables.

Numerosos problemas en economía y la industria se plantean con el fin de tomar decisiones para minimizar gastos o maximizar beneficios, siempre sujetos a restricciones de distinta naturaleza, como son: capacidad de producción, stocks en el almacén, demanda del mercado, etc.

Alrededor de estos temas, una idea fundamental es la inecuación lineal. Una inecuación lineal divide al plano en dos regiones, una donde se satisface la desigualdad y la otra donde no se satisface. La parte correspondiente a la igualdad constituye la frontera entre las regiones.

Todos los puntos de una región que satisfacen simultáneamente las inecuaciones presentes en el sistema, conforman lo que se conoce como **conjunto factible**.

La solución de este tipo de sistemas, para órdenes bajos, es completamente gráfica, y los pasos a seguir son:

- Reemplazar el símbolo de desigualdad por el de igualdad y hacer la gráfica de la ecuación resultante. Si la desigualdad no incluye la frontera, se utiliza una línea segmentada, caso contrario, se utiliza una línea continua.
- Elegir un punto de prueba P a cada lado de la línea. Si las coordenadas de P satisfacen la desigualdad, entonces los demás puntos también la satisfacen. Esto se especifica sombreando dicha región.

Otra forma de determinar la región que representa al sistema de inecuaciones lineales, es:

- Expresar la variable y (o la variable x) en forma explícita.
- Graficar la frontera cambiando la desigualdad por una igualdad.
- Sombrear según indica la desigualdad, siguiendo las reglas:
  a) $y > f(x)$: Hacia arriba de la frontera.
  b) $y < f(x)$: Hacia abajo de la frontera.

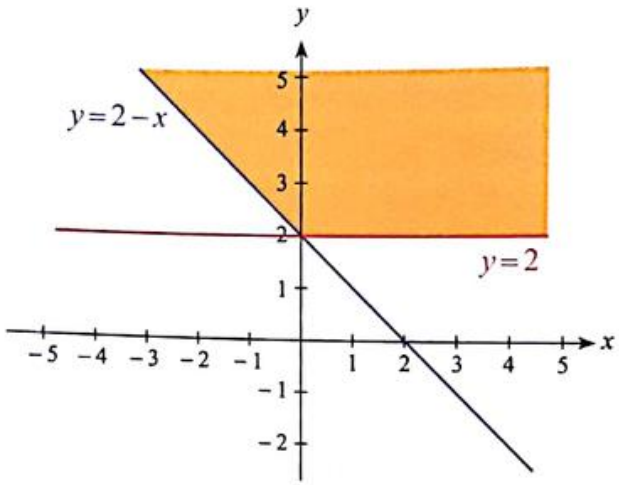
Scanned by CamScanner

c) $x > g(y)$: Hacia la derecha de la frontera.

d) $x < g(y)$: Hacia la izquierda de la frontera.

- Incluir la frontera en la solución si la desigualdad es de la forma $\geq$ o $\leq$.
- Identificar la intersección de las regiones sombreadas, la cual representa la solución del sistema.

Es importante recordar que las rectas de la forma $x = k$ o $y = k$ son rectas verticales u horizontales, respectivamente. Así tenemos que los límites de una región de inecuaciones pueden incluir expresiones como $y > k, y < k, x > k$ y $x < k$. En la siguiente figura se muestra la región solución al considerar $y \geq 2$ y $x + y \geq 2$.

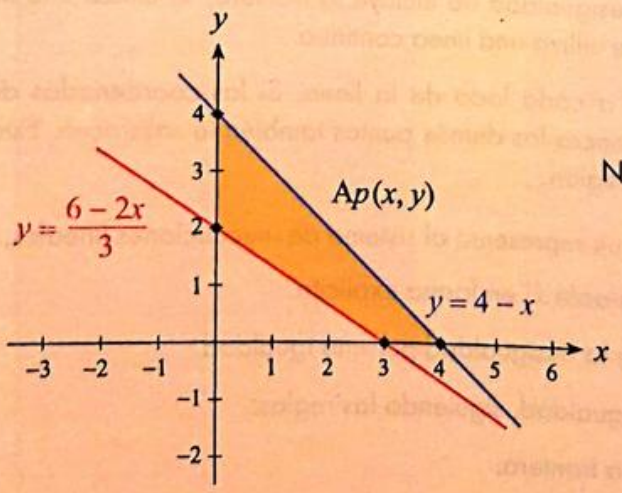


Ejemplo 6.57 Sistema de inecuaciones lineales.

Sean $\text{Re}_x = \text{Re}_y = \mathbf{R}$, resuelva:

$$p(x,y): \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$$

Solución:



Note que: $P_1(1, 2) \in Ap(x, y)$

$P_2(1, 1) \notin Ap(x, y)$

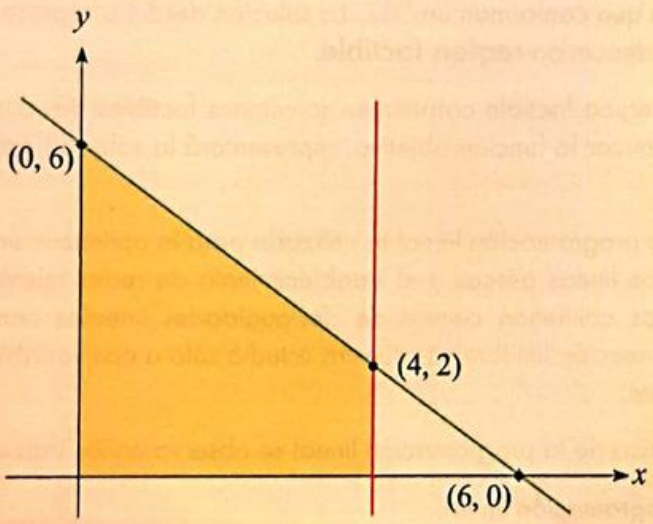
$P_3(3, 1) \in Ap(x, y)$

$P_4(4, 2) \notin Ap(x, y)$

Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.58 Sistema de inecuaciones lineales.

Dada la región sombreada, la cual representa el conjunto factible de un S.I.L., determine el sistema de desigualdades.



Solución:

La región sombreada se encuentra en el I cuadrante, entonces debe cumplirse que $x \geq 0, y \geq 0$.

La recta vertical $x = 4$ sugiere que la región que está a la izquierda de ella es parte del conjunto factible, se deduce entonces que $x \leq 4$.

La función lineal $y = 6 - x$ es la última referencia y está sombreada la parte inferior a su frontera, esto es, $y \leq 6 - x$.

Luego, el S.I.L. puede ser representado por:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Programación lineal

Desde el punto de vista histórico, la programación lineal surgió como una técnica para resolver problemas relacionados con la distribución de artículos y materiales para la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, durante la Segunda Guerra Mundial.

Los problemas de programación lineal están dirigidos a optimizar (maximizar o minimizar) una función conocida como función objetivo de la forma $f(x, y) = ax + by + c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, en la cual a y b no deben ser cero al mismo tiempo.

La antes referida función está sujeta a una serie de restricciones, expresadas por inecuaciones lineales, las mismas que conforman un S.I.L. La solución del S.I.L. representa una región del plano, a la cual se denomina **región factible**.

Los vértices de la región factible constituyen soluciones factibles básicas y de todos ellos, el que permite optimizar la función objetivo, representará la solución óptima del problema planteado.

En la actualidad, la programación lineal es utilizada para la optimización de la distribución de los vuelos de las líneas aéreas y el establecimiento de redes telefónicas. Aunque los problemas prácticos contienen cientos de desigualdades lineales con otros cientos de incógnitas, en esta sección limitaremos nuestro estudio sólo a dos variables para resolver el sistema gráficamente.

La aplicación práctica de la programación lineal se observa en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.59 Programación lineal.

El Gerente de Producción de una empresa se dispone a construir al menos 5 muestras de un tipo de mesas auxiliares, para luego probarlas y venderlas. El costo de cada mesa construida en madera es de \$18.00, y el de cada mesa construida en plástico es de \$9.00. Se desean por lo menos 2 mesas de cada tipo para entregarse dentro de las próximas 48 horas. Cada mesa construida en madera tarda 6 horas en producirse y una plástica tarda 3 horas. De acuerdo a esta información, determine la cantidad óptima de mesas de madera y plásticas que se deben construir para que el costo sea mínimo.

Solución:

Para esta situación, vamos a considerar:

x : cantidad de mesas de madera.
y : cantidad de mesas de plástico.

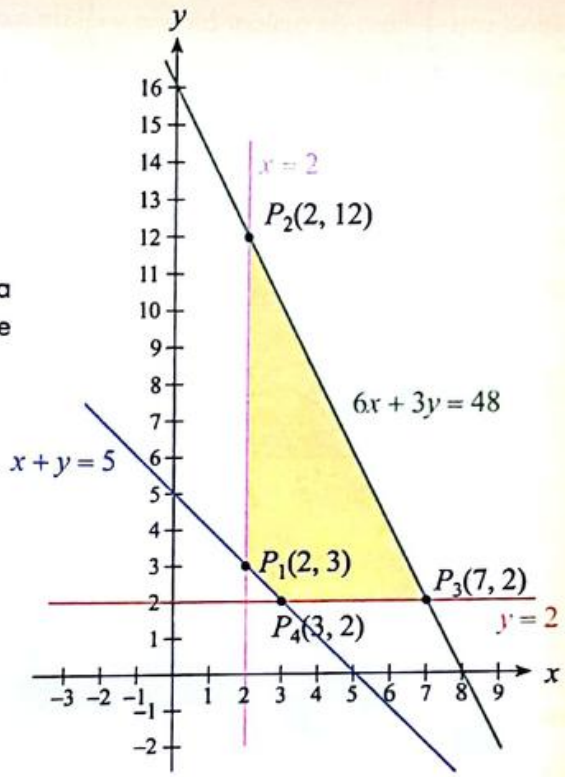
La función que se desea minimizar, también denominada función objetivo es $C = 18x + 9y$, cuyo valor estará expresado en dólares.

Esta función está condicionada a un conjunto de restricciones, que se pueden representar en un S.I.L., tal como se ilustra:

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 6x + 3y \leq 48 \\ x \geq 2 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

La representación gráfica del conjunto factible se muestra a continuación:



Los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 representan posibles valores extremos de la función objetivo. Evaluando cada uno tenemos:

Límite	Valor de la función objetivo
$P_1(2, 3)$	$C = (18)(2) + (9)(3) = 63$
$P_2(2, 12)$	$C = (18)(2) + (9)(12) = 144$
$P_3(7, 2)$	$C = (18)(7) + (9)(2) = 144$
$P_4(3, 2)$	$C = (18)(3) + (9)(2) = 72$

Por tanto, al construir 2 muestras de mesas de madera y 3 muestras de mesas plásticas, se generará un costo mínimo de \$63.00 para estos puntos extremos.

De acuerdo a la tabla, también se puede notar que construir 2 mesas de madera y 12 mesas plásticas genera el mismo costo que construir 7 mesas de madera y 2 mesas plásticas.

Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.60 Programación Lineal.

Una compañía decide comercializar dos tipos de azúcar: una mezcla de menor calidad con $\frac{1}{4}$ libra de azúcar blanca y $\frac{3}{4}$ libra de azúcar morena; y otra mezcla de mayor calidad con $\frac{1}{2}$ libra de azúcar blanca y $\frac{1}{2}$ de azúcar morena, obteniendo así una ganancia de \$0.60 por cada libra de mezcla de menor calidad y una ganancia de \$0.80 por cada libra de mezcla de mayor calidad.

Si se cuenta con 180 libras de azúcar morena y 160 libras de azúcar blanca, determine la cantidad de libras de cada tipo de mezcla que deben utilizarse para que la ganancia sea máxima.

Solución:

Consideremos:

x : cantidad de libras de la mezcla de menor calidad.

y : cantidad de libras de la mezcla de mayor calidad.

Si G representa la ganancia, es decir la función objetivo, tenemos:

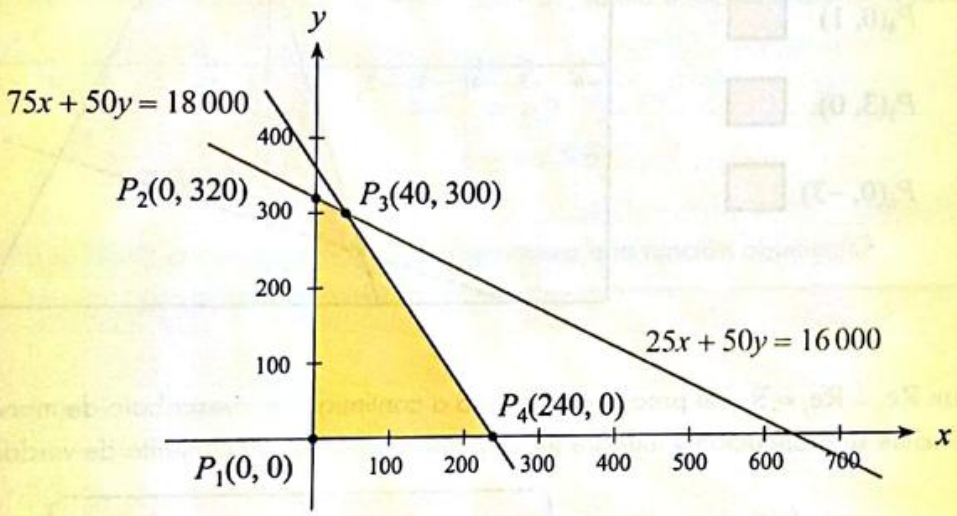
$$G = 0.60x + 0.80y$$

La función G está restringida por una serie de consideraciones, las mismas que se resumen en el siguiente S.I.L.

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0.25x + 0.50y \leq 160 \\ 0.75x + 0.50y \leq 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 25x + 50y \leq 16\,000 \\ 75x + 50y \leq 18\,000 \end{cases}$$

La representación gráfica del conjunto factible se muestra a continuación:



A continuación se presentan los valores de la función objetivo en los puntos extremos P_1, P_2, P_3 y P_4.

Límite	Valor de la función objetivo
$P_1(0, 0)$	$G = (0.60)(0) + (0.80)(0) = 0$
$P_2(0, 320)$	$G = (0.60)(0) + (0.80)(320) = 256$
$P_3(40, 300)$	$G = (0.60)(40) + (0.80)(300) = 264$
$P_4(240, 0)$	$G = (0.60)(240) + (0.80)(0) = 144$

Con lo que se concluye que cuando la compañía utilice 40 libras de la mezcla de menor calidad y 300 libras de la mezcla de mayor calidad de azúcar, obtendrá la mayor ganancia, la cual asciende a $264.00

Scanned by CamScanner

Autoevaluación

1) En el plano mostrado a continuación se ha sombreado una región, la cual representa el conjunto de verdad de un predicado $p(x, y)$. Coloque en cada casilla de la columna de la izquierda, un ✓ si el punto presentado pertenece al conjunto factible y una **X** si no.

a) $P_1(0, 0)$ ☐

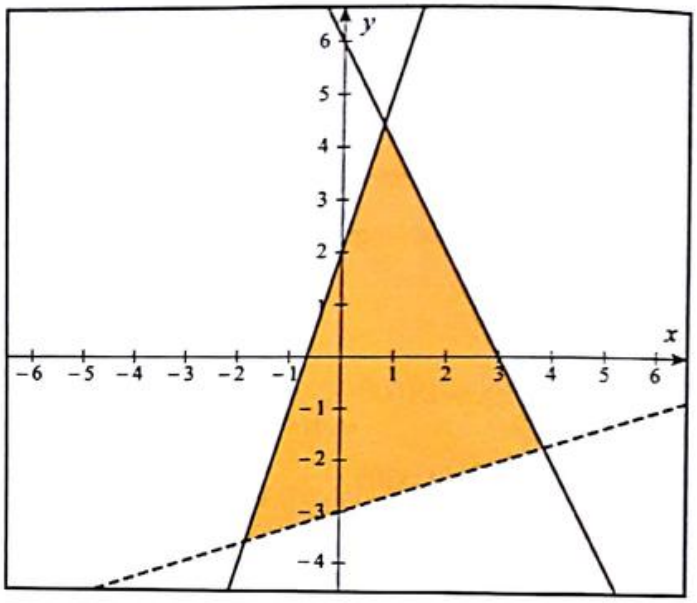
b) $P_2(4, 0)$ ☐

c) $P_3(1, 6)$ ☐

d) $P_4(0, 1)$ ☐

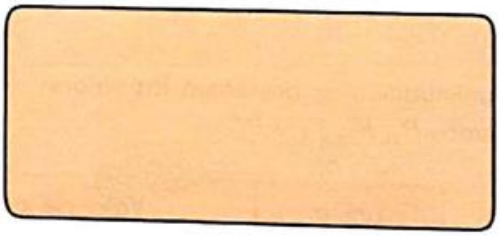
e) $P_5(3, 0)$ ☐

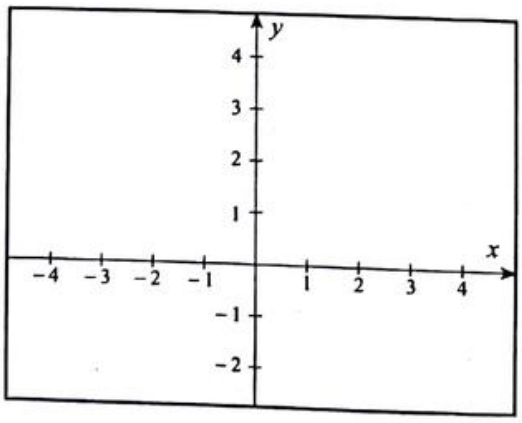
f) $P_6(0, -3)$ ☐



2) Sean $\text{Re}_x = \text{Re}_y = \mathbb{R}$ y el predicado descrito a continuación, reescríbalo de manera que se facilite su graficación y muestre en un plano cartesiano su conjunto de verdad.

$$p(x,y): \begin{cases} 0 < 2 - x \\ y - 1 \geq 0 \\ 3 > y \\ y + x \geq 2 \end{cases}$$





Scanned by CamScanner

3) Liste las coordenadas de 4 puntos que pertenezcan al conjunto de verdad $Ap(x, y)$ del ejercicio anterior y luego las coordenadas de 4 puntos que no pertenezcan al mismo.

Pertenecen a $Ap(x, y)$

No pertenecen a $Ap(x, y)$

4) Considere la función objetivo $G = 80 - 2x + 2y$, sujeta a las restricciones dadas por:

$$R: \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 2 \\ y + x \leq 6 \end{cases}$$

Determine el par ordenado (x, y) que maximiza a la función objetivo G.

Scanned by CamScanner

6.8 Sistemas de inecuaciones no lineales (S.I.N.L.)

Objetivos

Al finalizar esta sección el lector podrá:

- Dado un sistema de inecuaciones no lineales con dos incógnitas, resolverlo gráficamente empleando las reglas de sombreado y de frontera.
- Identificar la solución no vacía de un sistema de inecuaciones no lineales con dos incógnitas, como una región acotada o no acotada.

Tal como analizamos en secciones precedentes, para resolver este tipo de sistemas se considerará nuevamente la representación gráfica. La única diferencia es que las nuevas inecuaciones contienen expresiones con radicales, valor absoluto, polinómicas, racionales, expresiones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, con funciones especiales, etc.

Para determinar la región en el plano que represente la solución de todas las inecuaciones no lineales, se pueden aplicar las mismas reglas dadas para los sistemas de inecuaciones lineales, con la diferencia de que en estos problemas las fronteras pueden ser curvas o rectas.

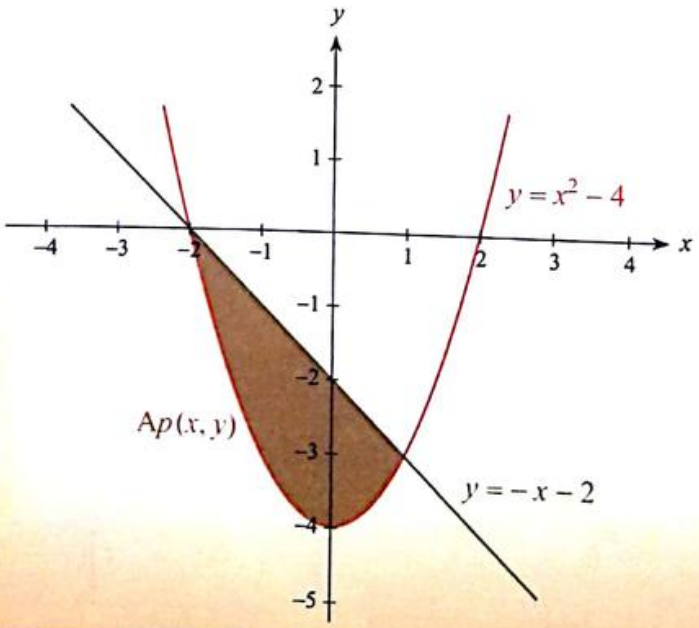
Ejemplo 6.61 Sistema de inecuaciones no lineales.

Sean $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbb{R}$, resuelva:

$$p(x,y): \begin{cases} y \geq x^2 - 4 \\ y \leq -x - 2 \end{cases}$$

Solución:

La representación gráfica de $Ap(x,y)$ es:



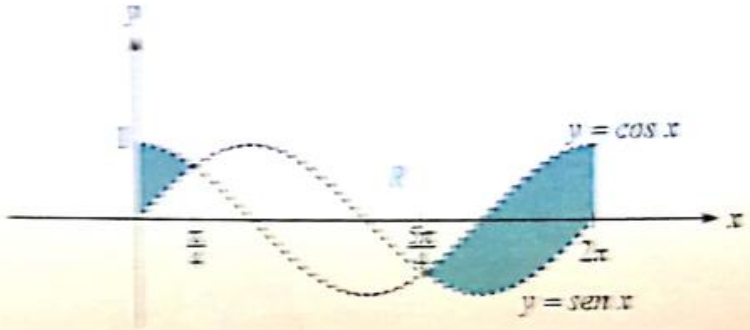
Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.62 Sistema de inecuaciones no lineales.

Representar gráficamente la región R definida por:

$$R = \{(x, y) / sen(x) < y < cos(x) \ ; \ \forall x \in [0, 2\pi]\}$$

Solución:



Ejemplo 6.63 Sistema de inecuaciones no lineales.

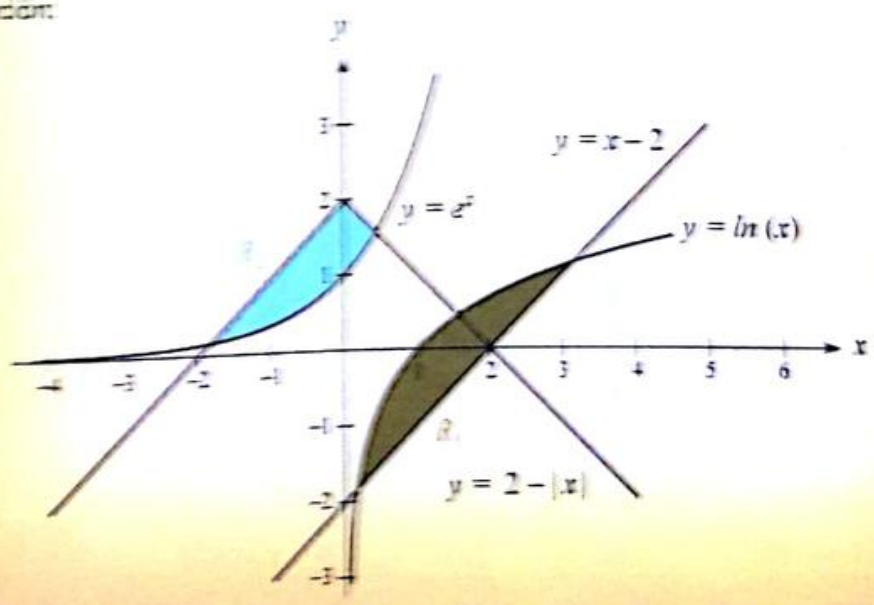
Representar gráficamente la región R definida por:

$R_1 = \{(x, y) / x - 2 \leq y \leq ln(x)\}$

$R_2 = \{(x, y) / e^x \leq y \leq 2 - |x|\}$

$R = R_1 \cup R_2$

Solución:



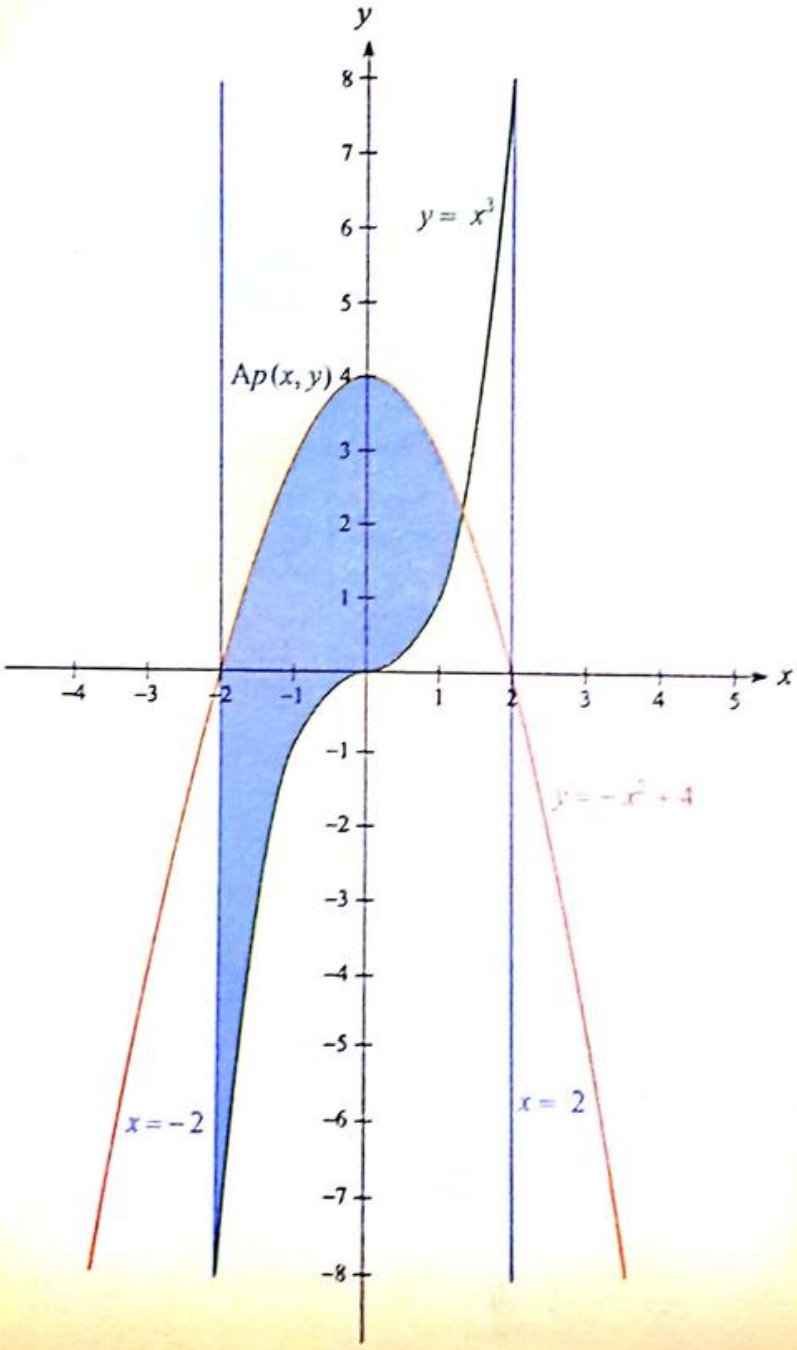
Scanned by CamScanner

Ejemplo 6.64 Sistema de inecuaciones no lineales.

Sea $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbf{R}$ y $p(x,y): \begin{cases} |x| \leq 2 \\ y \geq x^3 \\ y \leq 4 - x^2 \end{cases}$, determine gráficamente $Ap(x,y)$.

Solución:

La representación gráfica de $Ap(x,y)$ es:

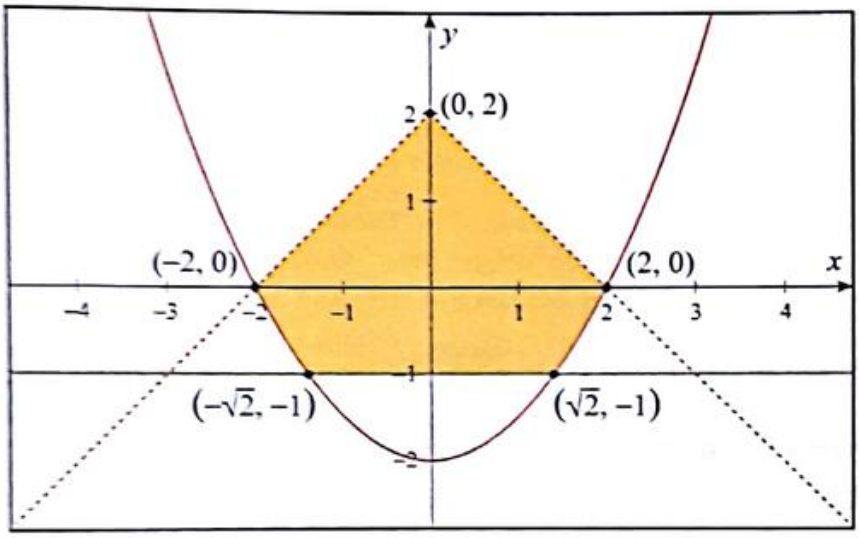


Scanned by CamScanner

6.8 Sistemas de inecuaciones no lineales (S.I.N.L)

Autoevaluación

1) Sean $Re_x = Re_y = \mathbb{R}$, defina un predicado de dos variables $p(x, y)$, cuyo conjunto de verdad esté representado por la región sombreada que se muestra en el plano cartesiano adjunto.



Scanned by CamScanner

2) Sean $Re_x = Re_y = \mathbb{R}$, se define el siguiente predicado de dos variables:

$$p(x, y): \begin{cases} x - 1 < y^2 \\ 2y < x \end{cases}$$

Califique como verdadera o falsa la proposición mostrada, justificando su respuesta:

"$\forall p(x, y) = \{(a, b) / a, b \in \mathbb{R}\}$"

3) Considere las siguientes relaciones graficadas en cada plano cartesiano:

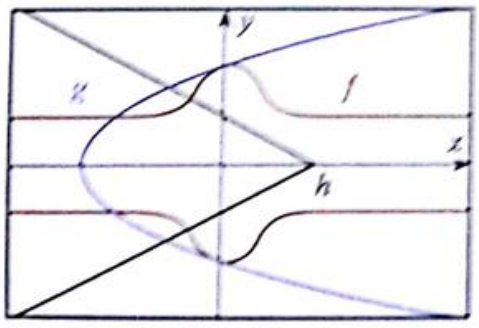
$$|y| = f(x), \quad x = g(y), \quad x = h(y)$$

Sombree las regiones R_1 y R_2 definidas a continuación en los planos cartesianos izquierdo y derecho, respectivamente:

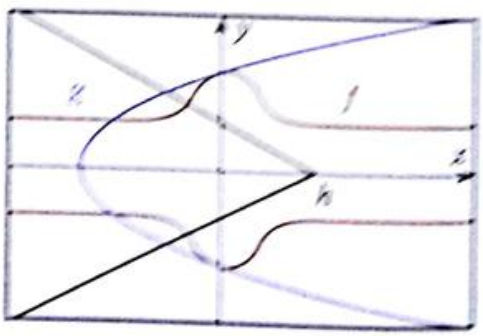
$$R_1 = \{(x, y) / (|y| \geq f(x)) \wedge (x \leq h(y)) \wedge (x \geq g(y))\}$$

$$R_2 = \{(x, y) / (|y| \leq f(x)) \wedge (x \geq g(y)) \wedge (x \leq h(y))\}$$

R_1



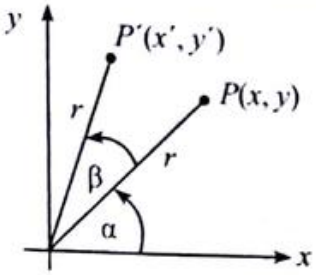
R_2



Scanned by CamScanner

Respuesta al desafío

a) Vamos a utilizar el plano cartesiano para dibujar el punto P. Sabemos por trigonometría cómo expresar las coordenadas de dicho punto en función de la medida del ángulo α que forma con el semieje X^+, así como del punto ya rotado.



$$x = r\,cos\,(\alpha)$$
$$y = r\,sen\,(\alpha)$$

$$x' = r\,cos\,(\beta + \alpha)$$
$$y' = r\,sen\,(\beta + \alpha)$$

Aplicamos identidades trigonométricas:

$$x' = r\,cos\,(\beta + \alpha) = r\,cos\,(\beta)\,cos\,(\alpha) - r\,sen\,(\beta)\,sen\,(\alpha) = x\,cos\,(\beta) - y\,sen\,(\beta)$$
$$y' = r\,sen\,(\beta + \alpha) = r\,sen\,(\beta)\,cos\,(\alpha) + r\,cos\,(\beta)\,sen\,(\alpha) = x\,sen\,(\beta) + y\,cos\,(\beta)$$

Se puede observar que el punto rotado P' se lo puede obtener con la matriz de rotación multiplicada por las coordenadas del punto original P:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\beta) & -sen(\beta) \\ sen(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

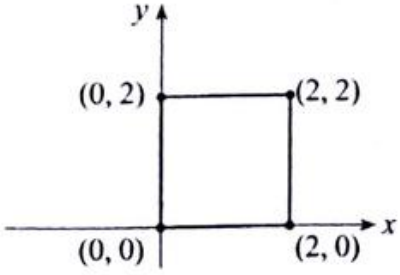
Entonces, la matriz de rotación solicitada es: $T = \begin{pmatrix} cos(\beta) & -sen(\beta) \\ sen(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix}$

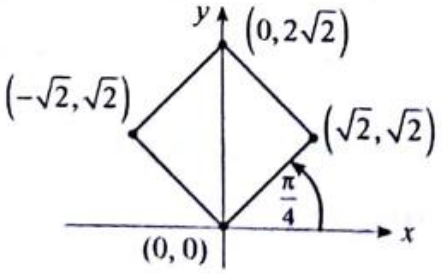
b) Al multiplicar la matriz de rotación T obtenida en el literal anterior por la matriz dada A y considerando la medida angular $\beta = \frac{\pi}{4}$, se tiene:

$$A' = TA = \begin{pmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ sen\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Los puntos en el plano cartesiano y la figura que forman, se muestran antes y después de la rotación:





Scanned by CamScanner

Ejercicios Propuestos

6.1 Definición y Clases ● ● ● • •

1) En el siguiente fragmento se da un concepto erróneo de matriz, identifique el error y reescriba el fragmento correctamente:

"Una matriz A es un arreglo rectangular de números reales, en donde cada elemento a_{ij} que pertenece a la matriz A tiene dos subíndices. El subíndice i representa la columna, y el subíndice j representa la fila, en las cuales se encuentra el elemento".

2) Para cada una de las siguientes matrices, determine a qué clase pertenece, especifique su dimensión y de ser posible, calcule su traza.

a) $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}\pi & 0 & 0\\ 0 & \pi+1 & 0\\ 0 & 0 & \pi+2\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

3) Si $A_{n\times n}$ es una matriz cuadrada, entonces se cumple que $n\times n$ es un número par.

a) Verdadero b) Falso

4) Para toda matriz diagonal, su traza es mayor que cero.

a) Verdadero b) Falso

Scanned by CamScanner

5) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. En el caso de las proposiciones falsas, reescríbalas para que sean verdaderas.

a) Una matriz fila es de orden $m \times 1$.
b) Una matriz columna es una matriz cuadrada de orden $m \times 1$.
c) La matriz rectangular es aquella que tiene diferentes números de columnas como de filas.
d) La matriz triangular superior es una matriz que cumple con la condición $a_{ij} = 0$ si $i > j$.
e) La matriz triangular inferior es una matriz que cumple con la condición $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

6) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones relacionadas con una matriz cuadrada:

a) Tiene diferente número de filas y de columnas.
b) Los elementos a_{ij}, que cumplen con la condición $i = j$, son elementos de la diagonal principal.
c) Los elementos a_{ij}, que cumplen con la condición $i + j = n + 1$, son elementos de la diagonal secundaria.
d) Su traza está dada por $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,(i+1)}$.
e) Siempre es diagonal.

7) Construya las matrices según la condición dada en cada literal:

a) $A_{3\times3}$, tal que $a_{ij} = i + j$
b) $B_{2\times2}$, tal que $b_{ij} = 2i - 2$
c) $C_{3\times3}$, tal que $c_{ij} = i! + j$
d) $D_{4\times4}$, tal que $d_{ij} = (i+j)^2$
e) $E_{2\times3}$, tal que $e_{ij} = i + j + 1$
f) $F_{4\times4}$, tal que $f_{ij} = \begin{cases} 2i + 2j, & i \leq j \\ 2i + 2j - 2, & i > j \end{cases}$
g) $G_{3\times3}$, tal que $g_{ij} = \begin{cases} i^{sgn(j)}, & i + j \text{ es par} \\ j^{sgn(i)}, & i + j \text{ no es par} \end{cases}$
h) $H_{4\times4}$, tal que $h_{ij} = \begin{cases} i^2 + i + 41, & i + j \text{ es primo} \\ 0, & i + j \text{ no es primo} \end{cases}$
i) $K_{3\times3}$, tal que $k_{ij} = sgn(i) + j - 2$

Scanned by CamScanner

8) Construya, de ser posible, una matriz $A_{m\times n}$ que cumpla con las siguientes condiciones:

- A es cuadrada.
- $mn - 2n - 3 = 0$; si $m, n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=1}^{m} a_{i1} = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} = \sum_{i=1}^{m} a_{i3} = 24$
- $\sum_{j=1}^{m} a_{1j} = \sum_{j=1}^{m} a_{2j} = \sum_{j=1}^{m} a_{3j} = 24$

9) Construya, de ser posible, una matriz $A_{m\times n}$ que cumpla con las siguientes condiciones:

- A es cuadrada.
- $m^2 - 2n - 3 = 0$; si $m, n \in \mathbb{N}$
- $\forall i; \forall j \; 1 \le a_{ij} \le 9, \; a_{ij} \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=1}^{m} a_{i1} = \sum_{i=1}^{m} a_{i2} = \sum_{i=1}^{m} a_{i3} = k$
- $\sum_{j=1}^{m} a_{1j} = \sum_{j=1}^{m} a_{2j} = \sum_{j=1}^{m} a_{3j} = k$
- $\sum_{i=1}^{m} a_{i(n-1-i)} = k$
- $\sum_{i=1}^{m} a_{ii} = k$
- $k = 15$

10) La matriz de Vandermonde es una matriz que presenta una progresión geométrica en cada fila. Los índices de la matriz de orden $n \times n$ están descritos por:

$$\forall i, j, k \in \mathbb{N} \;\; a_{ij} = k_i^{\,j-1}$$

a) Determine la matriz de Vandermonde con las siguientes características:

i) 2×2 con $k_1 = k_2 = 2$

ii) 3×3 con $k_1 = k_2 = k_3 = 3$

b) Si A es una matriz de Vandermonde de orden 100×100 y se conoce que:

$$k_{i-1} = k_i + 1; \; k_1 = 1$$

determine:

i) $\sum_{j=1}^{m} a_{1j}$

ii) $\sum_{j=1}^{m} a_{2j}$

Scanned by CamScanner

6.2 Operaciones con matrices ● ● ● • •

11) En el siguiente fragmento se da un concepto erróneo de suma de matrices, identifique el error y reescriba el fragmento correctamente:

"Dadas dos matrices del mismo orden $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$, se define la suma de matrices como una nueva matriz $C_{m\times n}$ del mismo orden, $C = A + B$, tal que: $\forall i\ \forall j\ (c_{ij} = a_{ji} + b_{ji})$".

12) Sean las matrices A y B; y, la función $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tal que $f(x) = (x-1)(x-2)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -1 & f(1) \\ 1 & a_{22} & f(0) \\ sgn(m) & sgn(n) & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & f(1) & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

determine los elementos de A y B para que se cumpla la igualdad matricial $A = 2B$.

13) Considere las siguientes matrices y funciones de variable real:

$$A = \begin{pmatrix} g(1) & 2 & 1 \\ -1 & g(2) & 3 \\ 0 & 4 & g(3) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} cos(\pi) & cos(\pi) & f(0) \\ ln(e^2) & tan\left(\frac{\pi}{4}\right) & f(1) \\ \sqrt{2} & 1 & f(2) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \mu(3) & sgn(-1) \\ 0 & sgn(4) & cos(\pi) \\ -1 & \mu(2) & sgn(1) \end{pmatrix}$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \text{ y } g(x) = ln(x), x > 0$$

Obtenga los resultados de las siguientes operaciones:

a) $f(0)\, g(1)\, C$
b) $A + 2B + C$
c) $f(4)\, I_{n\times n} + B$
d) $2B + AB$
e) $AB + BA$

Scanned by CamScanner

14) Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

De ser posible, determine las siguientes matrices:

a) $D=2B^TA$

b) $E=CB+\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ -2 & 2 & -4\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}$

A partir de la información anterior, complete las celdas de la siguiente tabla:

	Clase de matriz			
Matriz	Cuadrada	Rectangular	Nula	Diagonal
D				
E				

15) Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

De ser posible, determine los elementos de la matriz D, si se conoce que:

$$B^TA+CI_{2x2}-2D=0$$

16) Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

De ser posible, determine cada uno de los elementos de la matriz C que cumplan con la siguiente condición:

$$AB-C+2I_{2x2}=0$$

17) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

De ser posible, obtenga los elementos de la nueva matriz $(AB)^{-1}$.

Scanned by CamScanner

18) Dadas las matrices:

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

De ser posible, obtenga los elementos de la nueva matriz $(A + B)^{-1}$.

19) Resuelva lo requerido en los siguientes literales:

a) Determine todas las matrices diagonales de orden 2x2 que coinciden con su inversa.

b) Si se tiene una matriz cuadrada A con la propiedad de que $A^2 = 2A + I$, demuestre que A tiene inversa y exprese esta última en términos de A.

c) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1+m & 0 \\ 0 & 1-m \end{pmatrix}$, determine los valores de m, tales que $B^2 = 2B + I$, y para estos valores obtenga la inversa de B.

20) Realice lo requerido para cada literal:

a) Obtenga A^{-1} utilizando el método de Gauss–Jordan si:

$$A = \begin{pmatrix} ln(e) & log_{1/2}(4) & log(100) \\ log_2(4) & log_3(27) & ln(1) \\ log(10) & log_3(1/3) & log(1) \end{pmatrix}$$

b) De ser posible, determine la matriz kA^{-1} utilizando el método de Gauss–Jordan si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } k = \frac{1}{2}$$

c) De ser posible, determine A^{-1} utilizando el método de Gauss–Jordan. si:

$$A = \begin{pmatrix} 2\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right) & 4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) & -tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ sen(\pi) & cos(\pi) & 2\,tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) & tan(\pi) \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

d) Dada la matriz A y la función $f: \mathcal{M}_{n\times n} \mapsto \mathcal{M}_{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } f(X) = 3X^2 + 5X + 2I_{3\times 3}$$

Evalúe: $f(A)$

6.3 Matrices Relevantes

21) A partir del conjunto de matrices de orden $n\times n$, se define la función:

$$f: \mathcal{M}_{n\times n} \mapsto \mathbf{R}, \text{ donde: } f(X) = tr(XX^T)$$

a) Demuestre que:

I) Dadas $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $tr(XY) = tr(YX)$.

II) $\forall X \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $f(X) \geq 0$, y compruebe además que: $f(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, donde 0 es la matriz nula de orden $n\times n$.

III) $f(X) = tr(X^T X)$.

b) Determine la norma de X en función de f.

22) Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ una matriz tal que $A^T A$ es regular y de orden $n\times n$. Se define la matriz $P \in \mathcal{M}_{m\times m}$ como:

$P = I_{m\times m} - A(A^T A)^{-1} A^T$, donde $I_{m\times m}$ es la matriz identidad de orden $m\times m$.

Demuestre que:

a) $P^2 = P$ y verifique además que $PA = 0$, donde $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es la matriz nula.

b) La matriz $(A^T A)$ es simétrica y verifique que la matriz P es también simétrica.

23) Si los elementos de una matriz $A_{2\times 2}$ se determinan de la siguiente manera:

$$a_{ij} = i + j - 2$$

a) Construya la matriz A.

b) Obtenga la matriz A^T y especifique a qué clases de matrices pertenece.

c) Obtenga A^{2T}, bajo el supuesto que $A^{2T} = (A^2)^T$.

24) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 9 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

De ser posible, obtenga:

a) $C = 3(AB)^T$
b) $D = 3(B)^T$
c) $E = 3(A)^T$
d) $F = (A^{-1})^T$
e) $G = (A^T)^{-1}$

25) Justificando su respuesta, determine el valor de verdad de cada proposición, considerando como M el conjunto de matrices cuadradas de orden $n \times n$.

a) $\forall A, B \in M\,[AB = BA]$
b) $\forall A, B, C \in M\,[(A^T BC)^T = C^T B^T A]$

26) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) De ser posible, determine los elementos de la matriz D, si se conoce que:

$$B^T A + CI_{2\times 2} - 2D = 0$$

b) Si fue posible resolver el literal anterior, construya la matriz E con algunos elementos de la matriz D, de la siguiente manera:

$$E = \begin{pmatrix} d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{11} \end{pmatrix}$$

Luego identifique si E es idempotente.

27) Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando sus respuestas:

a) Si $\forall X, X^T AX = 0$, entonces A es una matriz simétrica.
b) Si A es simétrica y $\forall X, X^T AX = 0$, entonces $A = 0$.

28) Si A y B son dos matrices simétricas del mismo orden, identifique cuál de las siguientes matrices es simétrica:

a) $A + B$
b) AB
c) BA
d) BAB
e) A^{-1}

Scanned by CamScanner

29) Si $A_{3\times3} = (a_{ij})$ es una matriz antisimétrica, entonces es verdad que:

a) $\forall i \in \mathbb{N}, a_{ii} = 0$.
b) $A + A^T$ no es una matriz nula.
c) A tiene inversa.
d) La norma de Frobenius de A es 1.
e) A es periódica de período 2.

30) Si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & cos(\alpha-\beta) & cos(\alpha-\gamma) \\ cos(\beta-\alpha) & 1 & cos(\beta-\gamma) \\ cos(\gamma-\alpha) & cos(\gamma-\beta) & 1 \end{pmatrix}$ entonces A es simétrica.

a) Verdadero b) Falso

31) Si A y B son dos matrices nilpotentes, entonces AB será una matriz nilpotente cuando:

a) $AB = I_{n\times n}$
b) $AB = A$
c) $AB = BA$
d) $ABA = 0$
e) $BAB = I_{n\times n}$

32) Sean A y B matrices ortogonales del mismo orden. Una de las siguientes matrices también es ortogonal, identifíquela:

a) AB
b) $A + B$
c) $A - B$
d) B^2
e) A^2

33) Demuestre que la siguiente matriz es ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} cos(\beta) & 0 & sen(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{pmatrix}$$

34) Se dice que dos matrices cuadradas A y B de orden $n\times n$ son semejantes, si existe una matriz inversible P, tal que $B = P^{-1}AP$. Determine si son semejantes las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

35) Si A es una matriz cuadrada regular que satisface la ecuación $A(A^2 + 3A + I) = 0$, entonces demuestre que:

$$A^{-1} = -A - 3I$$

Scanned by CamScanner

36) Sea la matriz $C \in \mathcal{M}_{nxn}$ que satisface la condición $C^3 = 0$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, se define $M(\lambda) \in \mathcal{M}_{nxn}$ tal que $M(\lambda) = I + \lambda C + \frac{\lambda^2 C^2}{2}$.

a) Demuestre que $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}\ [M(\beta)\, M(\lambda) = M(\lambda)\, M(\beta)]$

b) Compruebe que $(M(\lambda))^{-1} = M(-\lambda)$.

6.4 Determinantes ● ● ● • •

37) Califique cada proposición como verdadera o falsa, justificando su respuesta.

a) Si A es una matriz cuadrada, entonces $det(A^T) = \frac{1}{det(A)}$.

b) Si A y B son matrices cuadradas, entonces $det(A-B) = det(A) - det(B)$.

c) Si A es una matriz cuadrada, entonces $det(2A) = 2\,det(A)$.

38) A partir del valor de cada uno de los determinantes dados, calcule el valor de los nuevos determinantes requeridos:

a) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \lambda & \mu & \psi \\ \varepsilon & \eta & \omega \end{vmatrix} = 5$, $\begin{vmatrix} 4\beta & \alpha & \delta+\alpha \\ -8\mu & -2\lambda & -2\psi-2\lambda \\ 4\eta & \varepsilon & \omega+\varepsilon \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} d & 2e & 3f \\ g+a & 2(h+b) & 3(i+c) \\ \frac{a}{6} & \frac{b}{3} & \frac{c}{2} \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} w & 2x & y \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, $\begin{vmatrix} -10 & -10 & -45 \\ 2w & 2x & 3y \\ 2(a-1) & b-2 & 3(c-3) \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$, $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 6a & 2b & 2c \\ 3t-6a & u-2b & v-2c \end{vmatrix}$

Scanned by CamScanner

39) Para las siguientes matrices, determine los valores de x que hacen que las mismas no sean inversibles, considerando que $x \in \mathbf{R}$.

a) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} e^{x} & e^{-2x} \\ e^{2x} & e^{3x} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & e^{x} & 0 \\ e^{x} & -e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} sen\,(x) & cos\,(x) \\ -cos\,(x) & sen\,(x) \end{pmatrix}$

40) Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -t & t-1 & t+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-t & t+3 & t+5 \end{pmatrix}$$

determine el o los valores de $t \in \mathbf{R}$ para que la matriz A sea singular.

41) Determine lo requerido en cada literal:

a) $det\left(A^{-1}\right)$, si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $det(B)$, si $A = \begin{pmatrix} a & n & t \\ c & h & g \\ e & s & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3e & 6s & 3b \\ c & 2h & g \\ a+c & 2n+2h & t+g \end{pmatrix}$ y $det(A) = 7$

d) $det(A)$, si $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

e) $det\left(\frac{1}{2}A\right)$, si $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

f) $det\left(3A^{-1}\right)$, si $A=\begin{pmatrix} 2cos(x) & sen^2(10°)+cos^2(10°) \\ -2 & sec(x) \end{pmatrix}$

g) $f\left(det(A)\right)$, si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ y $f(x)=3x^2+5x+2-e^{-x}$

42) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, el conjunto referencial Re = $\mathbb{R}$, y el siguiente predicado:

$$p(x):\ det(A-xI)=0$$

Determine el conjunto de verdad A$p(x)$.

43) Si la matriz $A=\begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix}$ y $|A|=-13$, calcule el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ b) $|6A|$ c) $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix}$ d) $\left|A^{-1}\right|$

44) Sea el conjunto referencial Re = $\mathbb{R}$ y el predicado $p(x)$, determine el conjunto de verdad A$p(x)$:

$$p(x):\ \begin{vmatrix} 2 & x+2 \\ 3 & x+5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x-6 & 2 \end{vmatrix}$$

45) Sea el conjunto referencial Re = $\mathbb{R}$ y el predicado $p(x)$, determine A$^c p(x)$.

$$p(x):\ \begin{vmatrix} 3 & x^2 & x^3 \\ 0 & x & 10000 \\ 0 & 0 & x-ln(e) \end{vmatrix}=60$$

46) Demuestre lo indicado en los siguientes literales:

a) $\begin{vmatrix} 1 & sen(a) & cos(a) \\ 1 & sen(b) & cos(b) \\ 1 & sen(c) & cos(c) \end{vmatrix}=sen(b-c)+sen(c-a)+sen(a-b)$

Scanned by CamScanner

b) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = (y-z)(x-y)(x-z)$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

47) Construya, de ser posible, una matriz $X = (x_{ij})$ de orden 3 x 3 que cumpla las siguientes condiciones:

- X es diagonal
- $\mu(-x_{11}) = 1, sgn(x_{22}) = 1$
- $|x_{11}| = |x_{22}| = |x_{33}|$
- $det(X) = \sqrt{e}$

6.5 Sistemas de ecuaciones lineales (S.E.L.)

48) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) Todo sistema de ecuaciones lineales tiene por lo menos una solución.

b) Si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0 entonces el sistema es inconsistente.

c) Si dos de las ecuaciones en un sistema de ecuaciones lineales son proporcionales entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

d) Si la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones es inversible entonces el sistema de ecuaciones tiene única solución.

e) El número de operaciones realizadas con el método de Gauss para resolver un sistema de ecuaciones es mayor que el número de operaciones realizadas con el método de Gauss–Jordan.

49) Sean los conjuntos $\text{Re}_x = \text{Re}_y = \mathbf{R}$ y el predicado $p(x, y)$: $\begin{cases} x-2=y \\ 2y+4x=11 \end{cases}$; si $p(a, b) \equiv 1$, entonces es verdad que:

a) La suma $(a+b)$ es un número entero.

b) La resta $(a-b)$ es igual a 4.

c) El producto (ab) es negativo.

d) El cociente $\left(\frac{a}{b}\right)$ no es un número entero.

e) $a<b$

Scanned by CamScanner

50) Sea el conjunto referencial $\mathrm{Rc} = \{x/x \text{ es matriz de orden } 2\times 2\}$ y el predicado con la ecuación matricial dada, determine el conjunto de verdad $\Lambda p(x)$.

$$p(x): \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\left(I_{2\times 2}\right)^2$$

51) Dados $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbf{R}$ y el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2e^2x + 1 = e^2x - y \\ -ey = 1 - x \end{cases}$

a) Determine si el par (0, 0) satisface el sistema de ecuaciones.
b) Determine si el sistema de ecuaciones es consistente; y de ser el caso, establezca una solución.

52) Dados $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbf{R}$ y el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 1 - az = x - 2y \\ ay + x + 3z = 1 - a + 2y \\ a^2z + 4y = 3a + 2x + 2ay + 10z \end{cases}$$

Determine el valor (o los valores) de a, para que el sistema sea:

a) Inconsistente.
b) Consistente con solución única.
c) Consistente con infinitas soluciones.

53) Dados los conjuntos $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathrm{Re}_z = \mathbf{R}$ y el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + az = 6 \\ -2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 2y - z = 4a \end{cases}$$

De ser posible, determine el valor de a para que el sistema sea:

a) Consistente con solución única.
b) Consistente con infinitas soluciones.
c) Inconsistente.

54) Considere la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, obtenga la matriz M.

55) Considere la matriz involutiva A. Demuestre que la solución del sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, es $X = AB$.

Scanned by CamScanner

56) Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ y el sistema de ecuaciones lineales expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix}-5\\2\\m-5\end{pmatrix}$$

De ser posible, determine los valores de m para que el sistema sea:

a) Consistente con solución única.
b) Consistente con infinitas soluciones.
c) Inconsistente.

57) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi]$ y el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2\,sen(\alpha) - sen(\beta) + 3\,sen(\gamma) = 3\\ 4\,sen(\alpha) + 2\,sen(\beta) - 2\,sen(\gamma) = 10\\ 6\,sen(\alpha) - 3\,sen(\beta) + sen(\gamma) = 9\end{cases}$$

Utilice cambios de variables apropiados para transformarlo en un sistema de ecuaciones lineales y verifique si el sistema es inconsistente o consistente.

58) Sean $Re_x = Re_y = Re_z = \mathbb{R}$ y $p(x,y,z): \begin{cases}x+y-z=1\\ ax-y=-2\\ 3x+z=3\end{cases}$, determine, de ser posible, los valores de a para que $Ap(x, y, z) = \emptyset$.

59) Sean $Re_x = Re_y = Re_z = \mathbb{R}$ y $p(x,y,z): \begin{cases}x-2y+3z=a\\ 2x+3y-z=b\\ 4x-y+5z=c\end{cases}$, determine el valor de verdad de cada proposición:

a) El sistema tiene solución única si y sólo si $c = 2a + b$.
b) Si $a = -2$, $b = 3$ y $c = -1$, entonces $Ap(x, y, z) = \{(-t, t+1, t) / t \in \mathbb{R}\}$

60) Sean $Re_x = Re_y = Re_z = \mathbb{R}$ y el predicado de tres variables:

$$p(x,y,z): \begin{pmatrix}csc\left(\frac{\pi}{6}\right) & 2 & 3\\ 9(0.\overline{4}) & 7 & 7\\ log_2\left(\frac{1}{4}\right) & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-7\end{pmatrix}$$

Determine $Ap(x, y, z)$.

Scanned by CamScanner

61) Juan Carlos recibió como regalo de su abuela una alcancía. En ella, recuerda haber dejado un total de 83 centavos distribuidos en 13 monedas, con denominaciones de 1, 5 y 10 centavos. Sin embargo, desea saber cuántas monedas hay de cada denominación sin romper la alcancía, ¿es posible lograrlo?

62) En una región de Narnia existen unicornios, águilas y toros. Si se cuentan todos los cuernos, las patas y los ojos de estos animales, se obtiene 29, 94 y 54, respectivamente. Determine cuál es la proposición verdadera:

a) Existen 10 águilas.
b) Existen 11 toros.
c) Existen 23 unicornios.
d) Entre unicornios y toros suman 20 animales.
e) Existen menos unicornios que toros.

6.6 Sistemas de ecuaciones no lineales (S.E.N.L.)

63) Considere la siguiente proposición:

"Todo sistema de ecuaciones no lineales tiene solución"

Analice y determine si es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

64) Sean $Re_x = Re_y = \mathbb{R}$, determine las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales, y utilice un graficador para verificar sus resultados:

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{2x+1} - 3^{2y} = 23 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = \dfrac{2\pi}{3} \\ sen(x) + sen(y) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$; considere para este caso: $Re_x = Re_y = (0, 2\pi)$

c) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 110 \\ log(x) + log(y) = 3 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

e) $\begin{cases} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ x+y=17 \end{cases}$

65) Dados los conjuntos referenciales $Re_x = Re_y = \mathbf{R}$ y el predicado de dos variables $p(x,y): \begin{cases} x=\frac{y^2}{2}-3 \\ x=y+1 \end{cases}$, la suma de las abscisas y de las ordenadas de todos los elementos del conjunto de verdad $Ap(x,y)$ es igual a:

a) -6 b) -5 c) -4 d) 0 e) 6

66) Para los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales, determine gráficamente con el apoyo de un software, si tienen o no solución:

a) $\begin{cases} y=cos(x) \\ x=ln(y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=1-e^{x-1} \\ \sqrt{y}+1=x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=\sqrt{x-1} \\ y=\frac{x^3-x^2-x+1}{1-x} \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2=x^2 \\ y+1=-\frac{1}{2}(x-5)^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y=cos(x) \\ 2y-3=2cos(x+\pi) \end{cases}$

67) Sean $Re_x = Re_y = \mathbf{R}$ y el siguiente predicado de dos variables:

$$p(x,y): \begin{cases} |x|+|y|=2 \\ xy=1 \end{cases}$$

Califique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

a) $[p(0,1) \vee p(2,-4)] \rightarrow p(-2,0)$

Scanned by CamScanner

b) $Ap(x,y) \subseteq \{(x,y)/y=-x\}$

c) $N(Ap(x,y))=2$

68) Sean $Re_x = Re_y = \mathbf{R}$ y el siguiente predicado de dos variables:

$$p(x,y):\ x^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y^2\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\31\end{pmatrix}$$

Determine $Ap(x,y)$.

69) Determine los números reales a y b, siendo a diferente de b, para que las funciones $f(x)=ax^2+bx+\frac{3}{4}$ y $g(x)=bx^2+ax+1$ tengan un solo punto de intersección; y que además, el punto $P\left(1,e^{\sqrt{5}}\right)$ pertenezca a la función $h(x)=e^{(a+b)x}$.

70) Con la ayuda de un software graficador, bosqueje las funciones f, g y h del ejercicio anterior. Estime las coordenadas x e y del punto de intersección entre las funciones f y g, así como entre g y h. Genere una recta que contenga estos puntos y grafíquela junto a las demás funciones.

6.7 Sistemas de inecuaciones lineales (S.I.L.)

71) Dado el sistema de inecuaciones lineales $\begin{cases}2x+y\le 1\\ |y|\le 2\\ x\ge 0\end{cases}$, determine cuál de los siguientes pares ordenados es solución del sistema:

a) $(1,0)$ b) $(-1,0)$ c) $(1,-1)$ d) $(2,0)$ e) $(0,2)$

72) Dibuje la región $R:\begin{cases}x-y\le 1\\ |x|\le 1\end{cases}$ en el plano cartesiano.

73) Para el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases}5x+3y\le 105\\ 2x+4y\le 70\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$$

Determine:

a) El punto de intersección entre las rectas $5x+3y=105$ y $2x+4y=70$.
b) La representación en el plano cartesiano de las inecuaciones especificadas en el sistema.

Scanned by CamScanner

74) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones lineales, identificando los vértices de su región solución y verificándolos con la ayuda de un software graficador:

$$\begin{cases} 5x+15y \le 150 \\ 6x+8y \le 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

75) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones lineales, identificando los vértices de su región solución y verificándolos con la ayuda de un software graficador:

$$\begin{cases} x+3y \le 50 \\ 9x+8y \ge 0 \\ 3x+4y \ge 60 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

76) Resuelva el sistema de inecuaciones lineales, identificando los vértices de su región solución y verificándolos con la ayuda de un software graficador:

$$\begin{cases} 2x+y \le 10 \\ x+3y \le 12 \\ 0 \le x \le 8 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

77) En el plano cartesiano, la solución del sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} |y| \le 2 \\ x+2 \ge 0 \\ y-x \ge 0 \end{cases}$$

corresponde a la siguiente figura geométrica:

a) Un rectángulo
b) Un triángulo
c) Un trapecio
d) Un rombo
e) Un punto

78) La región del plano cartesiano que representa la solución del sistema de inecuaciones lineales $\begin{cases} y \ge x+2 \\ y \ge -x \\ y \le 3 \end{cases}$ es un subconjunto de la unión de los cuadrantes:

Scanned by CamScanner

a) I y IV
b) II y IV
c) I y III
d) I y II
e) II y III

79) Considere las funciones $f(x) = -2x + 19$ y $g(x) = \frac{1}{3}(x + 8)$. Si se definen las regiones:

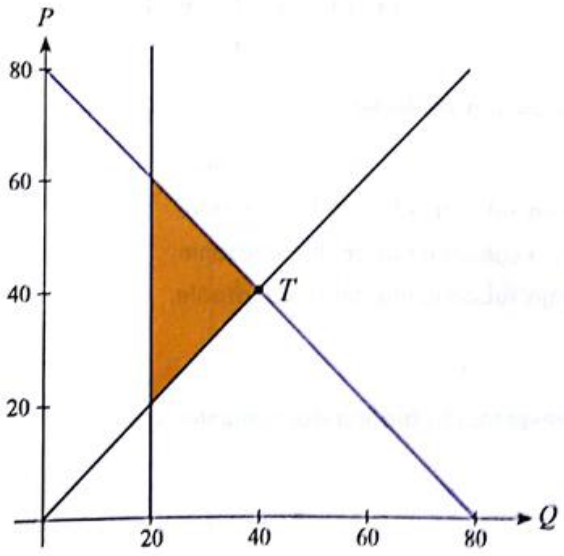
$R_1 = \{(x, y) / |2x - 15| < 7\}$

$R_2 = \{(x, y) / f(x) \leq y \leq g(x)\}$

$R_3 = \{(x, y) / g(x) \leq y \leq f(x)\}$

Represente gráficamente la región $R = R_1 \cap (R_2 \cup R_3)$

80) Una máquina puede fabricar cajas de tornillos o cajas de pernos, funcionando durante un máximo de 80 horas semanales y tardándose una hora en fabricar cada caja. La máquina debe fabricar no menos de 20 cajas de tornillos por semana y el número de cajas de pernos P no debe ser menor que el número de cajas de tornillos Q. El punto de intersección T (40, 40), así como las gráficas que describen las condiciones dadas, se muestran en el diagrama adjunto.



Entonces, uno de los siguientes sistemas de desigualdades lineales representa la región sombreada, identifíquelo:

a) $\begin{cases} P \leq Q \\ P \leq 80 - Q \\ Q \leq 20 \end{cases}$ b) $\begin{cases} P \geq Q \\ P \leq 80 - Q \\ Q \geq 20 \end{cases}$ c) $\begin{cases} P \geq Q \\ P \leq 80 - Q \\ Q \leq 20 \end{cases}$ d) $\begin{cases} P \geq Q \\ P \leq 80 + Q \\ Q \geq 20 \end{cases}$ e) $\begin{cases} P \leq Q \\ P \leq 80 + Q \\ Q \geq 20 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

6.8 Sistemas de inecuaciones no lineales (S.I.N.L.) ● ● ● • •

81) Represente gráficamente la región en el plano cartesiano definida por el siguiente sistema de inecuaciones no lineales, considerando los valores de x en el intervalo $[-6, 6]$.

$$\begin{cases} y \geq 2 - \left| cos\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) \right| \\ y \leq \left| sen(\pi x) + 2 \right| \end{cases}$$

82) Sean $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbb{R}$ y el predicado $p(x, y)$: $\begin{cases} y \leq 1 - (x-1)^2 \\ y \geq |x-2| - 1 \end{cases}$, el conjunto de verdad $Ap(x, y)$ tiene todos sus elementos en los siguientes cuadrantes del plano cartesiano:

a) I, II y III
b) I, II y IV
c) I, III y IV
d) II, III y IV
e) I y IV

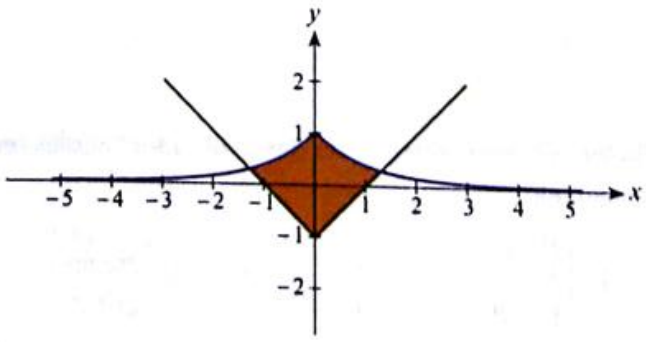
83) Sean $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbb{R}$ y el predicado:

$$p(x, y): \begin{cases} y \geq x^2 - 2x \\ y \geq 1 - |x-1| \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Identifique la proposición verdadera:

a) $Ap(x, y)$ es un subconjunto del I cuadrante.
b) $Ap(x, y)$ es un subconjunto del II cuadrante.
c) $Ap(x, y)$ es un subconjunto del III cuadrante.
d) $Ap(x, y)$ es un subconjunto del IV cuadrante.
e) $Ap(x, y) = \varnothing$

84) A partir de la representación gráfica del conjunto $Ap(x, y)$ en el plano cartesiano:



Scanned by CamScanner

El predicado $p(x, y)$ estaría dado por uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} y \le e^{-|x|} \\ y \le |x-1| \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \le e^{-|x|} \\ y \le |x|-1 \end{cases}$

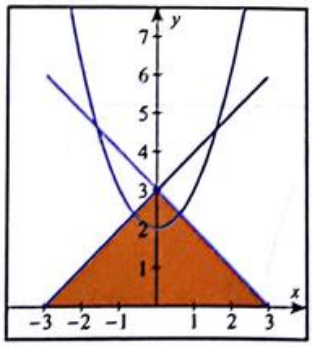
c) $\begin{cases} y \le e^{-|x|} \\ y \ge |x|-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y \ge e^{-|x|} \\ y \ge |x|-1 \end{cases}$

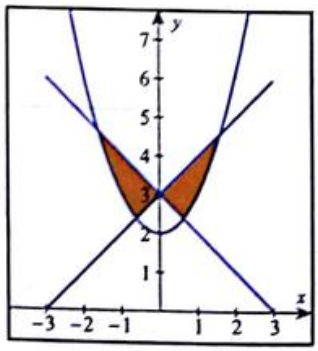
e) $\begin{cases} y \le e^{-|x|} \\ y \ge |x-1| \end{cases}$

85) Sean los conjuntos referenciales $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbb{R}$ y el predicado $p(x, y)$: $\begin{cases} y \ge x^2+2 \\ y \le x+3 \\ y \le -x+3 \end{cases}$, entonces la representación gráfica de $Ap(x,y)$ es:

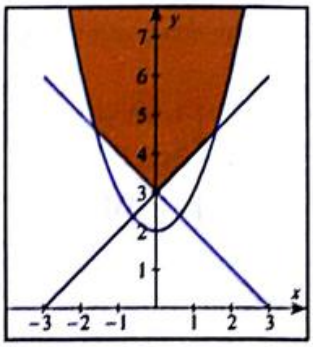
a)



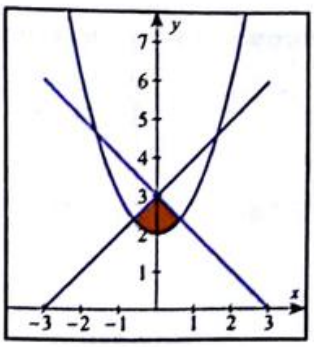
b)



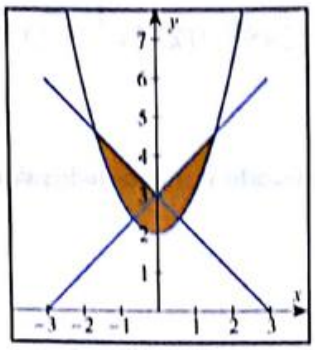
c)



d)



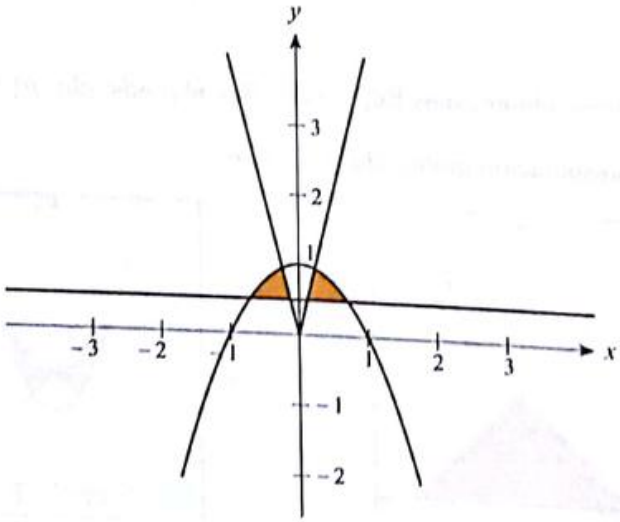
Scanned by CamScanner

e) 

86) Sean los referenciales $\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_y = \mathbb{R}$ y el predicado $p(x, y)$: $\begin{cases} x - 6 \leq -4(y-2)^2 \\ |x-3| \leq 1 \end{cases}$, el conjunto de verdad $\Lambda p(x, y)$ tiene todos sus elementos en los siguientes cuadrantes del plano cartesiano:

a) I b) IV c) I y II d) II y III e) I y IV

87) Dada la representación gráfica del conjunto $\Lambda p(x, y)$ en el siguiente plano cartesiano:



El predicado $p(x, y)$ estaría dado por uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} y \leq 1 - x^2 \\ 2y \leq 1 \\ y \leq |4x| \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \leq 1 - x^2 \\ 2y \leq 1 \\ y \geq |4x| \end{cases}$ c) $\begin{cases} y \leq 1 - x^2 \\ 2y \geq 1 \\ y \leq |4x| \end{cases}$ d) $\begin{cases} y \geq 1 - x^2 \\ 2y \geq 1 \\ y \geq |4x| \end{cases}$ e) $\begin{cases} y \geq 1 - x^2 \\ 2y \leq 1 \\ y \leq |4x| \end{cases}$

Scanned by CamScanner

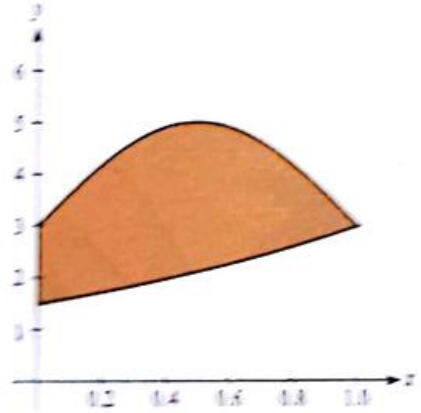
88) Sea R la región limitada por $y \geq 1 - |x-1|$ y $y \leq \sqrt{1-(x-1)^2}$, entonces es verdad que:

a) R no es una región acotada.
b) R no es un subconjunto del I Cuadrante.
c) $(1, 1) \in R$
d) $R \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R} / x - y \geq 0\}$
e) R tiene forma triangular.

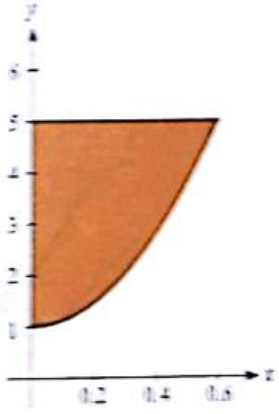
89) Sean $Re_y = Re_x = \mathbb{R}$ y el predicado de dos variables $p(x, y): \begin{cases} y \leq 2\,sen(\pi x) + 3 \\ 0 \leq x \leq 1 - \log_3\left(\frac{y}{3}\right) \end{cases}$,

la representación gráfica del conjunto de verdad $Ap(x, y)$ es:

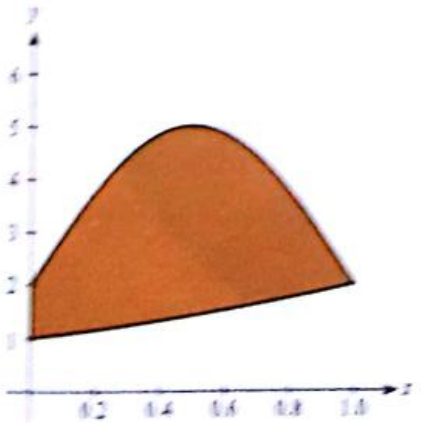
a)



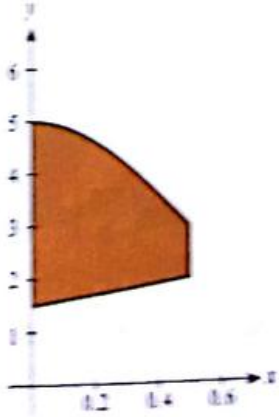
b)



c)

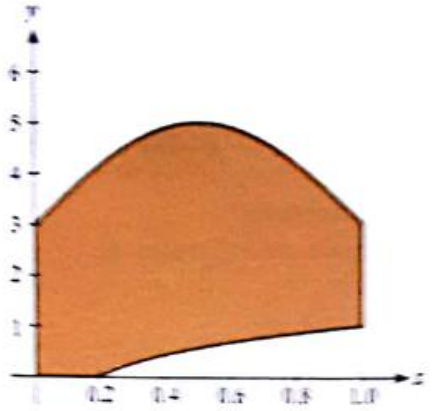


d)

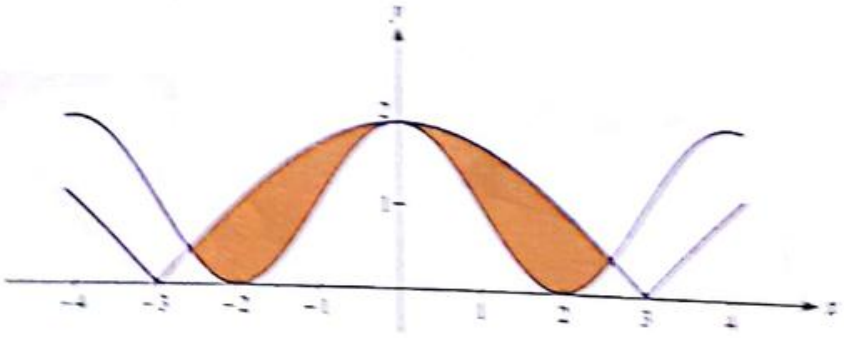


Scanned by CamScanner

e)



90) Dados $Re_x = Re_y = \mathbb{R}$ y la representación gráfica del conjunto de verdad $A_{p'}(x, y)$ en el siguiente plano cartesiano:



El predicado $p(x, y)$ podría estar dado por:

a) $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 \leq y \leq \left|2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right| \wedge (-4 \leq x \leq 4)$

b) $\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 1 \leq y \leq \left|2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right| \wedge (-4 \leq x \leq 4)$

c) $2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq y \leq \left|\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right| \wedge (-4 \leq x \leq 4)$

d) $\cos(2\pi x) \leq y \leq \left|2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right| \wedge (-4 \leq x \leq 4)$

e) $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1 \leq y \leq \left|\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right| \wedge (-4 \leq x \leq 4)$

Scanned by CamScanner

FundaRETOS

Las ballenas jorobadas

Siendo de los cetáceos más grandes, las ballenas jorobadas abandonan las gélidas aguas de la Antártida en busca de la calidez del Océano Pacífico ecuatorial, donde se reproducen cada año. Viven alrededor de 50 años y alcanzan madurez sexual a los 4 años; sin embargo, la hembra pare una sola cría cada tres años.

Se conoce que la tasa de supervivencia en el estadio menor a 1 año (E_1) es de 0.87; en el estadio (E_2) de 1 a 4 años es 0.96; de 4 a 8 años (E_3) la tasa es de 0.94; y, de 8 años en adelante (E_4) su valor es de 0.4.

Si inicialmente se tienen 100 ballenas adultas (con más de 8 años de vida), determine la cantidad de ballenas en los estadios E_1, E_2, E_3 y E_4 después de 5 años.

Scanned by CamScanner

La niña genio

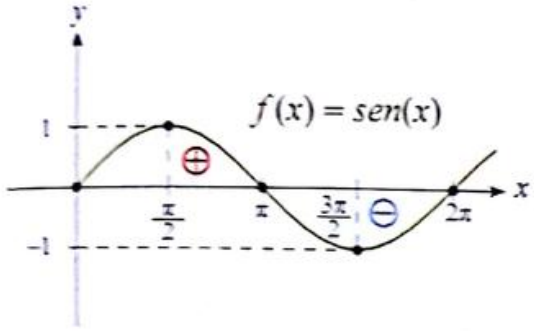
Itatí actualmente estudia la carrera de Matemática con apenas 10 años de edad. En su clase de Álgebra Lineal, se le ha explicado que las matrices no cumplen la propiedad conmutativa para la multiplicación. Sin embargo, Itatí sostiene que existe un subconjunto de las matrices $\mathcal{M}_{n\times n}$ que sí cumplen dicha propiedad.

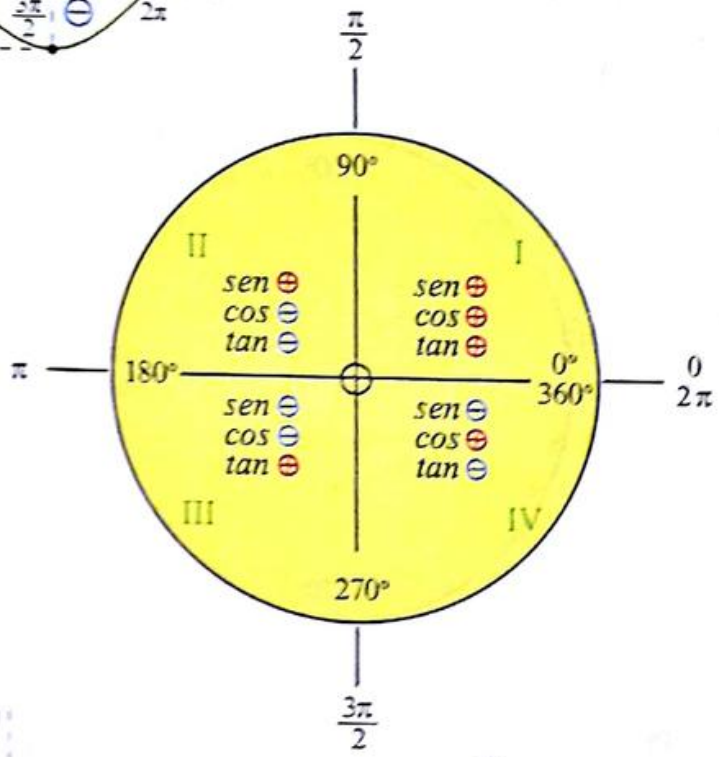
Ante este argumento, su maestro le muestra una matriz A y le pide determinar todas las matrices B que conmutan con A siendo $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}$.

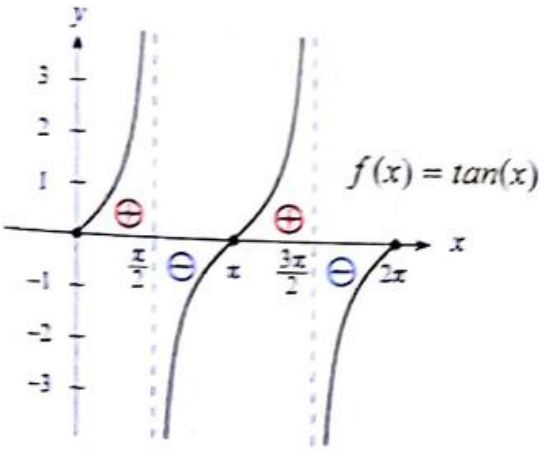
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

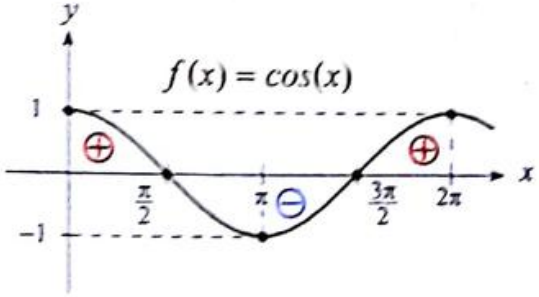
Scanned by CamScanner

Signos de las funciones trigonométricas



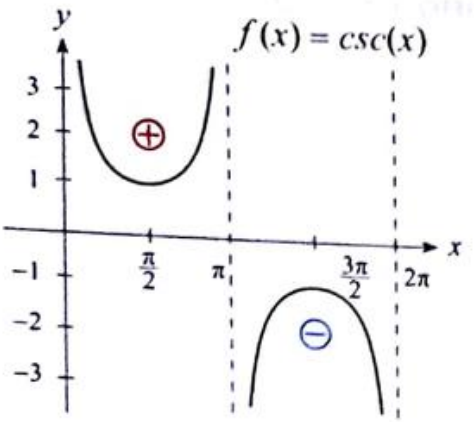


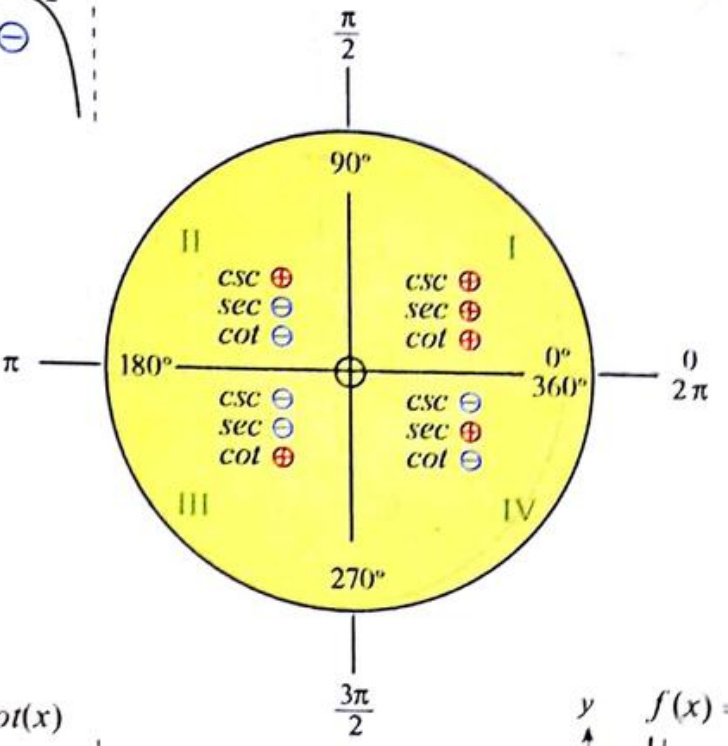


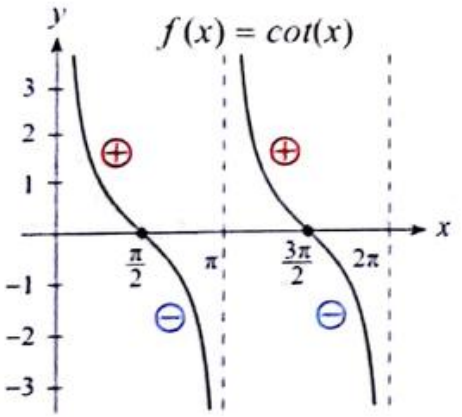


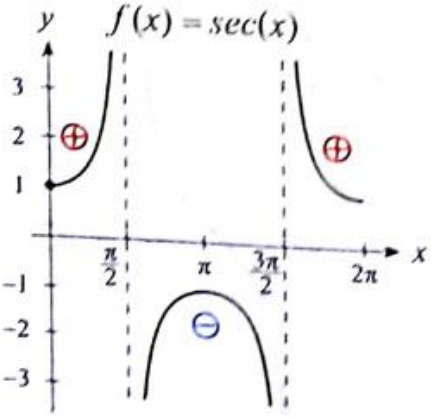
Scanned by CamScanner

Signos de las funciones trigonométricas recíprocas









Scanned by CamScanner

RESPUESTAS A EJERCICIOS

Capítulo 1. Lógica

Autoevaluaciones

1.1 1) a) X, b) ✓, c) X, d) ✓, e) ✓; 2) a) 1, b) 1, c) 0, d) 1, e) 1; 3) a) ✓, b) X, c) ✓ (Verdadera), d) X, e) ✓; 4) No; 5) a) 0, b) 0, c) 1, d) 0 1.2 1) (a); 2) a) $p \to q$, $\neg q \to \neg p$; 3) a) CS: Las pruebas sugieren mejoría en el 97% de los casos, CN: El medicamento es efectivo, b) CS: Juan y Marcelo aprobarán el curso, CN: Juan y Marcelo estudian la materia lo suficiente; 4) Si, entonces, ya que, pero; 5) a) suficiente, b) necesaria, c) lógicos, d) negación, e) condicional, f) contrarrecíproca 1.3 1) (b); 3) a) 1, b) 0, c) 0, d) 1; 4) a es falsa, b es verdadera, c es falsa, d es falsa; 5) No se puede definir el valor de verdad de a 1.4 2) $(\neg p \to q) \vee \neg(q \wedge p)$; 3) a) $\neg$, b) $\veebar$, c) $\to$, d) $\wedge$; 5) (c) 1.5 1) (c); 2) (b); 3) F_1) Ley de Implicación, F_2) Ley Distributiva, F_3) Ley de Contradicción, F_4) Ley de Identidad de la Disyunción, F_5) Ley Conmutativa de la Conjunción, F_6) Ley de Simplificación; 4) (c); 5) (c) 1.6 1) a) 0, b) 1, c) 1, d) 1, e) 0; 2) (b); 3) H_1; 4) (d) 1.7 4) Errores: F_3, F_4, F_5, F_8.

Ejercicios Propuestos

4) a) sí, b) no, c) sí, d) no, e) no, f) no, g) sí, h) no, i) sí, j) no; 5) (d); 6) (a); 12) (a), (d); 13) (e); 14) (d); 15) (d); 17) a) 0, b) 0, c) 1, d) 1, e) 0; 21) (b); 23) a es falsa, b es falsa, c es falsa; 24) (c); 26) a) 0, b) 1, c) 1, d) 0, e) 0; 27) (a); 28) I) a) 1, b) 1, c) 0, d) 1, e) 0, II) $(a \vee b) \to c$; 34) a) 0, b) 0, c) 1, d) 1, e) 1; 35) Contingencia; 36) b) I) Tautología, II) Contingencia, d) Sí es posible; 37) (e); 38) (e); 39) (c); 40) a) Contradicción, b) Tautología, c) Contingencia, d) Tautología, e) Tautología; 42) Todas son contingencias; 43) (d); 44) (a); 48) (b); 49) (b); 50) (a); 51) (d); 55) (c); 56) a) Tautología, b) Contingencia, c) Tautología, d) Contingencia, e) Contingencia; 57) (a); 58) (a); 59) (a); 60) (a); 62) Sí; 64) No válido; 65) a) No válido, b) Válido, c) No válido, d) No válido, e) No válido; 66) (b); 68) (c); 69) (d); 70) (e); 72) No válido.

Capítulo 2. Conjuntos

Autoevaluaciones

2.1 3) a) A = {a, e, i, o, u}, N(A) = 5, b) B = {Sol}, N(B) = 1, c) C = {1, 2, 3, 4, 5}, N(C) = 5, d) D = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}, N(D) = 7,

Scanned by CamScanner

e) E = {amarillo, azul, rojo}, N(E) = 3; **4)** b) 1, 0, 0, 1, 1, 0; **5)** a) Infinito, b) Finito con cardinalidad mayor que 1, c) Vacío, d) Finito con cardinalidad mayor que 1, e) Unitario **2.2** 1) a) universal, existencial, b) intersecantes, disjuntos, c) subconjunto; **3)** a) $\forall x$, x es puntual, b) $\exists x$, x es universitario, c) $\forall x$, x es inteligente, d) $\exists x$, x es de tez blanca; **4)** P(F) = {∅, {heart}, {mind}, {soul}, {heart, mind}, {mind, soul}, {heart, soul}, F}; **5)** a) I, b) D, c) D, d) D, e) I **2.3** 1) Unión, Diferencia, Diferencia Simétrica, Intersección; **3)** a){1, 3, 5, 7, 11, 13}, b){7}, c){11, 13}, d){1, 3, 5, 9}, e){1, 3, 5, 7, 11, 13}, f){1, 3, 7, 9}; **5)** A = {cinq, huit, neuf}, B = {trois, quatre, huit} **2.4** 1) a) 24, b) 0, c) 50, d) 132, e) 11; 2) A∪(B∩C) **2.5** 1) a)✓, b) X, c) X, d)✓, e) X; **2)** a) $Ap(x)$ = {samán, guayacán}, b) $Aq(x)$ = {samán, guayacán}, c) $Ar(x)$ = {guayacán}, d) $As(x)$ = {roble, ceibo, acacia}, e) $At(x)$ = Re; **3)** a) $A\neg r(x)$ = {samán, roble, ceibo, acacia}, b) $A[r(x) \rightarrow s(x)]$ = {samán, roble, ceibo, acacia}, c) $A[p(x) \vee q(x)]$ = {samán, guayacán}, d)$A[p(x) \wedge \neg t(x)] = \varnothing$; **4)** a) Falso, b) Verdadero, c) Verdadero, d) Verdadero, e) Verdadero **2.6** 2) a) $Aq(x) \subseteq Ap(x)$, b) $(A^C r(x) \cap Ap(x)) \neq \varnothing$, c) $Ap(x) \subseteq Aq(x)$, d) María $\in Ap(x)$, e) Mario $\notin Aq(x)$; **3)** No Válido **2.7** 2) a) AxB = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)}, b) BxC = {(2, 6), (2, 7), (3, 6), (3, 7), (4, 6), (4, 7)}, c) AxC = {(1, 6), (1, 7), (2, 6), (2, 7), (3, 6), (3, 7)}, d) (A∩B)xC = {(2, 6), (2, 7), (3, 6), (3, 7)}, e) (AΔB)xC = {(1, 6), (1, 7), (4, 6), (4, 7)}; **3)** a) 18, b) 15, c) 21, d) 1, e) 12 **2.8** 2) a) 1, b) 1, c) 0; **3)** $N(Ap(x, y)) = 12$, $N(Aq(x, y)) = 2$; **4)** {(∇, Δ), (∩, ∪), (∧, ∨)}; **5)** a) $Ap(x, y)$ = {(1, a), (2, b), (3, c)}, b) 1, 0, 0, 1, 1 **2.9** 2) R_2 = {(a, 12), (a, 13), (a, 14), (b, 14), (c, 12), (c, 14)}; **3)** a) $dom\, R_3 = \{9\}$, $rg\, R_3 = B = \{1, 2, 3, 4\}$, b) $dom\, R_4 = A = \{5, 8, 9\}$, $rg\, R_4 = \{2\}$, c) $dom\, R_5 = rg\, R_5 = \varnothing$; **4)** $R_1 = \varnothing$, $R_2 = \{(\alpha, \infty)\}$, $R_3 = \{(\Omega, \infty)\}$, $R_4 = \{(\alpha, \infty), (\Omega, \infty)\}$; **5)** $dom\, R$ = A - {Hilda}, $rg\, R$ = B **2.10** 2) a) 0, b) 1, c) 0 d) 1 e) 0; **4)** $f \circ (g \circ h)$ = {(φ, 0), (π, 0), (ω, α), (ρ, γ), (η, α)}; **5)** a) {(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}, b) {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}, c) {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}.

Ejercicios Propuestos

3) a) 0, b) 0, c) 0, d) 0, e) 1; **7)** (e); **8)** a) 1, b) 0, c) 1, d) 1, e) 1; **10)** a) 0, b) 1, c) 0, d) 1, e) 0; **11)** (d); **12)** a) 1, b) 0, c) 0, d) 1, e) 0; **13)** a) 0, b) 1, c) 0, d) 0, e) 1, f) 1, g) 0, h) 0, i) 1, j) 1; **14)** (e); **16)** a) 0, b) 1, c) 1, d) 1, e) 1; **17)** a) 1, b) 0; **19)** 0; **20)** a) 1, b) 1, c) 0, d) 1, e) 0; **21)** (e); **22)** (a); **23)** (a); **24)** {1, 7, 8, 9}; **26)** Posibles soluciones: a) [(B∩C) − A] ∪ [A − (B ∩ A)]; b) [(A ∪ B) − (C ∪ (A ∩ B))] ∪ [C − (A ∪ B)]; c) [(A ∩ B) − (A ∩ B ∩ C)]; **27)** (c); **28)** (e); **29)** (b); **31)** A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {4, 5, 7, 8, 9}, C = {1, 7, 10, 11}; **32)** a) {1, 3, 6, 7, 9}, b) {3, 5, 6, 7, 9}, c) {1, 4, 8}, d) {3, 7}; **33)** a) 0, b) 0, c) 1, d) 1, e) 1; **38)** (d); **39)** 55 personas; **43)** 41 hojas; **44)** 50 inversionistas; **45)** 4 mujeres; **46)** c) 40 cocineros; **49)** a) { }, b) {2, 3}, c) Re − {2, 3}, d) {2, 3}, e) Re − {2, 3}; **50)** a) {3};

Scanned by CamScanner

51) a) {1}, b) { }, c) {1, 10, 11, 12, 13, 14, 15}, d) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, e) {10, 11, 12, 13, 14, 15}; 52) a) 1, b) 0, c) 0, d) 0, e) 0; 53) a) 0, b) 0, c) 1, d) 1, e) 1; 54) a) 1, b) 1, c) 0, d) 1, e) 1; 55) I) $\neg r$: $\exists x(p(x) \wedge \neg q)$, $\neg s$: $\forall x p(x) \wedge \neg q$, II) $r \rightarrow s$; 58) No válido; 59) a) No válido, b) Válido; 60) a) Válido, b) No válido; 63) (c); 64) a) No válido, b) No válido; 66) (b); 67) (b); 68) (b); 69) (a); 70) (b); 71) (b); 72) (e); 77) (b); 78) a) $A_p(x, y) = \{(0, -1), (0, -2), (1, -1), (1, -2), (2, -1), (3, -1)\}$, b) $A_q(x, y) = \{(1, -1), (1, -2), (1, -3), (3, -1), (3, -2), (3, -3)\}$; 79) a) 1, b) 0, c) 1, d) 1, e) 0; 81) (b); 82) a) 0, b) 0, c) 0, d) 0, e) 1; 83) a) 0, b) 1, c) 1, d) 1, e) 0; 84) a) 0, b) 0, c) 0, d) 0, e) 1; 85) $A_r(x, y) = \{(-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$, $A_t(x, y) = \{\ \}$; 86) (e); 88) (c); 90) a) $\{((1, -1), 0), ((2, -2), 0), ((2, -1), 1), ((3, -1), 2), ((3, -2), 1)\}$, b) $\emptyset$, c) 256; 91) a) $\{(12, 0), (9, 1), (6, 2), (3, 3), (0, 4)\}$, b) $dom\ R = \{0, 3, 6, 9, 12\}$, $rg\ R = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, c) $\{(0, 12), (1, 9), (2, 6), (3, 3), (4, 0)\}$; 92) $\{(1, 1), (1, 4), (3, 1), (3, 4)\}$; 94) a) $\{(a, u), (e, o), (i, i), (o, e), (u, a)\}$, b) $\{(a, u), (e, a), (i, e), (o, i), (u, o)\}$, c) $\{(a, o), (e, i), (i, e), (o, a), (u, u)\}$, d) $\{(a, a), (e, u), (i, o), (o, i), (u, e)\}$, e) $\{(a, a), (e, e), (i, i), (o, o), (u, u)\}$; 95) (d); 98) a) 0, b) 0, c) 0, d) 1, e) 0; 99) a) 4; 101) a) $\{(\Omega, \Delta), (\Lambda, \Psi), (\Psi, \Psi), (\Gamma, \Delta), (\Sigma, \Sigma)\}$, b) $\{(\alpha, \alpha), (\beta, \mu), (\lambda, \alpha), (\theta, \theta), (\mu, \alpha)\}$, c) No existe inversa de f; 102) Sí es posible pero no es inyectiva ni sobreyectiva; 105) a) 4 096, b) $\{(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 4)\}$, c) $\{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$; 106) a) $\{(5, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 4)\}$, b) No existe, c) $\{(10, 10), (12, 12), (14, 14), (16, 16)\}$; 107) (d); 108) (e).

Capítulo 3. Números Reales

Autoevaluaciones

3.1 2) a) 1, b) 0, c) 1, d) 0, e) 1, f) 1, g) 1, h) 0, i) 1, j) 0 **3.2** 1) a) 1.6, b) 1.75, c) 0.85; 2) a) $\frac{7}{2}$, b) $\frac{3}{25}$, c) $\frac{4}{33}$; 3) a) ✓, b) X, c) ✓, d) X; 4) $2\frac{7}{55}$ **3.3** 1) $A_p(x, y, z) = \{(a, a, b), (a, b, a), (a, c, a), (b, a, b), (b, b, c), (b, c, b), (c, a, a), (c, b, b), (c, c, c)\}$; 2) a) 0, b) 0, c) 0, d) 0, e) 1, f) 0 ; 3) a) 1, b) 0, c) 0, d) 0, e) 1; 4) −1 238 **3.4** 2) a) $-2, \frac{1}{2}$, b) $5, -\frac{1}{5}$, c) $-\frac{1}{5}, 5$, d) $\frac{7}{2}, -\frac{2}{7}$, e) $-\frac{12}{13}, \frac{13}{12}$; 3) a) 1, b) 0, c) 0, d) 1 **3.5** 1) a) 1, b) 0, c) 1, d) 0, e) 1, f) 1, g) 1, h) 0; 3) a) Falso, b) Falso, c) Falso, d) Falso, e) Verdadera **3.6** 2) a) Verdadera; 3) a) m.c.m. = 60, M.C.D. = 1, b) m.c.m. = 102, M.C.D. = 17, c) m.c.m. = 500, M.C.D. = 5; 4) 15 / Marzo / 2016 **3.7** 2) a) $\frac{1}{x^2 - 25}$, b) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$; 3) $\frac{1}{343}$ **3.8** 2) a) Falsa, b) Falsa, c) Verdadera, d) Verdadera; 3) a) D, b) I, c) D, d) I, e) D; 4) a) 2 horas diarias; b) $\frac{5}{6}$G **3.9** 1) a) $[0, 3)^c$, b) $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$, c) $(-\infty, e]$, d) $(0, e]$, e) $\left[-\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$; 2) a) 71, b) 8;

Scanned by CamScanner

3) a) $|x-3|=\begin{cases} x-3 & , \ x\geq 3 \\ 3-x & , \ x<3 \end{cases}$, b) $|1-x|+2=\begin{cases} x+1 & , \ x>1 \\ 3-x & , \ x\leq 1 \end{cases}$, c) $\frac{x-5}{|x-5|}=\begin{cases} 1 & , \ x>5 \\ -1 & , \ x<5 \end{cases}$; **4)** a) Verdadera, b) Falsa, c) Falsa, d) Verdadera **3.10** **2)** Falsa; **3)** a) $Ap(x)=\varnothing$, b) $Aq(x)=\{-1,3\}$, c) $As(x)=\{-2\}$, d) $At(x)=\{-1\}$; **4)** $m=4$; **5)** \$60 **3.11** **1)** desigualdad, condicionada, conjunto, referencial; **3)** $A^c p(x)=\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right]$; **4)** $Aq(x)=[-2,\ 10]$; **5)** Entre 70 y 105 *cm* **3.12** **4)** Verdadera **3.13** **1)** a) Falsa, b) Verdadera; **2)** a) $\frac{n!}{(n-m)!}$, b) $\frac{n!}{m!(n-m)!}$, c) Ocurrencia de A o de B, d) Ocurrencia de A y de B; **3)** $N(Ap(n))=1$; **5)** a) 210 equipos, b) 1728 formas **3.14** **1)** 1; **2)** $1\,320x^3y^8$; **3)** $x^6-\frac{3}{2}x^4y^{\frac{1}{3}}+\frac{3}{4}x^2y^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{8}y$; **4)** -14; **5)** $\frac{5}{3}$ **3.15** **2)** a) $\frac{2n}{2n+1}$, b) $\frac{3^n}{2n}$, c) $\frac{x^n}{n!}$; **3)** a) Aritmética, $a=10$, $d=-6$, b) Geométrica, $a=2$, $r=\frac{3}{4}$, c) Geométrica, $a=-3$, $r=-2$, d) Geométrica, $a=5$, $r=1$ y Aritmética, $a=5$, $d=0$; **4)** a) \$3475, b) $r=2$.

Ejercicios Propuestos

4) a) 0, b) 0, c) 1, d) 1, e) 0; **5)** 0; **6)** a) 1, b) 1, c) 1, d) 0, e) 0; **7)** (e); **8)** (d); **9)** (c); **10)** (a); **11)** a) $\frac{1}{300}$, b) $\frac{131}{99}$, c) $\frac{1}{99}$, d) $\frac{16}{5}$, e) $\frac{5}{3}$; **12)** (d); **14)** a) 1, b) 1, c) 0, d) 0, e) 1; **16)** a) Sí es binaria interna, b) $n=-\pi$, c) $\tilde{a}=-2\pi-a$; **17)** a) 0, b) 1, c) 0, d) 0, e) 0; **18)** (e); **20)** a) 15π, b) Sí es binaria interna y no existe neutro; **22)** a) 0, b) 1, c) 1, d) 0, e) 0; **23)** a) 0, b) 0, c) No es posible, d) No es posible, e) No es posible; **24)** a) Sí, b) Sí, c) Sí, d) $n=0$ para $\oplus$, $n=1$ para $\otimes$, e) 5; **27)** (b); **28)** (d); **29)** (b); **30)** (d); **33)** (c); **37)** a) $S=\{41, 43, \ldots, 151\}$, b) No es binaria interna; **38)** (a); **39)** 1; **40)** (a); **41)** 3 veces; **42)** 60 niños, cada uno recibe 3 libros, 4 juguetes y 6 chocolates; **43)** (e); **44)** a) 5 paquetes con 24 moldes, 4 paquetes con 30 panes, 3 paquetes con 40 envolturas, b) 240 fotos y 300 tweets; **45)** 15 paquetes conteniendo: 5 galletas de vainilla, 8 de chocolate y 4 de avena; **46)** 26 de noviembre a las 05h00; **47)** a) 61 latas de jugos y 39 gaseosas, b) 60 stickers; **48)** 616 segundos, el primer perro dio 77 vueltas, el segundo dio 56 vueltas; y, el tercero dio 44 vueltas; **49)** a) 31 de mayo, b) 3 de junio, c) 9 de junio; **50)** (c); **51)** (c); **52)** (c); **53)** (e); **54)** a) $(2a-5b)(2a-b)$, b) $(a^6-1)(a^6-1)$, c) $(a^2-1)(a^2+1)$, d) $(a^2-6a+13)(a^2+6a+13)$, e) $(a+1)(a^2+8a+19)$; **55)** a) $(a-1)(a+1)(a-5)$, b) $(a+1)(a-5)(a-3)$, c) $(a-b)(a+b)(1-2ab)$, d) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^2-b^2+1)$, e) $(a+b)(b+c)(a-c)$; **58)** a) $2a-b$, b) $(a^2-6a+13)$, c) $2a$, d) $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$, e) 0, f) 2,

Scanned by CamScanner

g) 1, h) $\frac{16a^{15}}{1-a^{16}}$, i) $\frac{5}{a(a+5)}$, j) $\frac{1}{a+c}$, k) $\frac{a}{a^2-1}$, l) $a+b+c$; **59)** (b); **60)** a) 1, b) $\sqrt{\sqrt{7}-2}$, c) $5-\sqrt{2}$, d) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, e) $2+\sqrt{3}$; **61)** a) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$, b) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$, c) $\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$, d) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)$, e) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$; **63)** a) $\frac{1}{4}a^{\frac{1}{2}}$, b) $a-1$, c) 2, d) 1 e) $4a$; **64)** 108 obreros; **65)** (c); **66)** $163.\overline{3}$ metros; **67)** \$75; **68)** (d); **69)** (c); **70)** \$100; **71)** 24 días; **72)** 17 metros; **73)** 15 días; **75)** a) 0, b) 1, c) 0, d) 1, e) 0; **76)** (b); **77)** a) $N(\Lambda p(x,y))=6$, b) $N(\Lambda^c p(x,y))=36$; **79)** a) No es binaria interna, b) No existe neutro; **82)** (c); **83)** (c); **84)** (a); **85)** (a); **86)** 62 y 64; **87)** (d); **88)** $\Lambda p(x)=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$; **89)** $\Lambda p(x)=\{-2\}$; **90)** $x\in(-\infty,-\pi)$; **91)** $\Lambda p(x)=\{a,b\}$; **92)** a) $\Lambda p(x)=\{4\}$, b) $\Lambda q(x)=\{-2,0\}$, c) $\Lambda r(x)=\{13\}$, d) $\Lambda s(x)=\{-2,5\}$, e) $\Lambda t(x)=\{9\}$, f) $\Lambda m(x)=\{8\}$, g) $\Lambda n(x)=\{6\}$, h) $\Lambda o(x)=\varnothing$; **93)** a) $\Lambda p(x)=\left\{\frac{2}{3},4\right\}$, b) $\Lambda q(x)=\{-1,0\}$, c) $\Lambda r(x)=\left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$, d) $\Lambda s(x)=\{-1\}$, e) $\Lambda t(x)=\varnothing$, f) $\Lambda u(x)=(-\infty,-2]$, g) $\Lambda v(x)=\left\{-\frac{2}{3},2,\frac{1}{2}\right\}$; **94)** a) $\Lambda p(x)=\{3\}$, b) $\Lambda q(x)=\left\{-\frac{3}{2},3\right\}$; **95)** a) 10 minutos, b) 25 minutos, c) 5ta. noche, d) 7ma. noche; **96)** (a) ≈ 95 personas/mi^2, b) 2 026; **97)** a) $\approx 63\%$, b) 2 006; **98)** a) 120 mil millones de dólares, b) 2 003; **99)** a) 2 219 habitantes, b) 2 006; **100)** 100 filas; **101)** 240 pasos; **102)** \$25 500; **103)** bolígrafo: \$1.50, portaminas: \$0.80, caja de minas: \$0.50; **104)** 48 camisetas en buen estado y 8 camisetas con alguna falla; **105)** 100 socios; **106)** 18 l; **107)** A: ≈ 23 horas, B: ≈ 18 horas; **108)** \$10 000; **109)** $\frac{12}{5}$ horas; **110)** (a); **111)** a) $m=\pm 1$, b) No es posible; **113)** $\Lambda p(x)=\varnothing$, $\Lambda q(x)=\{54\}$, $\Lambda r(x)=\{-11\}$, $\Lambda t(x)=\{-16\}$, $\Lambda u(x)=\left\{\frac{59}{19}\right\}$; **121)** a) $\Lambda p(x)=\left(-1,\frac{1}{6}\right)$, b) $\Lambda q(x)=\mathbb{R}-\{2,3\}$, c) $\Lambda s(x)=\mathbb{R}$, d) $\Lambda t(x)=\varnothing$, e) $\Lambda r(x)=\left(-\infty,\frac{17+\sqrt{109}}{6}\right)$; **122)** $\Lambda p(x)=[-4,5]$, $\Lambda^c p(x)=(-\infty,-4)\cup(5,+\infty)$; **123)** $\Lambda p(x)=\left(-\infty,\frac{17}{6}\right]\cup\left[\frac{23}{4},+\infty\right)$, $\Lambda^c p(x)=\left(\frac{17}{6},\frac{23}{4}\right)$; **124)** a) $\Lambda p(x)=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$, $\Lambda^c p(x)=\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$; **125)** a) 7, b) 6, c) $(x^2-2x-3\le 0)\wedge(x\neq 3)$; **126)** [35 000, 60 000) dólares; **127)** a) $(-\infty,-13)\cup(15,+\infty)$; b) $(-1,2)\cup(2,3)$, c) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, d) $\mathbb{R}$, e) $\left(\frac{4-\sqrt{22}}{3},\frac{4+\sqrt{22}}{3}\right)$, f) $\left(-\infty,\frac{12-\sqrt{30}}{6}\right)\cup\left(\frac{12+\sqrt{30}}{6},+\infty\right)$, g) Si $a<\frac{2}{3}\vee a>2$ entonces $x>\frac{6-a}{3a-2}$, si $\frac{2}{3}<a<2$ entonces $x<\frac{6-a}{3a-2}$;

Scanned by CamScanner

128) a) $Ap(x) = [-2, -1) \cup (1, 5]$; b) $Aq(x) = (9, +\infty)$; c) $Ar(x) = [4, 8]$; d) $As(x) = (6, 10]$; e) $At(x) = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$; **142)** (a); **143)** (c); **144)** (d); **146)** a) Sí es binaria interna, c) 9 pares, d) Sí cumple, e) No es posible, f) Sí es binaria interna, g) No es binaria interna; **147)** a) 2^8 bytes, b) 2^{32} bytes, c) 2^{64} bytes; **148)** a) 350 formas, b) 14 formas; **149)** 2520 formas; **150)** 126 maneras; **151)** (d); **153)** 12 formas; **155)** (c); **156)** (c); **157)** $2^{-8}\binom{10}{8}$; **159)** $a^{50}\binom{100}{50}$; **160)** $a^{40}\binom{50}{40}$; **161)** 10; **162)** $(-1)^n a^{n(n-1)} n$; **166)** a) 0, b) 0, c) 1, d) 0, e) 0; **167)** a) 1, b) 1, c) 1, d) 0, e) 0; **168)** (e); **169)** (b); **170)** (e); **171)** $Ap(x) = \{106\}$; **172)** a) −1, b) 26 y 32; **173)** $a = 6$, $r = -\frac{1}{2}$; **174)** {52.5, 37.5, 22.5, 13.5} o {12, 24, 36, 54}; **175)** $a_7 = \frac{7}{81}$ o $a_7 = 5\,103$; **176)** \$4 075; **178)** a) 2/3, b) 9; **179)** Plan a); **180)** 512/211.

Capítulo 4. Funciones de una Variable Real

Autoevaluaciones

4.1 **2)** a) dominio, b) rango, c) argumento, d) dependiente, e) independiente; **3)** a) $dom\ f = \mathbb{R} - (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, b) $dom\ g = [-3, 3] - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; **4)** $rg\ f = (k, +\infty)$; **5)** $I = (2e, 7) \cup (7, +\infty)$ **4.2** **1)** a) ✓, b) X, c) X, d) ✓, e) X, f) ✓; **2)** $f(x)$: $y = 2$, $x = 0$, $dom\ f = [-1, 2]$, $rg\ f = [1, 5]$, $g(x)$: $y = 1$, $x = -3 \vee x = 1 \vee x = 5$, $dom\ g = [-5, 6]$, $rg\ g = [-1, 1]$, $h(x)$: $y = -4$, $x = -4$, $dom\ h = [-5, 1]$, $rg\ h = [-4, 2]$ **4.3** **1)** a) Sí, depende de que $rg\ f = Y$, b) Sí, depende de que $rg\ f \neq Y$, c) No, d) Sí; **2)** a) Falsa, b) Falsa, c) Verdadera, d) Falsa **4.4** **1)** $a = -2$, Kevin está en lo correcto; **2)** a) $f_3(x)$, b) $f_2(x)$, c) $f_4(x)$, d) $f_1(x)$; **4)** a) $f(x) = 5x + 3$, b) $f(x) = -2x$, c) $f(x) = -8x + 8$, d) $f(x) = \pi$; **5)** $f(x) = -3.5x + 35$, $x \in [0, 10]$ **4.5** **2)** a) $a = -\frac{3}{4}$, $b = 12$, $c = -21$ y $\Delta = 81$, b) $f(x) = -\frac{3}{4}(x - 8)^2 + 27$, c) $V(8, 27)$, $rg\ f = (-\infty, 27]$; **3)** $V(1, -4)$, eje de simetría: $x = 1$, intersecciones: (−1, 0), (3, 0) y (0, −3) **4.6** **1)** $dom\ f = [-3, 3]$, $rg\ f = [-1, 1]$; **2)** a) 1, b) −3, c) 0.3; **3)** -3, $x + 4$, -5, -1, $2x - 1$; **4)** a) Falsa, b) Falsa **4.7** **1)** a) 87, b) 5, c) 4, d) 0, e) −1, f) 1, g) 1, h) 1; **2)** a) Verdadera, b) Falsa; **3)** a) $Ap(x) = \{0, 1, 2\}$, b) $Aq(x) = \{-2, 0, 2\}$ **4.8** **1)** b) $dom\ g = [1, 3]$, $rg\ g = [1, 4]$ **4.9** **2)** a) $[-1, 1]$, b) $[-1, 0) \cup (0, 1)$, c) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, d) $[-1, 0) \cup (0, 1]$; **3)** a) $(g \circ f)(x) = 1 - x^2$, $\forall x \in [-1, 1]$, b) No es posible; **4)** $\mu(f(x)) = \begin{cases} 1, & x \in [-3, -1) \cup [0, 3] \\ 0, & x \in [-1, 0) \end{cases}$,

Scanned by CamScanner

$sgn(1-f(x)) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,0) \cup (0,1) \\ 0, & x \in \{-3,0,1\} \\ -1, & x \in (-3,-1) \cup (1,3] \end{cases}$ **4.10** 1) $h(x) = 5x + 4$; 2) a) Falsa, b) Falsa; 3) a) $f^{-1}(x) = x^2 + 1$, $x \geq 0$, $g^{-1}(x) = 4x - 3$, $x \in \mathbb{R}$, b) Verdadera **4.11** 1) a) Sí, b) No, c) No, d) No, e) Sí; 2) a) 0 es una raíz de multiplicidad 2, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ es una raíz de multiplicidad 2 y $-\frac{7}{2}$ es una raíz de multiplicidad 1, b) El residuo es 0, c) El residuo es 80; 4) $p(x) = -3x(x-1)^2(x^2-4)$ **4.12** 1) a) Impropia, $k = 0$, b) Propia, c) Impropia, $k = 2$, d) Impropia, $k = 1$, e) Impropia, $k = 4$; 2) a) Oblicua, pendiente: -8, b) Horizontal, pendiente: 0, c) Horizontal, pendiente: 0, d) Oblicua, pendiente: $-\frac{1}{5}$; 3) Falsa; 4) a) -3, b) $f(x) = \frac{-5x-1}{x^2-4}$; 5) $X = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, Asíntota horizontal $y = 0$, Asíntotas verticales en $x = -\frac{3}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$ **4.13** 1) a) 3, b) $Ap(x) = \emptyset$, c) 1; 2) a) $g(x)$, b) $f(x)$, c) $h(x)$; 3) c) I) $\frac{1}{2}$, II) $\frac{1}{4}$, III) $\frac{1}{8}$, IV) $\frac{1}{16}$, d) [0, 1], [1, 2] y [2, 3] **4.14** 1) Falsa; 2) 3; 3) a) $f^{-1}(x) = \begin{cases} ln(x+1)+2, & -1 < x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$; 4) $Ap(x) = \{5\}$; 5) $(-1,0) \cup (0,1)$.

Ejercicios Propuestos

3) a) 1, b) 0, c) 0, d) 1, e) 0; 5) a) $\mathbb{R} - \{-1,0,1\}$, b) $[0,+\infty)$, c) $[-\pi,+\infty)$, d) $\mathbb{R}$, e) $\mathbb{R} - \{-1,-2\}$, f) [0, 4], g) [−2, 3], h) $\mathbb{R}$; 6) $[4,+\infty)$; 7) III) a) VD: posición, VI: tiempo, b) VD: potencia, VI: velocidad angular, c) VD: energía cinética, VI: velocidad, d) VD: temperatura, VI: posición; 8) (a); 9) 0; 10) a) $(0,+\infty)$, b) $\mathbb{R}$, c) $(-1,+\infty)$; 13) Funciones: (a), (e), No son funciones: (b), (c), (d); 15) a) $-h-3$, b) $3a^2+3ah+h^2$, c) $-\frac{1}{ax}$, d) $-\frac{1}{t+1}$, e) $\frac{-2a}{x-a}$ si $x < 0$, y 2 si $x \geq 0$; 16) a) $[-10,4]$, b) $[-10,3]$, c) -1, d) $Ap(x) = \left\{-4,-3,-2,-1,0,1,\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right\}$, e) $Aq(x) = \emptyset$; 17) a) 0, b) 1, c) 1, d) 1, e) 0; 18) (d); 19) (d); 20) a) Inyectiva, b) Creciente, c) Estrictamente creciente, d) Decreciente, e) Estrictamente decreciente; 22) (b); 23) a) Ni par ni impar, b) Ni par ni impar, c) Ni par ni impar, d) Par, e) Impar; 24) b) Y={0, 1, 5}, c) I) 1, II) 0, III) 1; 25) a) $(-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$, b) $Ap(z) = \{1\}$, c) Ni par ni impar, d) No es periódica, e) Inyectiva; 26) (c); 27) (c); 29) a) 0, b) 0, c) 1, d) 0, e) 1; 31) (e); 32) (e); 33) $f(x) = \left(\frac{\pi+1}{3}\right)x + \left(\frac{2\pi-1}{3}\right)$; $g(x) = \frac{x}{2}$; 34) a) $dom\ h = [0,8]$, $rg\ h = \left[8, \frac{72}{5}\right]$; 35) a) 72.5 °C, c) $T_1(x) = 100x$, $T_2(x) = 30x + 40$, $T_3(x) = -5x + 100$; 37) $V(m) = 2m + 290$; 38) a) $R(C) = 0.0015\,C - 0.16$, b) 0.23; 39) c) 5 años; 40) $q = 450$, $p = \frac{19}{2}$

Scanned by CamScanner

44) a) $x=-2$, b) $Y=[-9,+\infty)$; **45)** $k\in\left(\frac{1}{8},+\infty\right)$, $rg\,f=\left[\frac{15}{8},+\infty\right)$; **46)** $h(x)=-\frac{9}{5}x+\frac{14}{5}$, $f(x)=a\left(x+\frac{26}{9}\right)\left(x-\frac{14}{9}\right)$, $a>0$; **47)** (c); **48)** $f(x)=-(x+1)(x-5)$, $g(x)=(x-2)(x+3)$; **49)** $f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$; **50)** a) $(1,3)$ *min*, b) 2 *min*; **51)** a) 8 *min*, b) $t\geq 16$ *min*; **53)** a) $2h$ o $4h$; **54)** a) 25.34 *cm/s*, b) 0 *cm/s*; **55)** (a); **56)** a) $[3,+\infty)$, b) $(-\infty,1)\cup\{3\}$; **57)** a) 1; **58)** (c); **59)** (b); **60)** (b); **61)** $f(x)=\begin{cases}2x+6, & x\leq -2\\ -x, & -2<x\leq 0\\ x, & 0<x<2\\ -2(x-3)(x-1), & x\geq 2\end{cases}$; **62)** a) \$30, b) \$72.50; **63)** (c); **64)** 1. Ing. en Petróleo, 2. Ing. Mecánica, 3. Biología Marina; **65)** (d); **66)** (d); **67)** a) 0, b) 0, c) 0, d) 0, e) 1; **68)** a) $dom\,f=\mathbb{R}$, $Ap(x)=\{2+\sqrt{2},2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2},-2-\sqrt{2}\}$, b) $rg\,f=[-1,+\infty)$, c) $x\in[-3,-1]\cup[1,3]$; **69)** a) \$6, b) \$13.20, c) $B(x)=\begin{cases}10 \text{ para } 2\leq x<2.5\\ 12 \text{ para } 2.5\leq x<3\end{cases}$, d) $B(x)=2[\![2x]\!]+2, x\geq 0$, e) \$8, f) 5.5 *kg*, g) \$24, h) 4 *kg*, \$18; **70)** (a); **71)** (d); **72)** a) Sí es continua, b) No es periódica, c) Ni par ni impar, d) $[0,+\infty)$, e) 338 250; **73)** a) Es binaria interna, b) No existe neutro; **75)** (e); **76)** a) 1, b) 0, c) 1, d) 1, e) 1; **77)** a) 0, b) 1, c) 1, d) 0, e) 1; **78)** (b); **79)** a) $(x-4)^3$, b) $(-x)^3$, c) $-x^3$, d) $4x^3$, e) $\frac{1}{4}x^3$; **85)** (d); **86)** 1; **87)** a) Sí es binaria interna, b) Sí es conmutativa, c) Sí es asociativa, d) $n(x)=0$, e) Sí es posible; **88)** No es binaria interna; **89)** a) 0, b) 0; **91)** $(3f-2g)(x)=\begin{cases}1-2x, & x<-4\\ -3+2x, & -4\leq x\leq 1\\ 5x-6, & 1<x\leq 4\\ x-2, & x>4\end{cases}$; **92)** (c); **93)** a) No es posible determinar la función compuesta, b) $i(x)=\begin{cases}0, x=1\\ 2, x>1\end{cases}$, c) $j(x)=\begin{cases}1, x=1\\ 3, x>1\end{cases}$, d) $i(x)$; **94)** a) 0, b) 0, c) -1, d) No es posible, e) -2, f) -1, g) -1, h) -4, i) $-\frac{1}{2}$, j) 1, k) $(h\circ f)(x)=\begin{cases}2-x, & x<-2\\ x^2-1, & -2\leq x\leq 1\\ -1, & x>1\end{cases}$; **95)** $(g\circ f)(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\leq -3\\ \sqrt{3-x^2-2x}, & -3<x<0\\ 2x+4, & x\geq 0\end{cases}$; **96)** $h(x)=x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$; **97)** (c); **98)** (b); **99)** (d); **100)** (d); **101)** (a); **102)** (a); **103)** (b); **106)** $f^{-1}(x)=\begin{cases}x+1, x<0\\ 1+\sqrt[3]{x}, x\geq 0\end{cases}$; **107)** $f^{-1}(x)=\begin{cases}-2+\sqrt{1-x}, x\leq 1\\ -2-\sqrt{x-1}, x>1\end{cases}$, $P\left(\frac{-5+\sqrt{3}}{2},\frac{-5+\sqrt{3}}{2}\right)$; **108)** b) $\frac{x-1}{2}$, d) -13, e) $6x-7$, f) $\frac{8}{x}$, h) $\frac{8}{x^2}$, i) $Ap(x)=\{-4,4\}$; **109)** (b); **110)** a) 1, b) $\sqrt{\frac{x+1}{x}}$, $x>0$, c) x^2-1, d) $\frac{1}{x^2(x^2-2)}$; **111)** a) $\frac{8}{x}$, es la misma que f, b) $\frac{8}{x^2}$, par, c) $Ap(x)=\{2\}$; **112)** a) Sí, b) No, c) No, d) Sí, e) No; **114)** a) 1, b) 0, c) 1, d) 0, e) 1; **115)** $k\in(1,3)$; **116)** (c); **117)** (b); **118)** (d); **119)** $\{-4,2,3\}$;

Scanned by CamScanner

120) $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2$; **121)** $\left\{18, -\frac{846}{343}\right\}$; **123)** $(x-1)^2\,(x-3)^2\,x$; **124)** a_1; **125)** 17 puntos; **126)** (a); **127)** (a); **128)** (b); **129)** a) AH: $y = 1$, AV: $x = -8, (0, 1/8), (-1, 0)$, b) AH: $y = 0$, No hay AV, $(0, 2)$, c) AH: $y = 1$, No hay AV, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, d) AH: $y = -2$, AV: $x = \pm 3$, $(0, 0)$, e) No hay AH, AV: $x = \pm 1$, $(0, 0)$, f) No hay AH, AV: $x = \pm 2$, $(0, 0)$; **130)** $a = 8, b = 2, c = -3$; **131)** $f(x) = \frac{2x-8}{x+4}$; **132)** $f(x) = \frac{x+12}{x^2-x-6}$; **133)** Si $a \neq 0$, $y = ax + (ad + b)$; **134)** a) AO: $y = x$, No hay AV, b) AV: $x = 1$, AO: $y = x - 1$, AH: No hay, c) AO: $y = x$, No hay AV, d) AV: $x = -2$, AH: $y = 3$; e) AV: $x = \pm 5$, AH: $y = -3$, f) AV: $x = 2$, AO: $y = x + 2$; **135)** (V); **137)** a) 1, b) 0, c) 1, d) 1; **138)** (II); **139)** (c); **140)** (d); **141)** (d); **142)** (e); **144)** (c); **145)** (e); **146)** $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2(3^x), x \geq 1 \\ -6(2^x), x < 1 \end{cases}$; **147)** (e); **148)** a) 50 bacterias, b) $\approx$ 155 bacterias; **151)** a) 0, b) $\frac{1}{10}$, c) $log_3(12)$, d) $\frac{49}{5}$, e) 24, f) 360, g) $\frac{86}{9}$; **152)** a) $5c + 4$, b) $\frac{a+3}{2(1+a)}$, $a \neq -1$, c) $\frac{b}{1-a}$, $a \neq 1$, d) $\frac{2x+y}{3x}$, $x \neq 0$, e) $(-\infty, -1)$, f) -1; **153)** a) $Ap(x) = \{3\}$, b) $Aq(x) = \{-3\}$, c) $Ar(x) = \{-3, 1\}$, d) $As(x) = \left\{\frac{log_2(9)}{3}\right\}$, e) $At(x) = \{1\}$, f) $Au(x) = \{0\}$, g) $Av(x) = \left\{ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$, h) $Aw(x) = \{0, 1\}$, i) $Ai(x) = \{-1, 1\}$; **154)** a) $Ap(x) = \varnothing$, b) $Aq(x) = (-\infty, 1) \cup \left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$, c) $Ar(x) = (-\infty, -1) \cup \left(log_2\left(\frac{3}{4}\right), 0\right)$; **155)** a) $Ap(x) = \{2\}$, b) $Aq(x) = \{-1\}$, c) $Ar(x) = \{1 + e\}$, d) $As(x) = \{100\}$, e) $At(x) = \{1, 4\}$, f) $Au(x) = \{1 - e, 0\}$, g) $Av(x) = \left\{1, 4, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, h) $Aw(x) = \{a^b\}$; **156)** a) $Ap(x) = (-3, -2) \cup (1, 2)$, b) $Aq(x) = \left[2, \frac{11}{4}\right) \cup [4, +\infty)$, c) $Ar(x) = (2, 3) \cup \left(\frac{27}{8}, 4\right)$, d) $As(x) = [1, 2)$, e) $Au(x) = [2, 4)$, f) $At(x) = (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$; **158)** (e).

Capítulo 5. Trigonometría

Autoevaluaciones

5.1 **2)** a) 1, b) 0, c) 1, d) 1, e) 1, f) 0; **3)** a) 12°, b) 10°, c) 500°, d) 135°; **4)** a) $\frac{5}{6}\pi$ *radianes*, b) $\frac{5}{12}\pi$ *radianes*, c) $\frac{2}{3}\pi$ *radianes*; **5)** Cuadrantes: a) II, b) IV, c) III, d) I, e) II

5.2 **1)** a) $sen(\theta) = b, cos(\theta) = -a, tan(\theta) = -\frac{b}{a}, cot(\theta) = -\frac{a}{b}, sec(\theta) = -\frac{1}{a}, csc(\theta) = \frac{1}{b}$, b) $\frac{6-\sqrt{3}}{2}$; **2)** $sen(165^o) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $sen(195^o) = sen(345^o) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; **3)** 4

Scanned by CamScanner

5.3 1) a) $|A| = \frac{1}{10}$, $T = 4$, Desfase: 2 unidades a la derecha, c) 1; **2)** 62; **3)** h es par; **4)** (d) **5.4** 1) a) $\mathbb{R}$, -1, 0, 1, $(-2, 2)$, $y = 2$, $y - 2$; **2)** $\omega = \frac{\pi}{3}$; **3)** Falsa; **4)** a) $\sqrt{1-t^2}$, b) $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, c) $\frac{1}{t^2}$ **5.5** **2)** $3 - 2\sqrt{2}$; **3)** a) $cos(\phi) = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $tan(\phi) = -\frac{\sqrt{3}}{12}$, b) $\frac{8\sqrt{3}}{47}$ **5.6** 1) a) $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$, b) $Aq(x) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; **2)** b) $Ap(x) = \left\{-\frac{\pi}{8}\right\}$.

Ejercicios Propuestos

2) a) 0, b) 0, c) 1, d) 0, e) 0; **3)** $-101°$; **4)** a) Adyacentes, b) Complementarios, c) Consecutivos; **5)** $\frac{\pi}{8}$; **6)** 60°; **7)** 65°, 25°; **8)** a) $\frac{\pi}{12}$, b) $\frac{\pi}{10}$, c) $\frac{7\pi}{36}$, d) $\frac{13\pi}{36}$, e) $\frac{5\pi}{9}$, f) $\frac{35\pi}{36}$, g) $\frac{11\pi}{9}$, h) $\frac{31\pi}{18}$, i) $-\frac{10\pi}{9}$, j) $\frac{5\pi}{2}$, k) $\frac{4\pi}{9}$, l) $\frac{76\pi}{45}$, m) $-\frac{53\pi}{36}$, n) $\frac{100\pi}{9}$, o) $-\frac{175\pi}{9}$; **9)** a) 20°, b) 18°, c) 36°, d) $\frac{45°}{2}$, e) $\frac{315°}{2}$, f) 120°, g) 90°, h) 45°, i) 108°, j) 144°, k) 216°, l) 50°, m) $-324°$, n) $-\frac{1080°}{7}$, o) $-70°$; **10)** 1; **12)** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) 1, c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, e) 0, f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, g) 4, h) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, i) 2, j) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; **13)** a) $sen(\alpha) = 1$, $cos(\alpha) = 0$, $tan\,(\alpha)$ no está definida, $cot\,(\alpha) = 0$, $sec(\alpha)$ no está definida, $csc(\alpha) = 1$, b) $sen(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $cos(\alpha) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $tan(\alpha) = -\frac{1}{2}$, $cot(\alpha) = -2$, $sec(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $csc\,(\alpha) = \sqrt{5}$, c) $sen\,(\alpha) = -\frac{7\sqrt{85}}{85}$, $cos(\alpha) = \frac{6\sqrt{85}}{85}$, $tan(\alpha) = -\frac{7}{6}$, $cot\,(\alpha) = -\frac{6}{7}$, $sec(\alpha) = \frac{\sqrt{85}}{6}$, $csc(\alpha) = -\frac{\sqrt{85}}{7}$, d) $sen(\alpha) = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $cos(\alpha) = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $tan(\alpha) = \frac{2}{3}$, $cot(\alpha) = \frac{3}{2}$, $sec(\alpha) = -\frac{\sqrt{13}}{3}$, $csc(\alpha) = -\frac{\sqrt{13}}{2}$; **14)** a) $cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $tan(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $cot(\alpha) = \sqrt{3}$, $sec(\alpha) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $csc(\alpha) = -2$; b) $sen(\alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $tan(\alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{3}$, $cot(\alpha) = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $sec(\alpha) = \frac{4}{3}$, $csc(\alpha) = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$, c) $sen(\alpha) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $cos(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $cot(\alpha) = \frac{1}{3}$, $sec(\alpha) = \sqrt{10}$, $csc(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{3}$, d) $sen(\alpha) = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $cos(\alpha) = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $tan(\alpha) = \frac{3}{2}$, $sec(\alpha) = -\frac{\sqrt{13}}{2}$, $csc(\alpha) = -\frac{\sqrt{13}}{3}$, e) $sen(\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $cos(\alpha) = -\frac{1}{4}$, $tan(\alpha) = -\sqrt{15}$, $cot(\alpha) = -\frac{\sqrt{15}}{15}$, $csc(\alpha) = \frac{4\sqrt{15}}{15}$, f) $sen(\alpha) = \frac{1}{3}$, $cos(\alpha) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $tan(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $cot(\alpha) = -2\sqrt{2}$, $sec(\alpha) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$; **16)** a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, b) 0, c) 0, d) -1; **17)** a) 12, b) 2, c) 20, d) 0, e) 20, f) 2; **18)** (b); **19)** $2e^{\sqrt{3}/2}$; **20)** 3; **21)** (d); **22)** (c); **23)** (d); **25)** a) $\begin{cases} sen\,(\pi x) + 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & |x| > 1 \\ sen^2(\pi x), & -1 \le x \le 0 \vee (x = 1) \end{cases}$, b) $Y = rg\,(g \circ f) = \{-1\} \cup [0, 2]$;

Scanned by CamScanner

27) (c); **30)** a) $f(x) = \frac{16}{9}\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$, $h(x) = 2\,sen(2\pi x) - 3$, b) $rg\ f = [-1,+\infty)$, $rg\ h = [-5, -1]$; **32)** (b); **33)** (d); **34)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **35)** (a); **36)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; **37)** a) $-\sqrt{1-9x^2}$, b) $\frac{-\sqrt{1-9x^2}}{3x}$, c) $\frac{-3x}{\sqrt{1-9x^2}}$, d) $\frac{1}{3x}$, e) $\frac{-1}{\sqrt{1-9x^2}}$; **38)** (d); **39)** a) $X = [-4, 0]$, $Y = [0, 2\pi]$, c) $f^{-1}(x) = 2cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2$, $\forall x \in [0, 2\pi]$; **40)** a) $X = [-2, -4/3]$, b) $f(x) = \frac{1}{3}(sen(x) - 5)$, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; **41)** $rg\ g = \{-4, -1, 0, 2\}$; **42)** a) No, b) No, c) No, d) No, e) Sí, f) No, g) Sí, h) No, i) Sí, j) Sí, k) Sí, l) Sí, m) Sí, n) Sí, o) No; **44)** a) $sen(\alpha)$, b) $sen^2(\alpha)\ tan^2(\alpha)$, c) $sen^2(2x)$, d) 2, e) $cos(x)$, f) $sen(x)$, g) -1, h) $1 + cos(3x)$, i) 0; **45)** a) $\Delta = cos(x)$, b) $\Delta = 2sen^2(x)\ cos(x)$, c) $\Delta = 2$, d) $\Delta = 0$, e) $\Delta = sen^2(y)$, f) $\Delta = sec(x)$, g) $\Delta = csc^4\left(\frac{3x}{2}\right)$, h) $\Delta = 1$, i) $\Delta = 1/2$, j) $\Delta = cot(x)$, k) $\Delta = tan(x)$, l) $\Delta = 2cos(x) - 1$, m) $\Delta = tan^2(x)$, n) $\Delta = tan(n\alpha)$; **46)** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $2 - \sqrt{3}$, d) $\sqrt{3} - 2$, e) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, f) $-(\sqrt{2} + \sqrt{6})$; **47)** a) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{8}$, b) $\frac{2(\sqrt{10}-1)}{9}$, c) $18 - 5\sqrt{14}$, d) 3/4; **49)** a) $cot(10°)$, b) 1/64; **51)** a) $\frac{t^4 - 2t^3 - 2t^2 + 2t + 1}{-t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t - 1}$, b) $\frac{t^6+2t^5-t^4-4t^3-t^2+2t+1}{8t^4}$; **53)** a) $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, b) $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right\}$, c) $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$, d) $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$, e) $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}\right\}$, f) $Ap(x) = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$, g) $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right\}$, h) $Ap(x) = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, i) $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\right\}$, j) $Ap(x) = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$, k) $Ap(x) = \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$, l) $Ap(x) = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\right\}$, m) $Ap(x) = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\}$, n) $Ap(\beta) = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}\right\}$; **54)** a) $Ap(x) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, b) $Ap(x) = \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$, c) $Ap(x) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$, d) $Ap(\theta) = \left[0, \frac{1}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right] \cup \left[\frac{11}{12}, 1\right]$, e) $Ap(x) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, f) $Ap(x) = \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, g) $Ap(\theta) = \varnothing$, h) $Ap(\alpha) = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, i) $Ap(x) = (0, \pi]$, j) $Ap(x) = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$; **55)** $A(p(x) \to q(x)) = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; **56)** $A(p(x) \to q(x)) = [0, \pi] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$; **57)** a) $Ap(x) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, b) $Aq(x) = (0, 2\pi) - \{\pi\}$; **58)** a) $|A| = 20$, $T = \frac{6}{5}$, b) 120 *mm Hg*, d) $t_1 = \frac{3}{10}\ s$, $t_2 = \frac{9}{10}\ s$.

Scanned by CamScanner

Autoevaluaciones

6.1 1) a) ✗, b) ✓, c) ✓, d) ✓, e) ✗; 2) a) 3×7, b) 5×3, c) 5×1, d) 4×4; 3) $a_{ij}=\begin{cases}1, & i\neq j\\ 0, & i=j\end{cases}$; 4) a) No es escalonada, sí es triangular superior, b) 3, −6, 10, 1 y 2, c) 5, 1, 10, 0 y 0, d) $x=10$; 5) $M=\begin{pmatrix}\pi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\pi\end{pmatrix}$ **6.2** 2) Sí cumplen la igualdad; 3) a) Verdadera, b) Falsa; 4) $z=2$ **6.3** 1) $R=A$; 3) Sí; 4) $t=0$ **6.4** 1) $t=70$; 2) Verdadera; 3) No es posible; 4) $z=a^2-a+1$ **6.5** 1) a) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$; 2) $x_1=x_2=\frac{4}{3}$, $x_3=-2$; 3) $x_1=100\ u$, $x_2=150\ u$, $x_3=50\ u$ **6.6** 1) $t=2$; 2) $Ap(x,y)=\mathbb{Z}$; 3) $Ag(x,y)=\{(2,-2)\}$; 4) $x=y=\log_2(5)$ **6.7** 1) a) ✓, b) ✗, c) ✗, d) ✓, e) ✓, f) ✗; 3) Por ejemplo: $P_1(1,1)\in Ap(x,y)$ y $P_2(-1,3)\in Ap(x,y)$; 4) $(-1,7)$ **6.8** 1) Un posible predicado es $p(x,y)$: $\begin{cases}y<2-|x|\\ y\geq -1\\ 2y-4\geq x^2\end{cases}$; 2) Falsa.

Ejercicios Propuestos

2) a) matriz cuadrada, triangular superior, triangular inferior, diagonal, $tr(A)=1$, orden 2×2, b) matriz rectangular, orden 4×3, c) matriz cuadrada, diagonal, triangular inferior, triangular superior, orden 3×3, $tr(C)=3\pi+3$, d) matriz cuadrada, matriz identidad, orden 2×2, $tr(D)=2$, e) matriz columna, orden 2×1; 3) (b); 4) (b); 5) a) 0, b) 0, c) 1, d) 0, e) 0; 6) a) 0, b) 1, c) 1, d) 0, e) 0; 7) a) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, b) $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, c) $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, d) $D=\begin{pmatrix}4 & 9 & 16 & 25\\ 9 & 16 & 25 & 36\\ 16 & 25 & 36 & 49\\ 25 & 36 & 49 & 64\end{pmatrix}$, e) $E=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, f) $F=\begin{pmatrix}4 & 6 & 8 & 10\\ 4 & 8 & 10 & 12\\ 6 & 8 & 12 & 14\\ 8 & 10 & 12 & 16\end{pmatrix}$, g) $G=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$, h) $H=\begin{pmatrix}43 & 43 & 0 & 43\\ 47 & 0 & 47 & 0\\ 0 & 53 & 0 & 53\\ 61 & 0 & 61 & 0\end{pmatrix}$, i) $K=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$; 10) a) I) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, II) $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$,

Scanned by CamScanner

b) I) 100, II) $2^{100}-1$; **12)** $A=\begin{pmatrix}4&-1&0\\1&0&2\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1/2&0\\1/2&0&1\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}$; **13)** a) $0_{3\times3}$,

b) $\begin{pmatrix}-1&1&-12\\3&3+ln(2)&2\\2\sqrt{2}-1&7&ln(3)+1\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}5&-1&-6\\2&7&0\\\sqrt{2}&1&6\end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix}2+\sqrt{2}&1&-12\\5+3\sqrt{2}+2ln(2)&6+ln(2)&6\\8+2\sqrt{2}+\sqrt{2}ln(3)&6+ln(3)&0\end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix}5+\sqrt{2}&-23-ln(2)&-4-6ln(3)\\3\sqrt{2}+2ln(2)&8-2ln(2)&11\\7+\sqrt{2}ln(3)&4+2\sqrt{2}+ln(2)+ln(3)&\sqrt{2}+3\end{pmatrix}$; **14)** a) $D=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, b) $E=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

15) $D=\begin{pmatrix}1/2&3/2\\1&-1\\-1/2&-2\end{pmatrix}$; **16)** $C=\begin{pmatrix}4&-4\\4&4\end{pmatrix}$; **17)** $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}1/3&1/3\\1/30&-1/60\end{pmatrix}$; **18)** $(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2&0\\-1/2&1\end{pmatrix}$;

19) a) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, b) $A^{-1}=A-2I$, c) $m=\pm\sqrt{2}$,

$B_1^{-1}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1&0\\0&-\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$, $B_2^{-1}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}-1&0\\0&\sqrt{2}-1\end{pmatrix}$; **20)** a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/5&3/5\\0&1/5&-2/5\\1/2&1/10&-7/10\end{pmatrix}$,

b) $kA^{-1}=\begin{pmatrix}9/22&1/22&3/22\\-1/11&1/22&3/22\\-6/11&-5/22&-2/11\end{pmatrix}$, c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/2&-3\\0&0&2\\0&1/2&1\end{pmatrix}$, d) $f(A)=\begin{pmatrix}97&118&141\\218&270&318\\341&418&497\end{pmatrix}$;

23) a) $\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$; **24)** a) $C=\begin{pmatrix}-6&60&48&18\\24&-6&42&-24\\-99&72&9&48\end{pmatrix}$, b) $D=\begin{pmatrix}3&6&3&-3\\-9&0&3&9\\12&15&-3&-30\end{pmatrix}$,

c) $E=\begin{pmatrix}3&12&0&9\\-3&15&27&3\\6&21&6&3\\9&3&12&0\end{pmatrix}$, d) $F=\begin{pmatrix}5/168&-31/252&17/504&131/504\\-11/168&1/252&97/504&-53/504\\-1/168&23/252&-37/504&41/504\\23/56&1/28&-15/56&3/56\end{pmatrix}$, e) $G=F$; **25)** a) 0,

b) 1; **26)** a) $\begin{pmatrix}1/2&3/2\\1&-1\\-1/2&-2\end{pmatrix}$, b) No es idempotente; **27)** a) 0, b) 0; **28)** (a); **29)** (a); **30)** (a);

31) (b); **32)** (a); **37)** a) 0, b) 0, c) 0; **38)** a) 40, b) 3, c) −60, d) −36; **39)** a) 0, b) 0, c) $\mathbb{R}$,

d) $\varnothing$; **40)** 1/3; **41)** a) −1/5, b) 10, c) −42, d) 0, e) −1/640, f) 9/4, g) 1; **42)** $Ap(x)=\{1,2\}$;

43) a) 13, b) −468, c) −52, d) −1/13; **44)** $Ap(x)=\{1\}$; **45)** $A^cp(x)=\mathbb{R}-\{-4,5\}$;

47) $\begin{pmatrix}-\sqrt[6]{e}&0&0\\0&\sqrt[6]{e}&0\\0&0&-\sqrt[6]{e}\end{pmatrix}$; **48)** a) 0, b) 0, c) 0, d) 1, e) 0; **49)** (a); **50)** $Ap(x)=\left\{\begin{pmatrix}-2&3\\2&-1\end{pmatrix}\right\}$;

Scanned by CamScanner

51) a) No lo satisface, b) $\begin{pmatrix} \left(\frac{1-e}{1+e^3}\right) \\ -\left(\frac{1+e^2}{1+e^3}\right) \end{pmatrix}$; **52)** a) Inconsistente: $a = 2 \vee a = 0$, b) Consistente Solución única: $a \neq \pm 2 \wedge a \neq 0$, c) Consistente Infinitas soluciones: $a = -2$; **53)** a) Consistente Solución única: $a \neq -\frac{6}{13}$, b) Consistente Infinitas soluciones: No existe valor de a, c) Inconsistente: $a = -\frac{6}{13}$; **54)** $M = \begin{pmatrix} -39 & -44 \\ 17 & 19 \end{pmatrix}$; **56)** a) Consistente Solución única: No es posible, b) Consistente Infinitas soluciones: $m = 2$, c) Inconsistente $m \neq 2$; **57)** Inconsistente; **58)** $a = -4$; **59)** a) 0, b) 1; **60)** $Ap(x, y, z) = \{(2, -2, 1)\}$; **61)** Sí es posible, 3 monedas de 1 centavo, 4 monedas de 5 centavos y 6 monedas de 10 centavos; **62)** (d); **63)** 0; **64)** a) (2, 1); b) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, c) (4, 3), d) (10, 100), (100, 10), e) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, f) (5, 12), (12, 5); **65)** (e); **66)** Todos tienen solución; **67)** a) 1, b) 0, c) 1; **68)** $Ap(x,y) = \{(\sqrt{5}, \sqrt{7}), (-\sqrt{5}, \sqrt{7}), (\sqrt{5}, -\sqrt{7}), (-\sqrt{5}, -\sqrt{7})\}$; **69)** $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; **70)** $y = \left(\frac{3\sqrt{5}-1}{4}\right)x + 1$; **71)** (c); **73)** a) (15, 10); **74)** (0, 0), (20, 0), (0, 10), (12, 6); **75)** (50, 0), (0, 50/3), (20, 0), (0, 15); **76)** (0, 0), (0, 2), (4, 2), (5, 0); **77)** (b); **78)** (d); **80)** (b); **82)** (e); **83)** (a); **84)** (c); **85)** (d); **86)** (a); **87)** (c); **88)** (d); **89)** (a); **90)** (a).

Scanned by CamScanner

BIBLIOGRAFÍA

TEXTOS

Andonegui, M. (2006). *Razones y Proporciones.* Venezuela: Federación internacional de Fe y Alegría, Serie Desarrollo del pensamiento matemático N° 11.

Andreescu, T. (2014). *Essential Linear Algebra with Applications: A Problem-Solving Approach.* USA: Springer Science & Business Media.

Andreescu, T., & Feng, Z. (2005). *103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team.* USA: Springer Science & Business Media.

Andreescu, T., & Gelca, R. (2007). *PUTNAM and BEYOND.* USA: Springer Science & Business Media.

Ansaloni, A. (1998). *Matemáticas Preuniversitarias: Tomo III Inecuaciones* (Segunda Ed). Venezuela: Editorial Reverté.

Apostol, T. M. (1976). *Introduction to Analytic Number Theory* (Primera Ed). USA: Springer-Verlag New York.

Aref, M. N., & Wernick, W. (2010). *Problems & Solutions in Euclidean Geometry.* USA: Dover Publications Inc.

Becerra, J. M. (2005). *Temas selectos de Matemáticas: la amena forma de aprender más* (Primera Ed). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Calvache, G., Rosero, T., & Yacelga, M. (2010). *Geometría Plana y del Espacio Geometría Analítica Dibujo.* Ecuador: EPN, Escuela Politécnica Nacional.

Carbo, R., & Domingo, L. (1987). *Álgebra Matricial y Lineal.* México: McGraw Hill Interamericana, Serie Schaum.

Carreño, X., & Cruz, X. (2008). *Álgebra* (P. González, Ed.). Chile: McGraw Hill Interamericana.

Cirrito, F., & Tobin, P. (2004). *Mathematics Standard Level* (Tercera Ed). Australia: IBID Press.

Clemens, S., O´Daffer, P., & Cooney, T. (1998). *Geometría con Aplicaciones y Solución de Problemas.* México: Addison Wesley Longman.

Cole, K. C. (1999). *El Universo y la taza de té: las matemáticas de la verdad y la belleza.* Ediciones B.

Departamento de Matemáticas. (2015). Números Complejos. En *Material del curso Variable Compleja.* España: Universidad de Zaragoza.

FCFM Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. (2013a). Funciones. En *Material del curso Introducción al Álgebra.* Chile: Universidad de Chile.

Scanned by CamScanner

FCFM Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. (2013b). Principio de Inducción. En *Material del curso Introducción al Álgebra*. Chile: Universidad de Chile.

FCFM Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. (2013c). Relaciones. En *Material del curso Introducción al Álgebra*. Chile: Universidad de Chile.

González, F. J. (2005). Lógica de Proposiciones. En *Apuntes de Lógica Matemática*. Cádiz: Departamento de Matemáticas, Escuela Superior de Ingeniería, Universidad de Cádiz.

Grimaldi, R. R. (1998). *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. México: Pearson Educación.

Grossman, S. (2008). *Álgebra Lineal* (Sexta Ed). México: McGraw Hill Interamericana.

Haeussler, E., Paul, R., & Wood, R. (2008). *Matemáticas para Administración y Economía* (Décimo Segunda Ed). México: Pearson Educación.

ICM Instituto de Ciencias Matemáticas. (2005). *Matemáticas Básicas* (Primera Ed). Ecuador: ESPOL, Escuela Superior Politécnica del Litoral.

ICM Instituto de Ciencias Matemáticas. (2009a). *Fundamentos de Matemáticas para Décimo Año de Educación Básica*. (G. Baquerizo, P. Romero, S. Solís, & L. Yagual, Eds.) (Primera Ed). Ecuador: ESPOL, Escuela Superior Politécnica del Litoral.

ICM Instituto de Ciencias Matemáticas. (2009b). *Fundamentos de Matemáticas para Noveno Año de Educación Básica*. (G. Baquerizo, G. Criollo, M. Ramos, P. Romero, S. Solís, & L. Yagual, Eds.) (Primera Ed). Ecuador: ESPOL, Escuela Superior Politécnica del Litoral.

ICM Instituto de Ciencias Matemáticas. (2009c). *Fundamentos de Matemáticas para Octavo Año de Educación Básica*. (G. Baquerizo, G. Criollo, M. Ramos, P. Romero, S. Solís, & L. Yagual, Eds.) (Primera Ed). Ecuador: ESPOL, Escuela Superior Politécnica del Litoral.

Kedlaya, K. (2006). *Geometry Unbound*. USA: MIT, Massachusetts Institute of Technology.

Kolman, B., & Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal* (Octava Ed). México: Pearson Educación.

Lay, D. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones (Tercera Ed). México: Pearson Educación.

Malakhaltsev, M., & Arteaga, J. R. (2013). *Cálculo vectorial*. México: CENGAGE Learning.

Meyer, C. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra* (Primera Ed). USA: SIAM.

Molero, M., Salvador, A., Menarguez, T., & Garmendia, L. (2008). Los Números Complejos. En *Análisis Matemático para Ingeniería*. México: Pearson Educación.

Noble, B., & Daniel, J. (1989). *Álgebra Lineal Aplicada* (Tercera Ed). México: Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Pérez, K., & López, M. A. (1984). *Álgebra Superior*. República Dominicana: INTEC, Instituto Tecnológico de Santo Domingo.

Poblete, V. (2009). *Matemática en la Salud*. Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Scanned by CamScanner

Prasolov, V. (2014). *Problems in Plane and Solid Geometry v.1 Plane Geometry.* (D. Leites, Ed.). USA: Illinois Mathematics and Science Academy.

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). *Cálculo* (Novena Ed). México: Pearson Educación.

Rees, P. K., & Sparks, F. W. (1986). *Álgebra* (Cuarta Ed). México: Editorial Reverté.

Rodríguez, L. (2007). *Probabilidad y Estadística Básica para Ingenieros* (Primera Ed). Ecuador: ESPOL, Escuela Superior Politécnica del Litoral.

Shukla, A. (2010). *Course in Mathematics for IIT-JEE 2011.* USA: Tata McGraw-Hill Education.

Silva, J. M., & Lazo, A. (2003). *Fundamentos de Matemáticas* (Sexta Ed). México: Editorial Limusa.

Smith, K. J. (1991). *Introducción a la lógica.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Sominski, I. (1990). *El Método de la Inducción Matemática* (Primera Ed). México: Editorial Limusa.

Sominski, I., & Faddieev, D. (1986). *Problemas de Álgebra Superior* (Segunda Ed). Rusia: Editorial MIR.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo* (Sexta Ed). México: CENGAGE Learning.

Sullivan, M. (1997). *Precálculo* (Cuarta Ed). México: Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Tapia, O., Ormazábal, M., Olivares, J., & López, D. (2003). *Manual de Preparación Matemática* (Segunda Ed). Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.

Tiner, J. H. (2004). *Exploring the World of Mathematics: From Ancient Record Keeping to the Latest Advances in Computers.* USA: New Leaf Publishing Group, Incorporated.

Xiong, B., & Lee, P. Y. (2007). *Mathematical Olympiad in China: Problems and Solutions.* World Scientific Publishing Company.

Zill, D. G., & Dewar, J. M. (2008). *Precálculo con Avances de Cálculo* (Cuarta Ed). México: McGraw Hill Interamericana.

Zurita, G. (2010). *Probabilidad y Estadística Fundamentos y Aplicaciones* (Segunda Ed). Ecuador: ESPOL, Escuela Superior Politécnica del Litoral.

Scanned by CamScanner

PÁGINAS WEB

Class Notes: Lógica Matemática. (2013). Recuperado 25 de febrero de 2016, a partir de https://dotclassnotes.wordpress.com/

Jordán, C. (2013). Condición Necesaria y Suficiente. Recuperado 25 de febrero de 2016, a partir de https://www.youtube.com/watch?v=ETkN5UtrcPc

Kemerling, G. (2011). Descartes. Recuperado 10 de marzo de 2016, a partir de http://www.philosophypages.com/ph/desc.htm

Ruiz, D., & Sánchez, A. M. (2006). HISTORIA DE LA ESTADÍSTICA. Recuperado 10 de marzo de 2016, a partir de http://www.eumed.net/libros-gratis/2006a/rmss/00.htm

University of St Andrews. (1998a). Fibonacci biography. Recuperado 10 de marzo de 2016, a partir de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Fibonacci.html

University of St Andrews. (1998b). Napier biography. Recuperado 10 de marzo de 2016, a partir de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Napier.html

University of St Andrews. (2014). Cayley biography. Recuperado 10 de marzo de 2016, a partir de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Cayley.html

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

El desarrollo de Fundamentos de Matemáticas para Bachillerato como referente para sentar las bases del precálculo, constituye una oportunidad para enfrentar el estudio de temas cada vez más exigentes del presente siglo, cuyo límite sólo depende de la decisión del lector. Los 463 ejemplos resueltos, 249 ejercicios de autoevaluación, 690 ejercicios propuestos, 6 desafíos, y, 12 FundaRETOS, sumados al valioso contenido de cada uno de los 6 capítulos correspondientes al Tomo I, brindarán el impulso necesario para continuar alimentando la pasión por el maravilloso mundo de las matemáticas.

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
ESPOL

FCNM
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

ISBN: 978-9942-922-09-0
9789942922090

USD 85.00
TOMO I & TOMO II

TI 00006

Scanned by CamScanner